IOAN I. PLĂCINȚEANU

MECANICA
VECTORIALĂ ȘI ANALITICĂ

EDITURA TEHNICĂ

Scanned with OKEN Scanner

Prof. Dr. IOAN I. PLĂCINȚEANU

MECANICA
VECTORIALĂ ȘI ANALITICĂ

★

MECANICA CORPULUI CU MASĂ VARIABILĂ

EDIȚIA a II-a

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALA
IAȘI

89.954

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREȘTI 1958

Nu se împrumută acasă

Scanned with OKEN Scanner

Recenzent : Membru corespondent al Acad. R.P.R.
Caius Iacob
Control ştiinţific : Conf. Univ. Gabriela Ţiţeica

Responsabil de carte : Ing. Marcu Eibschütz
Tehnoredactor : Elly Gorun
Corector responsabil : Florin Pompilian

Dat la cules 15.03.58. Bun de tipar 28.08.58. Hîrtie velină de 65 g/m². 70×100/16. Coli editoriale 52,13. Coli de tipar 47,75. Comanda P.S. 3941. A. 2459 ; E. 15511. Indicele de clasificare pentru bibliotecile mari şi mici 531.

Tiparul executat sub comanda Nr. 80417 la Combinatul Poligrafic Casa Scînteii „I. V. STALIN", Bucureşti, R.P.R.

Scanned with OKEN Scanner

Dedicată
scumpei mele soții
Getta Plăcinteanu
sprijin devotat
în vremuri grele

Prefață

Lucrarea de față își are scheletul constituit din publicația mea anterioară „Mecanica rațională și analitică" din 1942, bineînțeles îmbunătățită și îmbogățită.

Am păstrat aproape aceeași ordine a expunerii, prin faptul convingerii mele că ea este cea rațională; căci mișcarea este fenomenul absolut, repausul static constituind o stare relativă, provizorie. Pentru completarea noțiunilor de lucru cu forțele, uzuale în expunerile de statică inginerească, am accentuat în anexa I dezvoltarea teoriei sistemelor de vectori și reducerea lor la sisteme mai simple.

Pentru a ușura utilizarea trimiterilor, am adăugat ca anexe o scurtă expunere asupra calculului vectorial și tensorial (în care m-am mărginit mai ales la tensorul de ordinul doi simetric, uzual în mecanica rigidului și a corpului deformabil).

Am introdus o secțiune nouă, mai întinsă, asupra problemei corpului cu masă variabilă folosind în special, pînă în amănunte, lucrările lui A. A. Kosmodemianski și ale altor autori citați în text.

Am completat expunerea asupra problemei oscilațiilor cu lucrările mai noi; am introdus și alte completări care rezultă din lucrare.

AUTORUL

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERIE

MECANICA VECTORIALĂ

Partea întîi

Punctul material

Cap. I. **Introducere**

1. Mecanica, ştiinţă a naturii *17;* 2. Obiectul mecanicii *17;* 3. Timp, spaţiu; mişcare în mecanica newtoniană *19;* 4. Corp material *20;* 5. Corp rigid *20;* 6. Punct material *20;* 7. Masă *20;* 8. Forţă *21.*

Cap. II. **Cinematica punctului material**

9. Cinematica *22;* 10. Traiectorie *22;* 11. Viteza pe traiectorie *23;* 12. Mişcarea uniformă *23;* 13. Viteza ca vector *24;* 14. Diferite expresii ale vectorului viteză *25;* 15. Cazuri particulare *26;* 16. Viteză areolară *26;* 17. Mişcarea relativă *27;* 18. Acceleraţia *29;* 19. Diferite expresii pentru acceleraţie *30;* 20. Acceleraţia în mişcarea relativă *31;* 21. Mişcări particulare *32.*

Cap. III. **Principiile mecanicii**

22. Principiile mecanicii newtoniene *33;* 23. Principiul inerţiei *34;* 24. Forţe instantanee *34;* 25. Consecinţa principiului inerţiei *34;* 26. Pripinciul acţiunii forţelor *35;* 27. Principiul independenţei acţiunii forţelor *36;* 28. Impuls. Cantitate de mişcare *37;* 29. Legea fundamentală a mecanicii *37;* 30. Principiul reacţiunii *37;* 31. Principiul relativităţii *37;* 32. Legături *39;* 33. Impulsii *39;* 34. Legea de mişcare a punctului cu masă variabilă *40;* 35. Lucrul mecanic. Putere *41;* 36. Funcţia potenţială *42;* 37. Energia cinetică *42;* 38. Observaţie asupra impulsului *43;* 39. Teorema energiei *43;* 40. Energia potenţială *43;* 41. Principiul conservării energiei *44;* 42. Exemple de forţe conservative *44;* 43. Exemple de forţe neconservative *45;* 44. Sisteme de unităţi *46.*

Cap. IV. **Dinamica punctului material**

45. Consideraţii analitice asupra ecuaţiei fundamentale a mecanicii *47;* 46. Observaţie privind „teorema de existenţă" *47;* 47. Integrala energiei *49;* 48. Teorema impulsului *48;* 49. Teorema momentului cinetic *49;* 50. Integrala ariilor *49;* 51. Condiţiile de echilibru ale unui punct material liber *50;* 52. Caz particular important *50;* 53. Teorema lui Lejeune-Dirichlet *51.*

Scanned with OKEN Scanner

Cap. V. **Cazuri speciale de mișcare a punctului material liber**

54. Legea căderii corpurilor în vid *53;* 55. Experiențe *55;* 56. Căderea corpurilor grele în aer *56;* 57. Oscilatorul liniar armonic *57;* 58. Experiență *59;* 59. Interferența oscilațiilor armonice. Bătăi *60;* 60. Radiația unui oscilator liniar armonic *63;* 61. Oscilații armonice suprapuse bidimensionale *65;* 62. Oscilații foarte mici în jurul unei poziții de echilibru *66;* 63. Oscilații amortizate *67;* 64. Amortizare prin frecare *71;* 65. Aplicații *73;* 66. Oscilații întreținute *75;* 67. Rezonanță *76;* 68. Aplicații *76;* 69. Oscilații auto-întreținute *78;* 70. Oscilații cu caracteristici variabile *78;* 71. Noțiuni asupra oscilațiilor neliniare *81;* 72. Problema balistică clasică *87;* 73. Traiectoria plană în problema balistică *88;* 74. Integrarea ecuației mișcării balistice *88;* 75. Rezistența aerului neglijabilă *89;* 76. Cazul general *90;* 77. Studiul mișcărilor unui punct material sub acțiunea unei forțe centrale *92;* 78. Atracția invers proporțională cu pătratul distanței *92;* 79. Mișcarea eliptică *94;* 80. Aplicație la mecanica cerească *96;* 81. Interpretare geometrică *97;* 82. Aplicație *98;* 83. Elementele mișcării eliptice *99;* 84. Aplicație. Atomul lui Bohr (pentru hidrogen) *99;* 85. Mișcarea parabolică *103;* 86. Aplicație. Mișcarea cometelor *103;* 87. Mișcarea hiperbolică *104;* 88. Aplicație. Mișcarea unei particule încărcate electric în vecinătatea unui nucleu atomic *104;* 89. Condiții de realizare a sateliților pămîntești artificiali *104.*

Cap. VI. **Mișcarea punctului legat, fără frecare**

90. Condiții de legătură *110;* 91. Mișcarea pe o curbă dată *111;* 92. Mișcarea pe o suprafață dată *113;* 93. Linii geodezice *115;* 94. Echilibrul pe o suprafață sau o curbă fixă *115;* 95. Teoremă asupra stabilității echilibrului *116;* 96. Punct „greu" pe o suprafață sau curbă fixă *116;* 97. Ecuațiile normale în mișcarea pe o suprafață *117;* 98. Pendulul matematic *118;* 99. Pendulul simplu *119;* 100. Problema scrînciobului *125;* 101. Pendulul sferic *127;* 102. Oscilații foarte mici ale pendulului sferic în jurul poziției de echilibru stabil *133.*

Cap. VII. **Mișcarea cu frecare**

103. Frecarea de alunecare *135;* 104. Mișcarea cu frecare pe suprafață fixă *137;* 105. Aplicație. Planul înclinat *138;* 106. Mișcarea cu frecare pe o curbă fixă *142;* 107. Aplicație. Mișcarea cu frecare a unui punct greu pe o cicloidă fixă așezată într-un plan vertical *144.*

Cap. VIII. **Mișcarea relativă**

108. Ecuația mișcării *146;* 109. Echilibrul relativ *148;* 110. Principiul echivalenței *148;* 111. Energia cinetică relativă *149;* 112. Echilibrul relativ, la suprafața pămîntului *149;* 113. Influența forței centrifuge asupra cîmpului gravitațional *150;* 114. Mișcarea relativă a unui punct greu la suprafața pămîntului *152;* 115. Aplicații *154;* 116. Pendulul lui Foucault *155;* 117. Experiența lui Foucault *157;* 118. Experiența lui Eötvös-Zeeman *159.*

Partea a doua

Sisteme de puncte materiale

Cap. IX. **Ecuațiile mișcării**

119. Mulțime de puncte materiale *162;* 120. Forțe interne *162;* 121. Forțe de legătură exterioară *163;* 122. Teorema impulsului total *163;* 123. Teorema centrului

Scanned with OKEN Scanner

de greutate *164;* 124. Teorema momentului cinetic total *165;* 125. Teorema ariilor *165;* 126. Planul ariilor maxime *166;* 127. Energia cinetică *166;* 128. Integrala primă a energiei *166;* 129. Observaţii asupra forţelor de legătură *167;* 130. Sistem conservativ *167;* 131. Energia internă *168;* 132. Ecuaţia energiei totale *168.*

Cap. X. **Mişcarea relativă în jurul centrului de greutate**

133. Teorema momentului cinetic relativ *169;* 134. Lemă. Transformarea expresiei momentului cinetic *169;* 135. Consecinţă. Teorema ariilor *170;* 136. Teorema lui S. König *171;* 137. Teorema energiei *171;* 138. Observaţii *171;* 139. Impulsii *172.*

Cap. XI. **Momente de inerţie**

140. Definiţie *173;* 141. Elipsoidul de inerţie *175;* 142. Observaţii asupra tensorului de inerţie *176;* 143. Construcţia vectorului $\overline{K}$ *176;* 144. Axe şi plane principale de inerţie *177;* 145. Teorema lui Steiner *178;* 146. Proprietate *179;* 147. Axe principale centrale de inerţie *179;* 148. Plan principal central de inerţie *180;* 149. Raza de giraţie *180;* 150. Calculul momentelor de inerţie *181;* 151. Aplicaţie a teoremei momentului cinetic *182;* 152. Aplicaţie. Determinarea centrului de greutate *183.*

Partea a treia

Solidul nedeformabil — rigid

Cap. XII. **Introducere în cinematica rigidului**

153. Distribuţia vitezelor. Teorema lui Chasles *187;* 154. Mişcarea elicoidală *189.*

Cap. XIII. **Cazuri particulare de mişcare a rigidului**

155. Mişcarea paralelă cu un plan fix *190;* 156. Centrul momentan de rotaţie *191;* 157. Centrul acceleraţiilor *191;* 158. Mişcarea în jurul unui punct fix *192;* 159. Mişcarea de rostogolire *193;* 160. Mişcarea unui rigid în contact cu o suprafaţă *193;* 161. Suprapunerea mai multor mişcări *194;* 162. Unghiurile lui Euler *196;* 163. Viteza de rotaţie exprimată cu ajutorul unghiurilor lui Euler *198;* 164. Distribuţia acceleraţiilor în corpul rigid *199;* 165. Energia cinetică a rigidului *200;* 166. Momentul cinetic şi noţiunea generalizată de impuls *201.*

Cap. XIV. **Mişcarea rigidului în jurul unei axe fixe**

167. Consideraţii asupra mişcării *201;* 168. Ecuaţiile mişcării *202;* 169. Observaţii asupra mişcării *205;* 170. Axe permanente şi axe spontane de rotaţie *206;* 171. Pendulul fizic *207;* 172. Teoremele lui Huygens *209;* 173. Pendulele lui Kater, Bessel şi de torsiune *210;* 174. Observaţii asupra determinării acceleraţiei greutăţii *212;* 175. Aplicaţie a teoremei lui Huygens *213;* 176. Maşina lui Atwood *214.*

Cap. XV. **Mişcarea unui rigid paralel cu un plan fix. Mişcarea plană**

177. Consideraţii generale *215;* 178. Ecuaţiile mişcării *215;* 179. Condiţii dinamice pentru o mişcare plană *215;* 180. Observaţii asupra ecuaţiilor de mişcare *217;* 181. Mişcarea plană a unui sistem de rigide *217.*

Cap. XVI. **Mişcarea rigidului în jurul unui punct fix**

182. Axe legate de corp, Ecuaţiile lui Euler *219;* 183. Reacţiunea punctului fix *221;* 184. Axe de coordonate mobile faţă de corp şi faţă de un sistem fix în spaţiu

Scanned with OKEN Scanner

221; 185. Cazul cînd forţele aplicate au o rezultantă trecînd prin punctul fix (Euler) *222;* 186. Studiul mişcării în cazul Euler *222;* 187. Unghiurile lui Euler *223;* 188. Concretizarea geometrică a mişcării (Poinsot) *224;* 189. Reprezentarea mişcării *225;* 190. Ecuaţia herpolodiei *226;* 191. Ecuaţia polodiei *228;* 192. Stabilitatea rotaţiei *231;* 193. Cazul particular cînd elipsoidul de inerţie este de rotaţie *232.*

Cap. XVII. **Mişcarea rigidului „greu" în jurul unui punct fix**

194. Integrale prime *234;* 195. Cazuri particulare *235;* 196. Cazul Lagrange şi Poisson *235;* 197. Cazul de integrabilitate Sofia Kowalevski *239;* 198. Cazuri particulare de integrabilitate *241;* 199. Giroscopul fixat într-un punct *242;* 200. Giroscopul adormit *243;* 201. Efecte giroscopice *244.*

Cap. XVIII. **Mişcarea rigidului liber**

202. Ecuaţiile mişcării *247;* 203. Exemplu: mişcarea pămîntului *248.*

Cap. XIX. **Sisteme de corpuri rigide**

204. Pendulul dublu *252;* 205. Pendule simpatice *255.*

Cap. XX. **Mişcarea unui rigid în contact cu un plan fix**

206. Ecuaţiile mişcării *258;* 207. Aplicaţie *259.*

Cap. XXI. **Mişcarea rigidelor cu frecare**

208. Reacţiunea normală *263;* 209. Frecarea de alunecare *264;* 210. Fenomenul de „autoblocare" *265;* 211. Obiecţiile lui P. Painlevé *265;* 212. Echilibrul scării *267;* 213. Dispersia energiei *268;* 214. Frecarea de rostogolire *268;* 215. Frecarea de pivotare *269;* 216. Observaţie *269;* 217. Aplicaţie. Mişcarea de pornire a trenului *270.*

Partea a patra

Impulsii şi ciocniri de corpuri rigide

Cap. XXII. **Impulsii**

218. Generalităţi *272;* 219. Impulsii aplicate unui rigid mobil în jurul unei axe fixe *272;* 220. Caz particular: o singură impulsie *274;* 221. Centru de impulsie *274;* 222. Aplicaţie: pendulul balistic *275;* 223. Impulsii aplicate unui rigid mobil în jurul unui punct fix *276;* 224. Impulsii aplicate unui rigid complet liber *277;* 225. Fixări subite *278;* 226. Aplicaţii: mecanisme de orologerie *279.*

Cap. XXIII. **Ciocniri mecanice**

227. Ciocnirea directă a două sfere *280;* 228. Bilanţul energiei *282;* 229. Ciocnirea neelastică *282;* 230. Teorema lui Carnot *282;* 231. Ciocnirea elastică *283;* 232. Exemplu: ciocanul şi cuiul *283.*

Partea a cincea

Statica

Cap. XXIV. **Condiţiile de echilibru**

233. Condiţiile generale de echilibru *284;* 234. Punctul material liber *284;* 235. Punct mobil, fără frecare, pe o suprafaţă fixă *285;* 236. Punct mobil fără frecare, pe o curbă fixă *285;* 237. Echilibru cu frecare *285;* 238. Stabilitatea echilibrului *286;* 239. Sisteme de puncte materiale *286;* 240. Condiţiile necesare şi suficiente de echi-

Scanned with OKEN Scanner

libru ale rigidului *287;* 241. Rigid supus la legături *287;* 242. Rigid avînd un punct fix *287;* 243. Rigid avînd o axă fixă *288;* 244. Rigid sprijinindu-se pe un plan fix *288;* 245. Stabilitatea echilibrului unui rigid *289.*

Cap. XXV. **Principiul deplasărilor virtuale**

246. Deplasări virtuale *290;* 247. Principiul deplasărilor virtuale *290;* 248. Problema statică *291;* 249. Aplicaţia principiului la mişcarea rigidului *291;* 250. Observaţii asupra echilibrului *292;* 251. Aplicarea principiului la echilibrul rigidului supus la legături *293;* 252. Principiul lui d'Alembert *294.*

Cap. XXVI. **Elemente din statica sistemelor articulate**

253. Sistemele articulate *295*; 254. Forţe. Compresiuni. Tensiuni *295;* 255. Sistem de forţe pur nodale *295;* 256. Poligon funicular *296;* 257. Condiţia de echilibru *296;* 258. Poligonul lui Varignon *297;* 259. Cazul forţelor paralele *298;* 260. Sistem articulat în cîmpul gravitaţional *298;* 261. Sisteme multiplu conexe. Reţele *299;* 262. Fire flexibile şi inextensibile *299;* 263. Postulatul static *300;* 264. Problema firului continuu *300;* 265. Ecuaţiile intrinsece *303;* 266. Problema practică. Probleme particulare *303;* 267. Aplicaţie. Echilibrul unui fir greu. „Lănţişorul" *305;* 268. Forţă normală la fir *306;* 269. Fir pe suprafaţă. Geodezice *307;* 270. Fir aşezat pe o suprafaţă, cu frecare *308;* 271. Podul suspendat *309.*

MECANICA ANALITICĂ

Partea întîi

Ecuaţiile mecanicii analitice

Cap. I. **Sisteme olonome**

272. Obiectul mecanicii analitice *313;* 273. Coordonate generalizate *314;* 274. Spaţiul figurativ R_{3N}. Spaţiul fazelor R_{6N} *315;* 275. Legături. Deplasări *317;* 276. Legături de mobilitate olonome şi neolonome *318;* 277. Teoremă *321;* 278. Relaţiile de permutabilitate *321;* 279. Deplasări reversibile *322;* 280. Principiul deplasărilor virtuale *322;* 281. Exemple *322.*

Cap. II. **Ecuaţiile lui Lagrange**

282. Stabilirea ecuaţiilor lui Lagrange de speţa a doua *325;* 283. Forţe conservative. Funcţia lui Lagrange. Potenţial cinetic. Impulsuri generalizate *327;* 284. Ecuaţia centrală a lui Lagrange *329;* 285. Teorema energiei *330;* 286. Forma normală a ecuaţiei de mişcare, în R_n *331;* 287. Consideraţii generale asupra integrării ecuaţiilor lui Lagrange *332;* 288. Integrala energiei *333;* 289. Sisteme dinamice posedînd coordonate ciclice *336;* 290. Teorema lui Routh şi Helmholtz *336;* 291. Aplicaţie *338;* 292. Sisteme dinamice cu variabile separabile *339;* 293. Sisteme de tipul Liouville *340;* 294. Problema celor două centre în plan *341;* 295. Ecuaţiile lui Lagrange pentru mişcare impulsivă *342;* 296. Aplicaţii *343.*

Partea a doua

Principiile analitice universale ale mecanicii

Cap. III. **Consideraţii generale**

297. Principii mecanice şi principii analitice *349;* 298. Variaţia unei integrale definite. Ecuaţiile lui Euler *351.*

Scanned with OKEN Scanner

Cap. IV. **Principiile variaţionale, integrale, ale mecanicii**

299. Principiul lui Hamilton *354;* 300. Cazul sistemelor de forţe neconservative *355;* 301. Cazul sistemelor scleronome *355;* 302. Principiul lui Maupertuis *356;* 303. Asupra analogiei dintre principiul mecanic al lui Maupertuis şi principiul optic al lui Fermat *359.*

Cap. V. **Principiile diferenţiale**

304. Principiul celei mai mici constrîngeri *361;* 305. Principiul lui d'Alembert *364.*

Partea a treia

Sisteme neolonome

Cap. VI. **Caracterizare cinetică**

306. Caracterele sistemelor neolonome *366;* 307. Proprietăţi ale formelor Pfaff *367;* 308. Relaţiile de transitivitate *369.*

Cap. VII. **Ecuaţiile de mişcare**

309. Metoda reducerii la sistem olonom *370;* 310. Ecuaţiile lui Lagrange în cuasicoordonate *371;* 311. Ecuaţiile lui Appell *373;* 312. Exemplu de mişcare neolonomă: problema cercului *375;* 313. O geometrizare a sistemelor mecanice neolonome *377;* 314. Teoremele lui Gh. Vrănceanu *381.*

Partea a patra

Teoria sistemelor hamiltoniene

Cap. VIII. **Ecuaţiile lui Hamilton**

315. Deducerea ecuaţiilor canonice din ecuaţiile lui Lagrange *383;* 316. Proprietăţile funcţiei lui Hamilton *385;* 317. Interpretare geometrică. Mecanica ondulatorie *385.*

Cap. IX. **Transformări de contact. Transformări canonice. Transformări infinitezimale**

A. *Transformări de contact*

318. Transformări punctuale şi de contact *389;* 319. Expresia analitică a transformării de contact *390;* 320. Condiţia ca o transformare să fie de contact *391;* 321. Conexiune cu principiul lui Hamilton *392;* 322. Sistemul asociat formei canonice este sistemul hamiltonian *392.*

B. *Transformări canonice*

323. Condiţia necesară şi suficientă ca o transformare să fie canonică *393;* 324. Transformări „complet" canonice *394;* 325. Transformări omogene *394;* 326. Teoremă *394;* 327. Ecuaţiile de transformare *394;* 328. Existenţa legăturilor *395;* 329. Transformare punctuală extinsă *395;* 330. Observaţie *395.*

C. *Transformări infinitezimale*

331. Definiţia transformării infinitezimale *396;* 332. Transformări infinitezimale de contact *397;* 333. Teoremă *397;* 334. Teorema reciprocităţii *397.*

Scanned with OKEN Scanner

Cap. X. **Invarianții integrali ai sistemelor hamiltoniene**

335. Proprietăți generale ale sistemelor diferențiale hamiltoniene *398;* 336. Condiția ca sistemul diferențial normal să admită o transformare infinitezimală *400;* 337. Ecuațiile variațiilor *401;* 338. Observație *401;* 339. Proprietate *402;* 340. Definiția invarianților integrali *403;* 341. Invariant integral absolut, complet *404;* 342. Teoremă *404;* 343. Invarianți integrali de ordinul întîi *405;* 344. Ecuația diferențială de condiție *405;* 345. Invariant integral relativ de ordinul întîi, al ecuațiilor lui Hamilton *406;* 346. Teorema reciprocă *407;* 347. Asupra invariantului integral relativ *408;* 348. Invariantul integral, complet, al dinamicii *409;* 349. Observație *410;* 350. Multiplicatorul lui Jacobi *411;* 351. Ecuația diferențială la care satisface multiplicatorul *411;* 352. Teoremă *413;* 353. Schimbare de variabile *413;* 354. Proprietăți *414;* 355. Proprietate a multiplicatorului *415;* 356. Teorema „ultimului" multiplicator *416;* 357. Teoremă *416;* 358. Teorema lui Liouville *417;* 359. Criteriile de cuantificare ale lui A. Sommerfeld *418;* 360. Aplicație a multiplicatorului *419;* 361. Invariant adiabatic *421.*

Cap. XI. **Parantezele lui Lagrange și Poisson**

362. Parantezele lui J. L. Lagrange *430;* 363. Teoremă *431;* 364. Parantezele lui S. D. Poisson *432;* 365. Proprietățile parantezelor lui Poisson *433;* 366. Relația dintre parantezele lui Lagrange și parantezele lui Poisson *433;* 367. Parantezele lui Poisson pentru sistemele hamiltoniene *434;* 368. Teorema lui Poisson *436;* 369. Sisteme în „involuție" *437;* 370. Aplicații ale parantezelor lui Poisson în mecanica cuantică *438.*

Cap. XII. **Ecuația cu derivate parțiale Hamilton-Jacobi. Metode de integrare și cazuri speciale de integrabilitate**

371. Ecuația cu derivate parțiale a dinamicii *442;* 372. Sistemul diferențial al caracteristicilor unei ecuații cu derivate parțiale *442;* 373. Teoremă *444;* 374. Ecuația cu derivate parțiale a mecanicii *445;* 375. Transformarea problemei dinamice în problemă statică *445;* 376. Ecuația cu derivate parțiale a lui Hamilton-Jacobi cînd H nu conține explicit timpul *446;* 377. Variabile ciclice *447;* 378. Teoremă *448;* 379. Cazul separării variabilelor *448;* 380. Teorema lui P. Stäckel *450;* 381. Exemplu. Problema celor două centre *453;* 382. Exemplu. Problema celor două corpuri *454.*

Cap. XIII. **Noțiuni de calculul perturbațiilor**

383. Formularea problemei *456;* 384. Metoda variației constantelor *458;* 385. Metoda aproximațiilor succesive *460;* 386. Observație *462.*

Cap. XIV. **Mișcări periodice și condiționat-periodice**

387. Caracterizarea mișcărilor periodice *463;* 388. Mișcări periodice liniare *464;* 389. Mișcări condiționat periodice *466;* 390. Introducerea variabilelor de acțiune și a variabilelor unghiulare *469.*

Cap. XV. **Mișcări vibratorii**

391. Oscilații în jurul unei poziții de echilibru stabil *470;* 392. Reducerea la axele principale *471;* 393. Ecuațiile de mișcare *472;* 394. Vibrațiile sistemelor supuse la legături *473;* 395. Vibrații întreținute *474;* 396. Vibrații în jurul unei mișcări staționare *474;* 397. Exemple *476.*

Scanned with OKEN Scanner

MECANICA CORPULUI CU MASĂ VARIABILĂ

Partea întîi

Masa variabilă cu timpul

Cap. I. Punctul cu masă variabilă

398. Teorema impulsului *481;* 399. Observaţii asupra ecuaţiei fundamentale *482;* 400. Teorema momentului cinetic *484;* 401. Teorema ariilor *485;* 402. Teorema energiei cinetice *485;* 403. Prima problemă a lui Ţiolkovski *486;* 404. Problema a doua a lui Ţiolkovski *487;* 405. Mişcarea rectilinie a punctului cu masă variabilă în cazul cînd rezistenţa mediului variază cu viteza *489;* 406. Mişcarea rectilinie a rachetei cu reacţie *490;* 407. Mişcarea verticală în sus a punctului cu masă variabilă în cîmpul atracţiei gravitaţionale *491;* 408. Problema evaziunii din atracţia terestră *493;* 409. Mişcarea punctului cu masă variabilă în cîmp central *495;* 410. Mişcarea navei cu reacţie *497;* 411. Căderea firului greu *498;* 412. Mişcarea rectilinie a avionului cu motor aeroreactiv *500.*

Cap. II. Metode variaţionale în problemele dinamicii punctului cu masă variabilă

413. Metoda lui R. Goddard *502;* 414. Metoda lui H. Obert *504;* 415. Problema generală variaţională *505;* 416. Mişcarea într-o atmosferă omogenă ($\rho = \text{const}$) *509;* 417. Aplicarea metodei variaţionale la problema mişcării unui punct cu masă variabilă prin captare şi emisie simultană *510;* 418. Asupra unei probleme de calcul variaţional privind mişcarea rachetei *512.*

Cap. III. Consideraţii asupra corpului cu masă variabilă

419. Noţiuni fundamentale *514;* 420. Teorema impulsului *515;* 421. Teorema centrului de greutate *516;* 422. Momentul cinetic pentru corpul cu masă variabilă *516;* 423. Mişcarea unui rigid în jurul unei axe fixe *518;* 424. Teorema momentului cinetic faţă de axele fixe *519;* 425. Rotaţia unui rigid cu masă variabilă în jurul unei axe fixe *519;* 426. Teorema momentului cinetic faţă de axele mobile *520;* 427. Definiţia energiei cinetice. Teorema lui König generalizată *523;* 428. Teoria energiei cinetice *524;* 429. Ecuaţiile lui Lagrange pentru corpul cu masă variabilă *524;* 430. Ecuaţiile lui Hamilton pentru corpul cu masă variabilă *526;* 431. Asupra problemei a două corpuri cu masă variabilă *528;* 432. Ecuaţiile de mişcare a trei corpuri cu mase variabile *529;* 433. Ecuaţiile mecanicii ondulatorii pentru un punct cu masă variabilă *532.*

Partea a doua

Noţiuni de teoria relativităţii restrînse. Masa de mişcare variabilă cu viteza

Cap. IV. Cinematica relativistă

434. Introducere *535;* 435. Principiile relativităţii restrînse *537;* 436. Grupul de transformări al lui H. A. Lorentz *537;* 437. Revizuirea noţiunii de simultaneitate *539;* 438. Spaţiu absolut şi spaţiu relativ *540;* 439. Relativitatea timpului *541;* 440. Contracţia lungimilor *541;* 441. Dilatarea timpului *541;* 442. Invarianţa elementului de ipervolum *542;* 443. Legea de adunare a vitezelor *542.*

Scanned with OKEN Scanner

Cap. V. **Dinamica relativistă**

444. Ecuaţia fundamentală a mecanicii relativiste *543;* 445. Masa longitudinală şi masa transversală *545;* 446. Reducerea la unitatea de volum *545;* 447. Teorema impulsului *545;* 448. Energia proprie a punctului material *546;* 449. Energia cinetică *546;* 450. Inerţia energiei. Masa energetică *547;* 451. Aplicaţie cuantică *547;* 452. Oscilatorul liniar relativist *551.*

NOTĂ: Principiul unei mecanici a sistemelor dinamice inerţiale *557*

EXERCIŢII ŞI PROBLEME RECAPITULATIVE

Mecanica vectorială *563*
Mecanica analitică *630*
Mecanica corpului cu masă variabilă *653*

ANEXE

Anexa I. **Elemente de calcul vectorial**

1. Mărimi fizice şi mărimi matematice *663;* 2. Mărimi scalare, vectoriale, tensoriale *663;* 3. Spaţiile mecanicii newtoniene *663;* 4. Segment orientat *664;* 5. Vector euclidian *664;* 6. Adunarea vectorilor *664;* 7. Scăderea vectorilor *664;* 8. Multiplicarea unui vector cu un scalar *665;* 9. Propoziţiile fundamentale ale calculului vectorial *665;* Exprimarea unui vector cu ajutorul versorului său *665;* 11. Componenta unui vector pe o direcţie orientată *665;* 12. Descompunerea vectorilor *665;* 13. Sisteme de referinţă. Bază. Sistem de coordonate *666;* 14. Produsul scalar *666;* 15. Produsul vectorial *667;* 16. Produse mixte de mai mulţi vectori *668;* 17. Vectori reciproci *669;* 18. Momentul unui vector legat sau alunecător *669;* 19. Vector rezultant şi moment rezultant al unui sistem de vectori *670;* 20. Teorema lui Varignon *670;* 21. Invarianţii scalari ai unui sistem de vectori *670;* 22. Axa centrală *670;* 23. Operaţii elementare de „reducere“ a unui sistem de vectori *671;* 24. Sisteme particulare de vectori *671;* 25. Reducerea unui sistem de vectori legaţi sau alunecători la un sistem echivalent, mai simplu *673;* 26. Reprezentarea geometrică a derivatei *675;* 27. Proprietăţile curbelor *676;* 28. Proprietăţile suprafeţelor *676;* 29. Teorema lui Meusnier *678;* 30. Simbolii lui Christoffel *678;* 31. Formulele lui Gauss pentru derivatele de ordinul al doilea *679;* 32. Linii geodezice pe suprafaţă *680.*

Anexa II. **Noţiuni asupra teoriei cîmpurilor**

33. Mărimi de stare *681;* 34. Noţiunea de cîmp *682;* 35. Suprafeţe de nivel. Potenţial *682;* 36. Derivata geometrică a funcţiei de cîmp scalar *682;* 37. Vectorul gradient. Cîmpuri vectoriale *684;* 38. Derivata de direcţie a unui vector *686;* 39. Proprietate importantă a cîmpului vectorial provenit din gradientul unui cîmp scalar. Cîmpuri irotaţionale *686;* 40. Introducerea coordonatelor generale *686;* 41. Cazul suprafeţelor ortogonale *689;* 42. Expresia gradientului în coordonate generale *690;* 43. Fluxul unui vector printr-o suprafaţă *691;* 44. Formula lui Gauss-Ostrogradski *691;* 45. Divergenţa în coordonate generale *693;* 46. Formulele lui Green *694;* 47. Operatorul lui Laplace *694;* 48. Derivata absolută *695;* 49. Cîmpuri rotaţionale *695;* 50. Rotorul unui vector dat *696;* 51. Relaţia dintre „rotor“ şi noţiunea fizică de „rotaţie“ *696;* 52. Formula lui Stokes *697;* 53. Relaţii importante *698.*

Anexa III. **Elemente de calcul tensorial**

54. Consideraţii generale *699;* 55. Scalarul şi vectorul, cei mai simpli tensori *699;* 56. Componentele contravariante şi covariante ale unui vector *700;* 57. Repre-

Scanned with OKEN Scanner

zentarea grafică a componentelor unui vector *701;* 58. Transformarea componentelor unui vector *702;* 59. Tensorul metric fundamental *704;* 60. Tensori de ordinul al doilea, simetrici şi antisimetrici *705;* 61. Operaţii elementare cu tensorii de ordinul al doilea *705;* 62. Conexiune între studiul formelor biliniare, pătratice şi liniare cu studiul tensorului de ordinul al doilea *706;* 63. Formule pentru multiplicarea scalară interioară şi exterioară, a unui tensor simetric strîmb, cu un vector *706;* 64. Produsul vectorial faţă de un sistem oblic de coordonate *707;* 65. Reprezentarea geometrică a unui tensor de ordinul al doilea *707;* 66. Proprietăţi *708;* 67. Cei trei invarianţi ai tensorului de ordinul al doilea *709;* 68. Exemple de formare a tensorilor de ordin inferior şi superior *709;* 69. Tensori în spaţiul euclidian faţă de axe curbilinii *711;* 70. Componente contravariante şi covariante *712;* 71. Simbolii lui Christoffel *712;* 72. Derivata covariantă şi contravariantă a unui tensor *713;* 73. Deplasarea paralelă a unui vector *714;* 74. Ecuaţiile geodezicelor *716;* 75. Derivata absolută a unui vector *716;* 76. Tensori în spaţiul riemannian *716;* 77. Tensorul Riemann-Christoffel *717;* 78. Invariantul de curbură *718.*

Bibliografie *719*
Index de autori *721*
Index de cuvinte *724*

Scanned with OKEN Scanner

MECANICA VECTORIALĂ

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
IAȘI

Partea întîi

PUNCTUL MATERIAL

Capitolul I

INTRODUCERE

1. Mecanica, ştiinţă a naturii. Ştiinţa are ca scop să descopere, să formuleze şi să studieze legi pentru a putea descrie fenomenele naturii. Prima sarcină a ştiinţei este să deosebească şi să grupeze fenomenele naturii în categorii cu caractere similare. În felul acesta disciplinele ştiinţifice care au fost descoperite de spiritul cercetător şi constructiv al omului, se disting prin „obiectul de studiat", prin „concepţia" principială şi prin „metodele de tratare".

Dintre aceste discipline, *Fizica* se ocupă cu studiul fenomenelor naturii înconjurătoare organizîndu-şi obiectul de cercetat în grupuri de fenomene cu caractere analoge. Aşa s-au dezvoltat treptat Mecanica, Electricitatea şi Magnetismul, Optica, Termodinamica, Mecanica cuantică şi ondulatorie, Fizica atomică şi nucleară, şi celelalte. Astăzi, nu se mai face o deosebire riguros delimitată între aceste diferite capitole ale Fizicii, fiindcă ele se îmbină şi se ajută reciproc. Ceea ce este sigur şi caracteristic, însă, este faptul că Mecanica constituie un capitol covîrşitor prin importanţă. Însăşi evoluţia istorică a aşezat-o pe poziţie privilegiată. Putem afirma că legile, metodele şi regulile Mecanicii îşi găsesc aplicaţie, adeseori directă, în toate celelalte capitole ale Fizicii.

Toate aceste discipline ştiinţifice au rostul şi menirea de a permite formularea legilor, stabilirea relaţiilor şi descoperirea unor metode de cercetare cît mai comode, nu numai pentru studierea pur ştiinţifică a problemelor puse de natura care ne înconjoară, ci, mai ales, pentru a putea pune stăpînire pe această natură şi a o transforma pentru a folosi omului. Acesta este rostul aplicaţiilor practice şi tehnice din ce în ce mai complicate. Studiul lor necesită cunoaşterea profundă a legilor Mecanicii.

89.954

2. Obiectul Mecanicii. Mecanica se ocupă cu studiul mişcării şi echilibrului corpurilor materiale precum şi cu studiul forţelor care solicită aceste corpuri. Astfel, Mecanica este o ştiinţă a naturii, care îşi fixează fundamentele şi îşi formulează axiomele după anumite „principii" scoase din datele experimentale.

Mecanica este cea dintîi aplicaţie a raţionamentului matematic la studiul cantitativ şi cauzal al fenomenelor naturale.

Bazele mecanicii îşi au obîrşia în lucrările savanţilor din antichitate — care se referă în special la problemele de statică — începînd cu Arhimede (287—212 î.e.n.), care a descoperit teoria pîrghiei, teoria centrului

de greutate (pe care l-a calculat pentru diferite cazuri), a pus bazele hidrostaticii și a produs numeroase invenții tehnice.

O întreagă serie de idei interesante asupra problemelor de mecanică se datoresc lui Aristotel (384—322 î.e.n.), care introduce pentru prima oară termenul de „mecanică". El folosește metoda filozofică deductivă ajungînd uneori la concluzii eronate, deoarece nu-și controla rezultatele cu experiența.

Dezvoltarea intensă a mecanicii a început în epoca Renașterii în Italia prin progresul multilateral realizat de Leonardo da Vinci (1452— 1519): teoria mecanismelor, strungul eliptic, legi ale frecării, teoria planului înclinat, a definit și aplicat „momentul forței față de un punct", condițiile de echilibru etc.

Cel mai mare ceasornicar al omenirii Chr. Huygens (1629—1695) descoperă oscilațiile pendulului fizic, noțiunea de forță centrifugă și introduce noțiunile foarte importante ale momentului de inerție și centrului de oscilație. În al său „Tratat despre lumină" pune bazele teoriei ondulatorii a luminii.

Inițiatorul științei dinamicii este Galileo Galilei (1554—1642) în lucrarea „*Discorsi e dimostrazioni matematiche*", (1638). El poate fi considerat ca întemeietorul științei fizice teoretice. Ocupîndu-se cu cercetarea cîtorva fenomene care se petrec pe suprafața pămîntului, el reușește să formuleze pentru prima oară o lege empirică, sub formă integrală, pentru un anumit fenomen fizic.

Cel care extinde, însă, studiul Mecanicii la întregul sistem planetar și care stabilește cea dîntîi lege fizică scrisă sub formă de ecuație diferențială este Isaac Newton (1643—1727) în celebra sa carte „*Philosophiae naturalis Principia mathematica*", (1687). Totodată Newton construiește primul *sistem* de Fizică teoretică: Mecanica teoretică. El recunoaște necesitatea de a se preciza în știință *noțiunile* folosite curent, spre a fi degajate de înțelesul lor comun, adeseori contradictoriu sau neclar. Iată cum se exprimă Newton:

„Pînă acum am încercat să lămuresc sensul în care trebuie înțelese anumite denumiri mai puțin cunoscute. Nu voi defini noțiunile de timp, spațiu și mișcare, cunoscute tuturor. Trebuie de observat însă, că aceste mărimi, așa cum sînt cunoscute, obișnuit, se referă la simțurile noastre; prin aceasta iau naștere, însă, anumite idei preconcepute, care se înlătură de obicei prin împărțire în absolut și relativ, real și aparent, matematic și comun".

Opera lui Newton a fost continuată cu intensitate de urmașii săi. Cel care introduce metodele analitice ale principiilor variaționale în problemele de mecanică este Leonard Euler (1707—1783).

În problema mișcării corpului rigid Euler studiază cunoscutul său caz de integrabilitate — iar mai tîrziu Sofia Kowalevski (1850—1891) descoperă un nou și ultim caz de integrabilitate a ecuațiilor de mișcare a rigidului cu un punct fix.

Dificultățile tratării prin metoda newtoniană a problemelor sistemelor cu legături — cum este teoria firului — conduc la dezvoltarea metodelor analitice datorită lui J. d'Alembert (1717—1783) cunoscută sub numele de *principiul lui d'Alembert*.

Cel care a dat o formă desăvîrșită metodei analitice de tratare a problemelor dinamicii a fost J. L. Lagrange (1736—1818) care în celebrul

Scanned with OKEN Scanner

său tratat „*Mécanique analitique*“ [1]) se mîndreşte că tratează toate chestiunile de mecanică „fără nici o figură“. El introduce *principiul deplasărilor virtuale* pe care-l aplică în mod consecvent.

Continuatorul operei lui Lagrange este W. R. Hamilton (1805—1865) care stabileşte sistemul de ecuaţii canonice, ecuaţia lui Hamilton-Jacobi şi care încearcă să deducă legile fundamentale ale mecanicii dintr-un unic principiu variaţional, problemă de care s-au ocupat ulterior o întreagă serie de matematicieni. Problema stabilităţii sistemelor dinamice a făcut obiectul cercetărilor savanţilor H. Poincaré (1854—1912) şi A. M. Liapunov (1857—1918).

Un capitol nou — dinamica corpului cu masă variabilă — a fost înscris în mecanică datorită lucrărilor lui I. V. Mescerski (1859—1935) şi T. Levi-Civita (1873—1941), lucrări care au condus la teoria navigaţiei cu reacţie iniţiată de K. E. Ţiolkovski (1857—1935).

3. **Timp, spaţiu, mişcare în mecanica newtoniană.** Newton (*Phil. nat.*) precizează noţiunile de timp, spaţiu şi mişcare aşa cum trebuie concepute în sistemul său teoretic.

„*Timpul absolut*, adevărat şi matematic, se scurge prin natura sa însăşi, uniform, fără nici o relaţie cu vreun obiect oarecare. El este numit adeseori „durată“ (Scolie I).

„*Timpul relativ*, aparent, comun, este ceva exterior pe care îl apreciem cu simţurile ca măsură a duratei, măsură ce poate fi mai precisă sau mai puţin precisă“ (Scolie I).

„*Spaţiul absolut* nu este, din cauza naturii sale însăşi, în nici un fel de raport cu vreun obiect oarecare, fiind mereu în nemişcare (Scolie II).

„*Spaţiul relativ* este o măsură a primului, sau a unei părţi a primului, care este determinată cu ajutorul simţurilor noastre prin poziţia sa faţă de alte corpuri“ (Scolie II).

„*Mişcarea absolută* este deplasarea unui corp dintr-o poziţie absolută spre altă poziţie absolută“ (Scolie IV).

„*Mişcarea relativă* este deplasarea unui corp dintr-o poziţie relativă spre altă poziţie relativă“ (Scolie IV).

Mecanica newtoniană admite, deci, ca realitate fizică, existenţa unui spaţiu şi a unui timp absolut, independente. În acest spaţiu absolut mişcarea se poate reprezenta prin raportare la un anumit sistem de referinţă, iar timpul se măsoară după o anumită scară aleasă convenabil.

Ca *sistem absolut de referinţă* se ia un triedru tridreptunghic cu originea în centrul de greutate al sistemului solar şi cu axele îndreptate spre trei stele fixe, numit „sistem astronomic“ sau „sistemul lui Copernic“. Metrica acestui spaţiu isotrop este, în mecanica newtoniană, aceea a spaţiului *euclidian* cu *trei* dimensiuni, exprimată prin teorema lui Pitagora.

Unitatea de măsură a timpului, în mecanica newtoniană, se ia ziua siderală, respectiv secunda siderală, adică 1/86 164 din durata unei rotaţii complete a Pămîntului în jurul axei sale.

Studiul mişcării este studiul variaţiei poziţiilor pe care un corp, definit prin coordonatele punctelor care-l formează, raportate la un sistem de referinţă fix, le ia cu timpul. Pentru simplificare, fie un punct material M în mişcare. Coordonatele lui faţă de sistemul de referinţă (sistem de coordonate) sînt (x, y, z). Ele pot fi reprezentate prin vectorul de poziţie $\bar{r}$ (x, y, z).

[1]) *J. L. Lagrange* [2].

Cînd coordonatele variază, punctul descrie o curbă, numită *traiectorie*, dată prin ecuația vectorială $\overline{r} = \overline{r}(t)$.

Mecanica are de răspuns următoarelor chestiuni:

a) *De ce* se mișcă un corp ?; b) *Cum* se mișcă un corp ?

4. **Corp material.** Spațiul care ne înconjoară este plin de *materie* în continuă mișcare. Un corp oarecare, luat la întîmplare, este el însuși o aglomerație de particule mai mici de materie, legate între ele după anumite legi pe care Fizica și Chimia se căznesc să le descopere. Din această observație simplă se vede că noțiunea de „corp material" este, de fapt, extrem de complexă. Dacă am vrea să cercetăm în ansamblul lor mișcările și modul cum sînt aranjate *moleculele* care constituie corpul material, apoi *atomii* în molecule, *electronii*, *neutronii*, *protonii* etc., în atomi și în nucleele atomilor, am ajunge la o problemă imposibil de rezolvat în stadiul actual al științei. De aceea știința procedează prin simplificare. Apoi, încetul cu încetul, ea își modifică și dezvoltă criteriile și metodele, pătrunzînd tot mai adînc și mai amănunțit în natura fenomenelor fizice. Astfel, Mecanica nu poate trata „mișcarea unui corp material" în tot complexul ei, dintr-o dată, adică, mișcarea corpului în ansamblu, mișcările diferitelor regiuni una față de cealaltă, deplasările și oscilațiile în interiorul corpului a moleculelor, atomilor etc.

5. **Corp rigid.** Mecanica își propune, în primul rînd, problema studierii mișcării unui corp material considerat ca „*rigid*" (distanțele mutuale ale punctelor, sau părților ce-l constituie, sînt invariabile). În natură nu există un corp perfect rigid, corpurile reale fiind totdeauna deformabile. Mecanica mediilor deformabile începe cu chestiuni care privesc mișcările posibile ale solidelor ce se deformează. Urmează apoi Mecanica fluidelor, gazelor și așa mai departe. Dar nici chiar mișcările corpului rigid nu se pot studia dintr-o dată! Ci, în prealabil, Mecanica imaginează un corp rigid extrem de simplu, fără dimensiuni: „punctul material".

6. **Punct material.** Drept punct material se consideră un corp material rigid, care are dimensiunile unui punct geometric și care *nu efectuează mișcări de rotație în jurul vreunei axe trecînd prin el însuși.* I se atribuie o „masă" materială drept un parametru caracteristic. Punct material poate fi un electron, sau o piatră zvîrlită din praștie, poate fi chiar Pămîntul întreg în mișcarea lui planetară, dacă nu ținem seamă de rotația în jurul axei polilor. Vedem deci, că noțiunea de punct material este legată de felul problemei ce se pune; ea nu este o realitate absolută. Așa dar, un punct material nu este o mărime fizică reală, ci o entitate fictivă menită să servească la simplificarea formulării și rezolvării problemei inițiale de Mecanică.

7. **Masă.** Noțiunea de „masă" este destul de complicată; ea implică două înțelesuri, două caractere, în mecanica newtoniană.

a) *Masa gravifică.* Proprietatea de greutate a masei unui corp rezultă din experiența zilnică. Orice corp are tendința să „cadă" spre pămînt, din cauză că pămîntul îl atrage. Însă această atracție depinde între altele și de ceva caracteristic corpului dat, exprimat matematic printr-un parametru pe care noi îl numim „masă". Într-un *cîmp gravitațional*, toate corpurile manifestă caracterul gravific al masei prin modul cum reacționează la mișcare [N e w t o n (*Phil. nat.*) Definiția I].

Scanned with OKEN Scanner

b) *Masa inertă.* Masa, însă, mai are o altă proprietate: ea este inertă. Se știe din viața de toate zilele că această proprietate este deseori pusă la contribuție. Cineva care aleargă într-o direcție și își schimbă *brusc* direcția întîmpină efectul masei; aceasta, în virtutea inerției, îl menține în direcția inițială. În tren, cînd pornește sau cînd se oprește trenul, cădem pe spate sau în față, deoarece masa corpului nostru caută, în virtutea proprietății de inerție, să-și păstreze starea de mișcare pe care o avea la început. În general, efectul inerției se va resimți oridecîteori vom încerca să modificăm *brusc* starea de mișcare (sau de repaos) a unui punct material.

O experiență simplă (R. Pohl) ne pune în evidență cele două proprietăți ale masei unui corp (fig. 1). Legăm de o sferă grea M două fire de egală rezistență. Cu un fir atîrnăm sfera de un suport solid; celălalt fir este lăsat să atîrne în jos.

a) Dacă tragem *încet* din A, se va rupe firul BM, căci în acest caz efectul tragerii se va manifesta ca o greutate aditivă lui M; ea se va aduna cu greutatea sferei, rupînd firul de sus prin învingerea rezistenței firului.

b) Dacă smucim *brusc* în A, inerția sferei va opune rezistență și se va rupe firul între A și M.

Fig. 1

Această proprietate de inerție se exprimă prin cuvintele: „orice corp are nevoie de timp ca să-și schimbe starea de mișcare". Dacă i se lasă timp suficient, corpul își schimbă mișcarea *sub acțiunea unei cauze exterioare*; dacă i se impune să-și schimbe mișcarea *brusc*, el se va „opune", adeseori surprinzător de puternic. [Newton (*Phil. nat.*) Definiția III].

Putem aminti că, într-o vreme, s-a crezut că masa gravifică a unui corp ar fi diferită de masa inertă. Această discuție a fost provocată de teoria relativității. O experiență celebră, datorită lui Eötvös, a dovedit însă că cele două mase sînt riguros egale (v. § 118).

Valoarea masei se exprimă printr-un singur număr, întotdeauna pozitiv, m-grame. Este deci un scalar, esențial pozitiv. Masa se bucură de proprietatea aditivității. Dacă adunăm două sau mai multe mase, vom obține o masă egală cu suma lor:

$$m_1 + m_2 = m.$$

Din considerațiile de mai sus rezultă că noțiunea de masă este asociată cu noțiunea de acțiune exterioară (gravitatea sau acțiunea ce schimbă starea de mișcare inițială a corpului).

În primele dezvoltări ale mecanicii masa a fost considerată drept constantă în timpul mișcării. După cum vom vedea însă, principiile mecanicii newtoniene se aplică și în cazul masei variabile în timp, suferind o modificare doar în teoria relativității.

În cele ce urmează, pînă la specificarea contrară, o vom considera constantă.

8. **Forță.** În afară de cele două mărimi scalare, descrise mai sus, timpul și masa, care intervin în mișcarea unui corp material, într-un spațiu definit, Mecanica mai consideră și mărimi vectoriale printre care sînt *forțele*. Experiența ne arată că orice corp material își schimbă starea

de repaus cînd asupra lui lucrează o cauză exterioară, — noi zicem, cînd este solicitat de *o forță*. În multe cărți se definește „forța" ca fiind „cauza mișcării", ceea ce este nepotrivit. Noțiunea de „cîmp" face posibilă concepția de forță ca factor care transmite acțiunile reciproce dintre două sau mai multe corpuri. Această noțiune este din cele mai fructuoase din fizică și este datorită fizicianului englez F a r a d a y. Într-un domeniu considerat ca sediul unor fenomene fizice, de ex. electrice, magnetice, gravitaționale, etc., „mediul" este dispus într-o anumită „stare" sau „configurație", capabilă să declanșeze o mișcare numai atunci cînd se introduce în acest mediu un corp menit să-i perturbeze configurația statică actuală. De exemplu: într-un mediu electric produs de un conductor în repaus (cîmp static), dacă introducem o particulă electrizată, aceasta se va pune în mișcare. Deci *mediul*, cu configurația lui dată (zicem: *cîmpul*), *există înainte* de introducerea particulei, prin urmare, înaintea mișcării acesteia.

Noțiunea de forță se obține, practic, din observația fizică, sau prin experiențe potrivite. Astfel de experiențe calitative și cantitative se aranjează în laboratoarele de fizică experimentală, cînd se introduce, pentru prima oară, noțiunea de forță.

Din punct de vedere fizic se pot distinge mai multe categorii de forțe: forța musculară, gravitatea, forța elastică, frecarea, forțele electrice, magnetice, etc. Mecanic, forțele se clasifică în: a) forțe care acționează asupra *suprafeței* corpului, și b) forțe care acționează asupra *volumului* corpului.

Natura fizică a forței ne face s-o reprezentăm matematic printr-un *vector*, și anume: un vector covariant funcție de poziție, de timp și de viteză. Acest caracter vectorial al forței constituie un postulat, un principiu de bază, în Mecanică. Întrucît forța este legată de punctul material pe care-l solicită, ea este reprezentată printr-un vector *legat*. În corpuri *rigide*, punctul de aplicare poate aluneca pe direcția forței; în acest caz forța este reprezentată printr-un vector *alunecător* [v. Anexa I § 18 ș.u. N e w t o n (*Phil. nat.*) Definiția IV].

Din considerațiile precedente rezultă că mecanica (newtoniană, ca și cea einsteiniană, după cum vom constata mai tîrziu) implică principiul universal de *cauzalitate* căruia i se suprapune principiul mecanic de *reversibilitate*.

Capitolul II

CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

9. **Cinematica.** Partea din Mecanică în care se pune întrebarea: *cum* se mișcă un corp, se numește cinematică. Această întrebare, făcînd abstracție de forțele exterioare care acționează corpul în mișcare, face implicit abstracție și de proprietatea intrinsecă a corpului material, asociată efectului de acțiune exterioară, anume masa corpului. Așa dar, în Cinematică nu ne interesează caracterul material al corpului în mișcare. Vom considera prin urmare un punct material, independent de masă, sub forma unui punct geometric — numit *mobil*.

10. **Traiectorie.** Linia sau curba reală, pe care o parcurge mobilul mișcîndu-se în spațiu, se numește traiectorie. Cînd traiectoria este o linie

Scanned with OKEN Scanner

dreaptă, mişcarea se numeşte rectilinie. Cînd traiectoria este o curbă oarecare, avem o mişcare curbilinie. Mişcarea este complet determinată dacă se exprimă coordonatele mobilului ca funcţie de timp $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Exceptînd singularităţi eventuale, care necesită o analiză specială, funcţia precedentă este, în general, o funcţie regulată: continuă, finită, uniformă şi de două ori derivabilă; iar derivatele însele sînt continue în tot domeniul. Dimensiunea arcului de traiectorie este lungimea L.

11. **Viteza pe traiectorie.** Cînd un punct material se mişcă în mod continuu pe traiectoria lui (fig. 2) — dintr-o cauză care nu ne interesează pentru moment — este nevoie să ştim *cum* se mişcă acel punct. Pentru aceasta vom defini în primul rînd, *viteza* cu care mobilul se mişcă pe traiectorie. Vom fi nevoiţi întîi să ştim cum exprimăm drumul parcurs de mobil în funcţie de timp. Trebuie deci să cunoaştem lungimea arcului de traiectorie s în funcţie de timp (traiectoria fiind o curbă rectificabilă):

$$s = s(t).$$

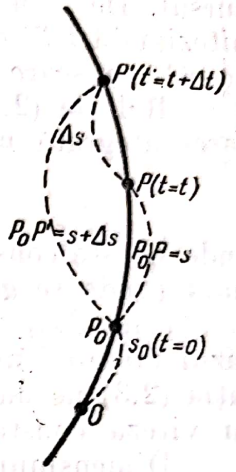

Fig. 2

Arcul se măsoară pe curbă de la o origine fixă, aleasă arbitrar pe curbă (punctul O) într-un sens ales ca sens pozitiv de circulaţie. Vom fixa de asemenea o „origine a timpurilor", adică un moment de la care vom începe măsurarea timpului.

Dacă mobilul a ajuns, la momentul t, în punctul P, şi apoi, mergînd mai departe, a ajuns la momentul t' în punctul P', el a parcurs bucata de drum $PP' = \Delta s$ în timpul $t' - t = \Delta t$. Raportul $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ dintre drumul parcurs şi timpul necesar pentru parcurgerea lui, se numeşte „viteza *medie*" a punctului pe distanţa PP' de pe traiectorie. Pe această distanţă infinitezimală raportul precedent poate fi considerat ca fiind constant. Viteza medie este definită elementar ca drumul parcurs de mobil în unitatea de timp.

Să ne închipuim acum că punctul P' este adus pe traiectorie spre punctul P, aşa încît drumul parcurs Δs să tindă către zero. Este clar că, mişcarea fiind continuă, timpul necesar pentru parcurgerea acestui drum va fi foarte scurt, tinzînd către zero împreună cu drumul. Raportul $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ capătă, la limită, forma nedeterminată $\frac{0}{0}$ care, conform ipotezelor de la § 10, are o limită finită, pe care o vom nota cu ds/dt, sau cu v, şi pe care o vom numi „viteza pe traiectorie în momentul t". *Ea este un scalar* definit într-un punct dat pe traiectorie. Aşa dar:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = v \qquad (2.1)$$

v fiind în general funcţie de poziţia mobilului pe traiectorie şi de timp. Rezultă că viteza pe traiectorie este definită în fiecare punct al traiectoriei şi se obţine derivînd arcul în raport cu timpul în acel punct.

12. **Mişcarea uniformă.** Un caz particular simplu este acela cînd mişcarea se efectuează pe traiectorie astfel încît mobilul descrie drumuri egale

în timpuri egale. O astfel de mișcare se numește „uniformă", iar viteza pe traiectorie este constantă:

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 \tag{2.2}$$

v_0 fiind constant. Ea poate fi considerată ca viteză medie pe tot parcursul. De aceea, cînd am definit mișcarea mobilului pe distanța infinitezimală PP' cu viteza medie, relativă la această porțiune de traiectorie, această mișcare era uniformă.

Relația (2.2) este o ecuație diferențială ordinară de ordinul întîi, care integrată ne dă:

$$s = v_0 t + s_0 \tag{2.3}$$

unde s_0 este constanta care se introduce prin integrare și arată poziția inițială (unde se găsea mobilul în momentul cînd a început mișcarea) căci făcînd în (2.3) $t = 0$, avem $s = s_0$. Din relația (2.3) se mai vede că, în cazul mișcării uniforme, drumul parcurs este proporțional cu timpul. Relația (2.3) ne dă legea de mișcare uniformă a punctului pe traiectoria sa cu viteza constantă v_0.

Dimensiunile vitezei sînt:

$$[v] = \mathrm{LT}^{-1}.$$

13. **Viteza ca vector.** Cînd ni se cere să precizăm cum se mișcă mobilul pe o traiectorie cunoscută, este suficient să aflăm valoarea scalarului $v = \dot{s}$, adică viteza pe traiectorie în fiecare punct.

Cunoașterea traiectoriei implică însă cunoașterea *direcției* și *sensului* mișcării punctului material considerat în fiecare moment, pe traiectorie. Direcția mișcării este direcția vectorului $d\bar{s}$, iar sensul este dat de creșterea sau descreșterea arcului, cînd t crește (după cum $v > 0$ sau $v < 0$).

Din aceste considerații rezultă că, dacă vrem să definim viteza într-un punct $M(x, y, z)$, punct a cărui deplasare definește traiectoria, făcînd însă abstracție de cunoașterea prealabilă a traiectoriei, avem nevoie de: *valoarea absolută* $v = \dot{s}$, de *direcția* mișcării în fiecare moment t cînd punctul se află în M, și de *sensul* mișcării. Prin urmare viteza are caracterul unui vector, funcție de poziție și de timp.

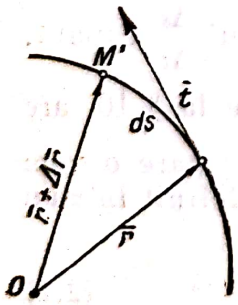

Fig. 3

Pentru a defini viteza ca *vector* observăm că poziția unui mobil M, în momentul t, este dată de vectorul de poziție $\bar{r}$ (fig. 3). După timpul Δt mobilul se deplasează din M în M', astfel încît $MM' = \Delta s$, iar coarda $\overrightarrow{MM'} = \Delta\bar{r}$. Din teoria vectorilor (Anexa I, § 26):

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{t}$$

unde $\bar{t}$ este vectorul unitate al tangentei în M la traiectorie. Prin definiție, vectorul:

$$\bar{v} = v\bar{t} \tag{2.4}$$

reprezintă *vectorul viteză* a mobilului M (în momentul t); cîtimea scalară v, viteza pe traiectorie, este valoarea sa absolută, iar $\bar{t}$ vectorul unitate.

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, din (2.4) rezultă că viteza $\bar{v}$ este, în fiecare moment şi în fiecare punct, tangentă la traiectoria mobilului. Ea exprimă viteza mobilului faţă de spaţiul înconjurător aşa cum scalarul v exprimă viteza mobilului pe traiectorie. Prin analogie cu aceasta din urmă, $\bar{v}$ poate fi definit printr-un proces de limită, anume:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \dot{\bar{r}}$$

ceea ce se deduce imediat din (2.4) înlocuind pe v şi pe $\bar{t}$ prin expresiile lor.

14. Diferite expresii ale vectorului viteză. Avem:

a) Faţă de un sistem cartezian ortogonal $Oxyz$, definit prin vectorii unitate $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, viteza vectorială se exprimă prin relaţia (Anexa I, § 12):

$$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}$$

unde

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z}.$$

b) În coordonate sferice (r, θ, φ), avem (fig. 4):

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{\rho} + r\dot{\theta}\bar{\varepsilon} + r\dot{\varphi}\sin\theta \cdot \bar{\mu} \qquad (2.5)$$

unde $\bar{\rho}$ este vectorul unitate al razei vectoare $\bar{r}$; $\bar{\varepsilon}$, vectorul unitate perpendicular pe raza vectoare în planul MOz în sensul lui θ crescător; $\bar{\mu}$, vectorul unitate perpendicular pe planul MOz în sensul lui φ crescător şi formînd cu $\bar{\rho}$ şi $\bar{\varepsilon}$ un triedru drept ($\bar{\mu}$ este deci un vector paralel cu planul xOy). Observăm că în planul xOy, vectorul de poziţie $\bar{r}_1$ are valoarea $r_1 = r\sin\theta$.

Componentele datorite variaţiei lui φ, adică variaţiei planului MOz sînt:

pe axa y $\qquad -r_1\dot{\varphi}\sin\varphi = -r\sin\theta\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$

pe axa x $\qquad r_1\dot{\varphi}\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}$

aşadar, componenta pe direcţia $\bar{\mu}$ este:

$$r_1\dot{\varphi} = r\dot{\varphi}\sin\theta.$$

În planul MOz, componenta vitezei pe direcţia lui $\bar{\rho}$ este $\dot{r}$, ea are pe (x, y, z) proiecţiile:

$$\dot{r}\sin\theta\cos\varphi; \quad \dot{r}\sin\theta\sin\varphi; \quad \dot{r}\cos\theta;$$

componenta vitezei pe direcţia $\bar{\varepsilon} \perp \bar{\rho}$ este $r\,d\theta/dt = r\omega$; ea are pe (x, y, z) componentele

$$r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi; \quad r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi; \quad -r\dot{\theta}\sin\theta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Acest rezultat se verifică folosind expresiile cunoscute

$$x = r \sin\theta \cos\varphi; \quad y = r \sin\theta \sin\varphi; \quad z = r \cos\theta.$$

15. Cazuri particulare. Distingem următoarele cazuri particulare:

a) *Mişcarea plană* este caracterizată prin $\varphi = 0$. Viteza este dată de expresia:

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{\rho} + r\dot{\theta}\,\bar{\varepsilon}. \qquad (2.6)$$

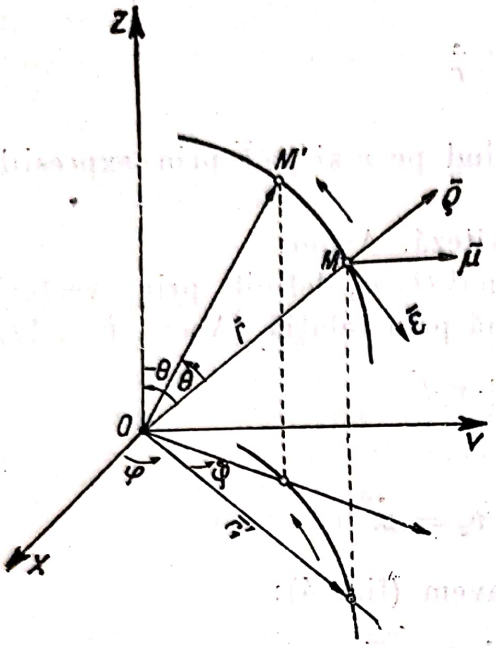

Fig. 4

b) *Mişcarea rectilinie* este caracterizată, în plan, prin $\dot{\theta} = \omega = 0$. Aşadar viteza este:

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{\rho}$$

în care $\bar{\rho}$ este vectorul unitar al dreptei pe care se efectuează mişcarea.

c) *Mişcarea circulară*, în plan, este definită prin condiţia $\dot{r} = 0$; deci $r = R = \text{const}$. Viteza pe cerc este, după (2.6):

$$\bar{v} = r\omega\bar{\varepsilon}$$

şi mereu tangentă la cerc. $\omega = \dot{\theta}$ se numeşte *viteză unghiulară*, avînd ca dimensiune inversul unui timp: $1/T$.

Fie T *perioada*, adică timpul în care mobilul parcurge tot cercul. Avem după definiţia vitezei, $TR\omega = 2\pi R$. Punînd:

$$2\pi R = T\nu, \qquad \text{rezultă} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

$\nu = 1/T$ se numeşte *frecvenţă* şi are dimensiunea $1/T$ ca şi viteza unghiulară.

Dacă ω şi deci ν este constant, mişcarea este circulară şi *uniformă*. În acest caz unghiul θ va fi dat de relaţia $\dot{\theta} = \omega_0$ deci $\theta = \omega_0 t + \theta_0$; el creşte liniar cu timpul.

Viteza în coordonate cilindrice (r, θ, z) este dată de expresia:

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{\rho} + r\omega\,\bar{\varepsilon} + \dot{z}\bar{k}. \qquad (2.7)$$

16. Viteză areolară. Fie un mobil M pe o traiectorie plană (fig. 5). Aria δA măturată de către vectorul de poziţie $\bar{r}$, cînd M ajunge în punctul vecin M', după timpul δt, satisface relaţiei:

aria $OMM_1 \leqslant$ aria $OMM' \leqslant$ aria OM'_1M';

adică, $\quad \frac{1}{2} r^2 \delta\theta \leqslant \delta A \leqslant \frac{1}{2}(\bar{r} + \delta\bar{r})^2\,\delta\theta,$

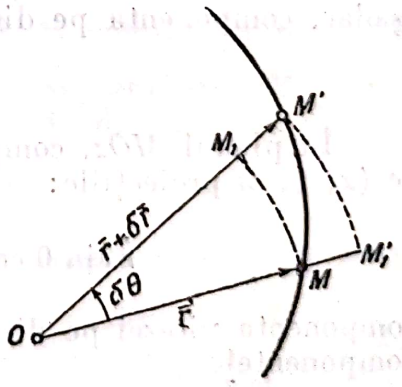

Fig. 5

și prin urmare, $\delta A = \frac{1}{2} r^2 \delta\theta$ + termeni de ordin superior în δr, $\delta\theta$.

Rezultă:

$$\frac{\delta A}{\delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\delta \theta}{\delta t} + \ldots,$$

sau, trecînd la limită:

$$\dot{A} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta A}{\delta t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} r^2 \omega.$$

Expresia

$$\Omega \equiv \dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \omega, \tag{2.8}$$

se numește *viteza areolară* a punctului M în raport cu polul O. În coordonate carteziene, expresia (2.8) se scrie

$$\Omega = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}). \tag{2.9}$$

punctul O fiind luat ca origine a axelor de coordonate.

Să considerăm un punct care se mișcă în spațiu. Proiectînd mișcarea pe un plan, considerat ca plan (x, y), putem defini viteza areolară prin relația (2.9). În mod analog, proiectînd mișcarea punctului pe celelalte plane de coordonate, vom putea defini, pentru aceste mișcări plane, viteze areolare deduse din (2.9) prin permutări circulare. Pentru cele trei plane de coordonate obținem, așadar, valorile vitezelor areolare respective:

$$\frac{1}{2}(y\dot{z} - z\dot{y}); \qquad \frac{1}{2}(z\dot{x} - x\dot{z}); \qquad \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Expresiile precedente sînt, față de sistemul de coordonate $Oxyz$ componentele vectorului (Anexa I, § 15):

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \bar{r} \times \bar{v} \tag{2.10}$$

unde $\bar{v} = \dot{\bar{r}}$, este viteza punctului mobil.

Expresia (2.10) poartă numele de *viteză areolară vectorială*.

Cazuri particulare. Dacă viteza areolară este constantă, planul $\bar{r} \times \bar{v}$ este fix. Cum $\bar{v}$ este tangent la traiectorie în fiecare punct al ei rezultă că, în acest caz, traiectoria va fi plană și anume, situată în planul format de vectorul de poziție inițială $\bar{r}_0$ și vectorul vitezei inițiale $\bar{v}_0$. Avem o mișcare plană.

Viteza areolară este nulă cînd viteza este mereu îndreptată de-a lungul vectorului de poziție $\bar{r}$ al mobilului; traiectoria este în acest caz rectilinie.

17. Mișcarea relativă. Cînd raportăm mișcarea la un sistem de referință în repaus absolut (așa cum am făcut pînă acum în cele ce preced), mișcarea se numește „absolută". În unele cazuri sîntem obligați însă să raportăm mișcarea la un sistem de coordonate *mobil*, care efectuează o

mișcare cunoscută față de sistemul de coordonate fix în spațiu. În acest caz mișcarea se numește *relativă* (fig. 6).

Fie $Oxyz$ un sistem de referință fix (în repaus) și $O'x'y'z'$ un sistem de referință mobil, care posedă față de primul o mișcare oarecare, dată, avînd ca vectori fundamentali $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Poziția unui mobil M față de sistemul variabil va fi dată de vectorul de poziție:

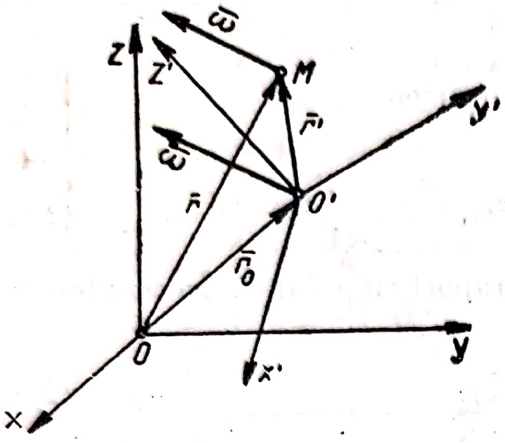

Fig. 6

$$\bar{r}' = x'\bar{i} + y'\bar{j} + z'\bar{k}. \qquad (2.11)$$

Însemnăm cu $\bar{r}$ vectorul poziție al punctului M și cu $\bar{r}_0$ vectorul de poziție al originei O' a sistemului mobil, față de sistemul fix O. Avem evident:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{r}'. \qquad (2.12)$$

Viteza absolută este viteza lui M față de sistemul fix, deci:

$$\bar{v}_{abs} = \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_0 + \dot{\bar{r}}'. \qquad (2.13)$$

Ținînd seamă de (2.11) și de faptul că sistemul O' se mișcă față de O, deci că vectorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sînt variabili ca poziție, avem:

$$\dot{\bar{r}}' = \dot{x}'\bar{i} + \dot{y}'\bar{j} + \dot{z}'\bar{k} + x'\dot{\bar{i}} + y'\dot{\bar{j}} + z'\dot{\bar{k}}. \qquad (2.14)$$

Expresia:

$$\bar{v}_{rel} = \dot{x}'\bar{i} + \dot{y}'\bar{j} + \dot{z}'\bar{k} = \frac{\partial \bar{r}'}{\partial t}$$

se numește *viteză relativă* și exprimă viteza lui M față de sistemul mobil, ca și cum acesta ar fi fix.

Ca să exprimăm în mod convenabil expresia rămasă din (2.14) procedăm ca la Anexa I, § 48.

Punînd,

$$\omega_x = \dot{\bar{j}}\,\bar{k}, \quad \omega_y = \dot{\bar{k}}\,\bar{i}, \quad \omega_z = \dot{\bar{i}}\,\bar{j},$$

obținem:

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega} \times \bar{i}, \quad \dot{\bar{j}} = \bar{\omega} \times \bar{j}, \quad \dot{\bar{k}} = \bar{\omega} \times \bar{k}. \qquad (2.15)$$

unde

$$\bar{\omega} = \omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k}.$$

Ținînd seamă de (2.14) și (2.15), expresia (2.13) devine:

$$\dot{\bar{r}} = \bar{v}_{abs} = \dot{\bar{r}}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}' + \frac{\partial \bar{r}'}{\partial t}. \qquad (2.16)$$

Expresia: $\bar{v}_{tr} = \dot{\bar{r}}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}'$ se numește *viteza de transport*.

Componenta $\bar{v}_0 = \dot{\bar{r}}_0$ se numește *viteza de translație* de-a lungul traiectoriei lui O' a întregului sistem mobil ale cărui axe rămîn paralele cu ele însile ($\omega = 0$, $\partial\bar{r}'/\partial t = 0$).

Să interpretăm componenta $\bar{w} = \bar{\omega} \times \bar{r}'$ (fig. 7). Ea reprezintă un vector perpendicular pe planul format de vectorii $\bar{\omega}$ ($\bar{\omega}_x$, ω_y, ω_z) și $\bar{r}'$ (x', y', z'). Să ducem prin originea O' o axă $\bar{\sigma}$ (vector unitate) paralel cu $\bar{\omega}$ și legat de sistemul mobil. Toate punctele acestei axe se bucură de proprietatea că, pentru ele, componenta $\bar{w}$ este identic nulă, căci, în acest caz, $\bar{\omega}$ și $\bar{r}'$ au aceeași direcție. Așa dar, admițînd pentru moment $\bar{v}_0 = 0$, adică O' fix, axul $\bar{\sigma}$ va rămîne nemișcat cînd sistemul mobil (x', y', z') se mișcă. Să considerăm punctele M legate de sistemul mobil ($\partial\bar{r}'/\partial t = 0$); deci $\bar{v} = \bar{w}$. Urmează că $\bar{w}$ reprezintă o mișcare de ansamblu a tuturor punctelor sistemului mobil O' în jurul axului fix $\bar{\sigma}$. Această mișcare este *o mișcare circulară* a tuturor punctelor M solidar legate de sistemul mobil, în jurul axului $\bar{\sigma}$ paralel cu $\bar{\omega}$ și trecînd prin poziția momentană a originii sistemului mobil O'.

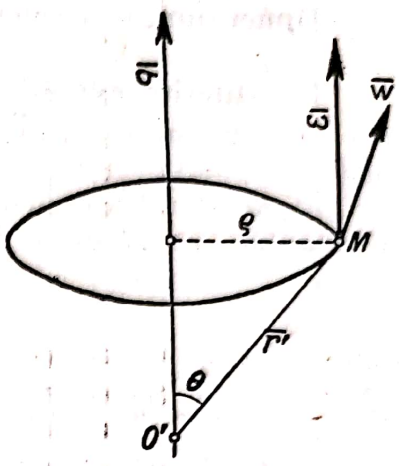

Fig. 7

Mărimea acestei mișcări circulare va fi dată de viteza unghiulară ω. În planul perpendicular pe $\bar{\omega}$ punctul M se mișcă cu viteza $\bar{w}$, a cărei valoare absolută este $\omega r' \cdot \sin\theta$; dar $r' \sin\theta = \rho$, dacă ρ este distanța lui M la axul $\bar{\sigma}$, θ fiind unghiul făcut de $\bar{r}'$ cu $\bar{\sigma}$. Așa dar, viteza $\bar{w}$ are valoarea $\rho\omega$.

În rezumat, avem o mișcare circulară pe cercul de rază ρ, cu viteza unghiulară ω în planul perpendicular pe $\bar{\sigma}$, în jurul axului care trece prin O' și paralel cu $\bar{\omega}$.

Prin urmare, mișcarea de transport se compune dintr-o translație de ansamblu a sistemului mobil $O'x'y'z'$ și o mișcare circulară în jurul axului care trece prin O'. De unde rezultă următoarea

Teoremă. Într-o mișcare relativă, viteza absolută este egală cu viteza de transport adunată cu viteza relativă; viteza relativă este viteza pe care o are punctul în sistemul mobil ca și cum acesta ar fi fix; viteza de transport este egală cu viteza de translație a sistemului mobil față de sistemul fix adunată cu viteza circulară în jurul unei axe trecînd prin poziția momentană a originii sistemului mobil:

$$\bar{v}_{abs} = \bar{v}_{transl} + \bar{v}_{circ} + \bar{v}_{rel}$$

unde:

$$\bar{v}_{transl} = \bar{v}_0; \quad \bar{v}_{circ} = \bar{\omega} \times \bar{r}' \quad \text{și} \quad \bar{v}_{rel} = \frac{\partial\bar{r}'}{\partial t}.$$

18. **Accelerația.** În cazul cînd viteza nu este constantă (ca modul, direcție, sau și una și cealaltă) ci variază cu timpul, mișcarea se numește accelerată. Variația vitezei dă măsura accelerației. Prin considerații ana-

litice analoge cu cele dezvoltate în studiul vitezei, sîntem conduşi să introducem sub denumirea de *acceleraţie* în momentul t vectorul:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}}. \tag{2.17}$$

Dimensiunile acceleraţiei sînt $[a] = \left[\frac{v}{T}\right] = \mathrm{LT}^{-2}$.

19. **Diferite expresii pentru acceleraţie.** a) Acceleraţia pe traiectorie este scalarul $a_t = \dot{v} = \ddot{s}$. Mişcarea uniformă pe traiectorie este dată de condiţia $a_t = 0$.

b) Acceleraţia exprimată analitic, relativ la un sistem de coordonate rectangular, va fi dată de:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$$

unde:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x};\quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y};\quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$$

c) *Acceleraţia descompusă după direcţia tangentei* $\bar{\mathrm{t}}$ *şi a normalei principale* $\bar{\mathrm{n}}$, *în fiecare punct* M *al curbei.*

Din expresia vitezei:

$$\bar{v} = v\bar{\mathrm{t}}$$

deducem, derivînd în raport cu timpul ($\bar{\mathrm{t}}$ este vectorul unitate al tangentei, iar scalarul t notează timpul):

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \dot{v}\,\bar{\mathrm{t}} + v\,\dot{\bar{\mathrm{t}}};$$

dar:

$$\frac{d\bar{\mathrm{t}}}{dt} = \frac{d\bar{\mathrm{t}}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{\bar{\mathrm{n}}}{\rho}v$$

după formulele lui Frénet (Anexa I, § 27). Cîtimea ρ este raza de curbură în punctul M. Rezultă:

$$\bar{a} = \dot{v}\bar{\mathrm{t}} + \frac{v^2}{\rho}\bar{\mathrm{n}}. \tag{2.18}$$

Aşadar, acceleraţia tangenţială este măsurată prin dv/dt, iar acceleraţia normală, situată în concavitatea curbei, prin v^2/ρ. Vectorul acceleraţiei este prin urmare, aşezat în planul osculator al traiectoriei, în punctul M (Anexa I, § 27).

d) *Acceleraţia în coordonate polare*, în plan, se obţine din expresia vitezei în coordonate polare în plan (2.6):

$$\bar{v} = \dot{r}\,\bar{\rho} + r\omega\,\bar{\varepsilon}$$

unde $\bar{\varepsilon} \perp \bar{\rho}$ (care are direcţia vectorului de poziţie), ţinînd seamă că:

$$\dot{\bar{\rho}} = \omega\,\bar{\varepsilon};\quad \dot{\bar{\varepsilon}} = -\omega\,\bar{\rho}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste relaţii se deduc imediat observînd că variaţia vectorului unitar $\bar{\rho}$ constă din rotaţia lui, în sensul lui θ crescător, cu cantitatea $\dot{\theta} = \omega$, în jurul originei O. Extremitatea lui $\bar{\rho}$ descrie atunci un cerc, iar $d\bar{\rho} \perp \bar{\rho}$. Vectorul unitar pe direcţia perpendiculară pe $\bar{\rho}$ fiind $\bar{\varepsilon}$, rezultă imediat $\dot{\bar{\rho}} = \theta\bar{\varepsilon}$. Pentru variaţia lui $\bar{\varepsilon}$ se observă că rotaţia lui se face în sensul lui $\theta + \frac{\pi}{2}$ crescător. De aceea $\dot{\bar{\varepsilon}} = -\omega\bar{\rho}$.

Prin derivarea lui $\bar{v}$ obţinem:

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\omega^2)\,\bar{\rho} + (2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})\,\bar{\varepsilon}. \tag{2.19}$$

e) *Acceleraţia în coordonate sferice.* Din expresia (2.5) a vitezei în coordonate sferice (r, θ, φ), derivînd în raport cu timpul şi observînd că:

$$\dot{\bar{\rho}} = \dot{\theta}\,\bar{\varepsilon} + \dot{\varphi}\sin\theta\cdot\bar{\mu};\quad \dot{\bar{\varepsilon}} = -\dot{\theta}\cdot\bar{\rho} + \dot{\varphi}\cos\theta\cdot\bar{\mu};$$

$$\dot{\bar{\mu}} = -\dot{\varphi}\sin\theta\cdot\bar{\rho} - \dot{\varphi}\cos\theta\cdot\bar{\varepsilon}.$$

se obţine:

$$\bar{a} = \bar{\rho}\,(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \bar{\varepsilon}\,(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta) +$$

$$+ \bar{\mu}\,\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}). \tag{2.20}$$

20. **Acceleraţia în mişcarea relativă.** Derivînd vectorul vitezei absolute (2.16), obţinem:

$$\ddot{\bar{r}} = \dot{\bar{v}}_0 + \frac{d}{dt}(\bar{\omega}\times\bar{r}') + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}'}{\partial t}\right). \tag{2.21}$$

1) $\dot{\bar{v}}_0 = a_0$; este acceleraţia originii sistemului mobil;

2) $\dot{\bar{w}} = \dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}' + \bar{\omega}\times\dot{\bar{r}}' = \dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}' + \bar{\omega}\times\left(\frac{\partial\bar{r}'}{\partial t} + \bar{\omega}\times\bar{r}'\right)$

căci după relaţia (2.14):

$$\dot{\bar{r}}' = \bar{v}_{rel} + \bar{v}_{rot}.$$

Al doilea termen din expresia (2,21) este egal cu:

$$\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}' + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}') + \bar{\omega}\times\frac{\partial\bar{r}'}{\partial t}.$$

3) După regula derivării absolute, (Anexa II, § 48), al treilea termen din (2.21) este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}'}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2\bar{r}'}{\partial t^2} + \bar{\omega}\times\frac{\partial\bar{r}'}{\partial t}.$$

Adunînd aceste trei expresii obţinem:

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{a} = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}' + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}') + 2\bar{\omega}\times\frac{\partial\bar{r}'}{\partial t} + \frac{\partial^2\bar{r}'}{\partial t^2} \tag{2.22}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde:

α) $\partial^2\bar{r}'/\partial t^2$ exprimă *acceleraţia relativă* a punctului M faţă de sistemul mobil, considerat ca fix.

β) $\dot{\bar{\omega}}$ este acceleraţia unghiulară, notată uneori cu $\bar{\varepsilon}$;

γ) $\bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')$ este *acceleraţia de transport.*

Termenul $\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}'$ este *acceleraţia circulară*; $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')$ este perpendicular pe $\bar{\omega}$ şi pe $\bar{w}$, deci aşezată de-a lungul lui $\bar{\rho}$; acest termen se numeşte *acceleraţia centripetă*; *acceleraţia de transport* este acceleraţia la care s-ar reduce valoarea acceleraţiei totale dacă nu am avea mişcare relativă, $\partial\bar{r}'/\partial t = 0$.

δ) $2\bar{\omega} \times \frac{\partial \bar{r}'}{\partial t}$ se numeşte *acceleraţia* lui Coriolis şi exprimă o interacţiune între viteza relativă $\partial\bar{r}'/\partial t$ şi viteza unghiulară $\bar{\omega}$; ea stă perpendicular pe axa momentană de rotaţie şi pe viteza relativă, în sensul crescător al unghiului de rotaţie instantanee.

21. **Mişcări particulare.** Considerăm următoarele cazuri particulare:
a) *Mişcarea rectilinie, uniform accelerată*, este mişcarea rectilinie pentru care acceleraţia este constantă. În acest caz, în formula (2.18):

$$\bar{a} = \dot{v}\bar{\mathbf{t}} + \frac{v^2}{\rho}\bar{\mathbf{n}}$$

ρ este infinit iar $\bar{\mathbf{t}}$ reprezintă vectorul unitar fix al dreptei pe care se efectuează mişcarea. Aşadar, $\bar{a} = \dot{v}\bar{\mathbf{t}} = \bar{c}$ (const), avînd direcţia lui $\bar{v}$. Condiţiile iniţiale sînt $(t = 0; \bar{v} = \bar{v}_0, \bar{r} = \bar{r}_0)$. Integrarea ecuaţiei astfel obţinute ne dă:

$$\dot{\bar{r}} = \bar{c}t + \bar{v}_0$$

unde vectorul constant $\bar{c}$ este egal cu acceleraţia. Urmează:

$$\bar{r} = \frac{1}{2}\bar{c}t^2 + \bar{v}_0 t + \bar{r}_0$$

lege pe care o vom regăsi în problema căderii corpurilor (v. § 54).

b) *Mişcarea circulară*, este dată de condiţia $\rho = R =$ const. Acceleraţia are o componentă de-a lungul razei cercului, *spre centru*, care se numeşte acceleraţia centripetă, şi o componentă tangenţială. Acceleraţia tangenţială este nulă cînd $\dot{v} = 0$, deci v este constantă pentru mişcarea uniformă pe cerc. Atunci:

$$\bar{a} = \frac{v^2}{R}\bar{\mathbf{n}}, \quad \text{sau} \quad \bar{a} = R\omega^2\bar{\mathbf{n}}$$

îndreptată spre centrul cercului.

c) *Acceleraţie centrală.* În cazul cînd viteza areolară este constantă în valoare şi direcţie, mişcarea este plană. Deci:

$$\frac{1}{2}r^2\omega = C \text{ (const)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivînd, obținem:

$$2\dot{r}\omega + r^2\dot{\omega} = 0, \quad \text{sau} \quad 2\dot{r}\omega + r\dot{\omega} = 0.$$

Atunci expresia acceleraţiei în plan (2.19) se reduce la

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\omega^2)\bar{\rho}.$$

Acceleraţia trece mereu prin punctul fix luat ca pol. Acceleraţia (mişcarea) se numeşte în acest caz „centrală".

Acest caz particular are mare importanţă în mişcarea planetelor în jurul soarelui, precum vom vedea mai tîrziu.

Capitolul III

PRINCIPIILE MECANICII

22. **Principiile mecanicii newtoniene.** Mecanica fiind primul capitol — capitolul fundamental — al *Fizicii teoretice*, constituie un „sistem teoretic". Obiectul mecanicii în toată generalitatea lui a fost, pentru prima oară, conceput şi formulat de către I s a a c N e w t o n care porneşte de la anumite „ipoteze fundamentale", extrase din experienţă. N e w t o n exprimă aceste ipoteze fundamentale sub formă de „principii" în cartea sa: „*Philosophiae naturalis principia mathematica*" (1687)[1]. Evident că un sistem teoretic este cu atît mai convenabil cu cît numărul ipotezelor fundamentale este mai mic, permiţînd astfel să deducem, prin metodele matematice adecvate, un maxim de rezultate şi prevederi, conforme cu experienţa, dintr-un minim de ipoteze speciale. Această cerinţă este pe deplin satisfăcută în mecanică. Numărul principiilor este extrem de redus. Este evident că principiile mecanicii, considerate ca ipoteze fundamentale într-un sistem teoretic, construit şi menit să lămurească un anumit grup de fenomene naturale, anume, *mişcarea corpurilor materiale*, trebuie să satisfacă unor anumite condiţii. În primul rînd să fie coherent ca sistem logic; apoi să nu fie în contrazicere cu datele experimentale cunoscute pînă acum. Evident că experienţe noi vor putea restrînge cîmpul de valabilitate a mecanicii, putînd chiar determina revizuirea însăşi a principiilor ei fundamentale. Acest fapt s-a întîmplat cînd s-au luat în consideraţie mişcări cu viteze comparabile cu viteza luminii, $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s, — ducînd la *Teoria Relativităţii*, care constituie un nou sistem teoretic. Aşa dar, prima restricţie este: *principiile Mecanicii newtoniene sînt valabile, în forma pe care le vom da mai jos, numai pentru mişcări cu viteze mici în comparaţie cu viteza luminii.* În al doilea rînd, principiile pot fi enunţate numai dacă se precizează sistemul de referinţă la care raportăm mişcarea. Admitem deci, după N e w t o n, aşa cum am clarificat în „Introducere", *existenţa unui spaţiu absolut*, în care putem alege un sistem de referinţă fix şi invariabil, de pildă sistemul C o p e r n i c (avînd originea în centrul de greutate al sistemului solar, iar cele trei axe îndreptate spre trei stele fixe); din punct de vedere matematic spaţiul va fi definit

[1]) Isaac Newton [1].

Scanned with OKEN Scanner

de metrica euclidiană, în trei dimensiuni. În al treilea rînd, trebuie să fixăm şi noţiunea de timp. Admitem după N e w t o n, *existenţa unui timp absolut independent de spaţiu*, pe care-l măsurăm, aşa cum am mai amintit în Introducere, luînd ca unitate secunda siderală. Trebuie adăogată şi observaţia că avem de-a face cu distanţe mari prin comparaţie cu distanţele nucleare (10^{-13}cm).

O dată precizate aceste condiţii, putem enunţa principiile fundamentale ale Mecanicii newtoniene.

23. **Principiul inerţiei.** Primul principiu al Mecanicii, cunoscut încă de la G a l i l e i, este principiul inerţiei. Acesta observă că „dacă un corp nu este nici tras, nici împins şi nu este supus nici unei acţiuni exterioare, el se va mişca rectiliniu şi uniform. Viteza nu indică aşa dar existenţa vreunei acţiuni (forţe) exterioare". N e w t o n formulează, în *Legea I*, riguros, acest principiu: „orice corp îşi păstrează la infinit starea lui de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă, dacă nu este constrîns să-şi modifice această stare de mişcare prin intervenţia vreunei forţe imprimate". Această *lege a inerţiei*, este deci rezultatul reflexiei speculative bazate pe observaţie şi experienţă. Ea nu este o lege experimentală, căci nu vom putea niciodată organiza o experienţă în care un corp material să poată fi complet izolat de orice acţiune exterioară şi să fie lăsat în starea lui iniţială de mişcare un timp infinit de lung, — dar ea exprimă adevărul fizic al imposibilităţii unei experienţe care să contrazică această lege. Prin termenul „corp" folosit de N e w t o n, înţelegem „punct material".

Observaţie. Principiul inerţiei este primul concept care leagă noţiunea de inerţie (stare interioară) cu noţiunea de forţă (acţiune exterioară).

24. **Forţe instantanee.** Sub „acţiuni imprimate, sau exterioare", N e w t o n înţelege *forţe ce se exercită instantaneu* între corpurile în prezenţă, fără intervenţia mediului înconjurător şi fără să necesite un timp finit de propagare. O astfel de acţiune este *gravitatea*. Or, este clar, că nu vom putea niciodată să izolăm un corp, în mişcarea lui, de acţiunea gravităţii, acţiune datorită corpurilor materiale înconjurătoare care, oricît de îndepărtate ar fi ele, vor perturba mişcarea corpului considerat. În acest sens este evident că principiul inerţiei nu poate fi conceput ca o lege experimentală, ci ca o ipoteză care nu poate fi contrazisă de nici un fapt experimental.

În *Definiţia IV*, N e w t o n (Phil. nat.) defineşte noţiunea de forţă prin acţiunea produsă: „Forţa imprimată este acţiunea exercitată asupra unui corp, pentru a-i schimba starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă".

25. **Consecinţa principiului inerţiei:** *mişcarea relativă*. Din principiul inerţiei rezultă că mişcarea rectilinie şi uniformă joacă în natură un rol privilegiat.

Să admitem un sistem de referinţă fix O şi un sistem de referinţă O' în mişcare rectilinie şi uniformă, cu viteza constantă $\bar{v}_0$, faţă de primul. Teorema compunerii vitezelor ne dă, pentru o astfel de mişcare:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_0 \tag{3.1}$$

adică, viteza unui punct în O ($\bar{v}_a$) se obţine din viteza punctului în O' ($\bar{v}_r$) căreia îi adunăm viteza constantă de translaţie $\bar{v}_0$ a sistemului O' faţă de O.

Scanned with OKEN Scanner

Să ne închipuim acum că sistemul O' ar fi fix și O s-ar mișca rectiliniu față de O' cu viteza constantă $-\bar{v}_0$. Atunci, din (3.1), rezultă:

$$\bar{v}_r = \bar{v}_a + (-\bar{v}_0);$$

ceea ce înseamnă că pentru observatorul din O' în repaus, viteza se obține adunînd la viteza $\bar{v}_a$ relativă la sistemul mobil, viteza constantă $-\bar{v}_0$ a sistemului O față de O'.

Așadar, pentru două sisteme O și O', care au unul față de celălalt o mișcare rectilinie și uniformă, viteza unui mobil oarecare într-unul dintre aceste două sisteme se obține adunînd vitezei mobilului în celălalt sistem viteza constantă de translație reciprocă a sistemelor.

Prin urmare, mecanic, cele două sisteme O și O' sînt perfect echivalente, nefiind posibil să găsim un criteriu spre a distinge pe unul de celălalt. Dacă principiul inerției este adevărat într-unul dintre aceste două sisteme, el va fi adevărat și în celălalt sistem. De aceea, sistemele de referință care se mișcă unele față de celelalte uniform și rectiliniu, se numesc *sisteme inerțiale*, sau, pentru motive pe care le vom vedea mai tîrziu, *sisteme galileiene*.

Această lege conduce la principiul relativității în Mecanica newtoniană, principiu pe care-l formulăm, exact, mai jos (§ 31).

26. **Principiul acțiunii forțelor.** Experiența ne arată că:

a) Dacă aplicăm unui punct material diferite forțe $\bar{F}, \bar{F}', \bar{F}''$, ... punctul capătă diferite accelerații $\bar{a}$, $\bar{a}'$, $\bar{a}''$,... care sînt coliniare cu forțele respective și între care au loc relațiile:

$$\frac{\bar{F}}{\bar{a}} = \frac{\bar{F}'}{\bar{a}'} = \frac{\bar{F}''}{\bar{a}''} = \ldots = m \tag{3.2}$$

m fiind un scalar caracteristic punctului material dat, invariabil la mișcare. Relația (3.2) exprimă proprietatea : „forțele au aceleași direcții și sensuri ca și accelerațiile".

b) Dacă aplicăm aceiași forță $\bar{F}$ asupra a două (sau mai multe) puncte materiale, ele vor căpăta accelerații diferite, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$,... care sînt coliniare cu forța respectivă și între care au loc relațiile:

$$\frac{\bar{F}}{\bar{a}_1} = m_1; \qquad \frac{\bar{F}}{\bar{a}_2} = m_2; \qquad \ldots \tag{3.3}$$

ceea ce exprimă proprietatea completatoare a proprietății (3.2): „valorile absolute ale accelerațiilor variază invers proporțional cu parametrii caracteristici m_1, m_2 ... ai fiecărui punct material". Diferite experiențe de laborator pun în evidență aceste proprietăți.

Unind relațiile (3.2) și (3.3) obținem relația fundamentală, care constituie legea Mecanicei newtoniene pentru punctul material:

$$m\bar{a} = \bar{F}, \tag{3.4}$$

sau, sub forma:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}, \tag{3.4'}$$

(deoarece $\bar{a} = \ddot{\bar{r}}$).

Scanned with OKEN Scanner

Parametrul m din relația (3.4) este un scalar *constant, esențial pozitiv*, care răspunde la proprietățile experimentale de masă ale corpului material, iar $\bar{F}$ este forța rezultantă, funcție continuă și uniformă de poziție și timp, eventual și de viteză.

Din ecuația (3.4) rezultă că forța are dimensiunea:

$$[F] = \mathrm{MLT}^{-2}$$

Unitate de forță, în sistemul CGS, este *dyna*.

Observații. 1. Necesitatea impusă prin reprezentarea fizică de a se afecta punctul cinematic (geometric + timp) cu parametrul masic m este designată de T. Levi-Civita[1]) drept „axioma substanțializării materiei". În felul acesta experiențele amintite în acest paragraf capătă un substrat fizic.

Este remarcabil de subliniat că relația (3.4) nu este o simplă identitate sau o relație de definiție, între mărimi fizice, ci o egalitate între mărimi de natură diferită pe care le leagă într-o lege care este forma corespunzătoare legii fundamentale a mecanicii newtoniene în cazul masei constante.

2. Ecuația newtoniană a mișcării (3.4) ne spune că dacă forța $\bar{F}$ tinde către zero, atunci și accelerația tinde către zero, viteza devenind constantă (sau nulă).

Principiul inerției extinde la natură această concluzie pur analitică, prin generalizarea conținutului ei, extrapolîndu-l la mișcarea reală a punctului material, în virtutea caracterului de continuitate a mișcării mecanice inerțiale: mișcarea rectilinie și uniformă se menține la infinit. Această afirmație a principiului inerției este mai bogată decît simpla deducere analitică de trecere la limită, cînd forța tinde către zero; ea arată caracterul de continuitate a fenomenului natural considerat (mișcarea rectilinie și uniformă a unui *punct* material).

27. **Principiul independenței acțiunii forțelor.** Acest principiu a fost prezentat de Newton (Phil. nat.) sub formă de corolarul I: „Un corp sub acțiunea a două forțe unite descrie diagonala unui paralelogram în același timp, în care ar descrie laturile sub acțiunile separate ale forțelor".

Aceasta este de fapt *legea paralelogramului*: forțele se adună ca vectorii și presupune independența acțiunilor forțelor, adică principiul suprapunerii fără interacțiune (v. anexa I, § 6). Așadar, din:

$$\bar{F}_1 = m\bar{a}_1; \quad \bar{F}_2 = m\bar{a}_2 \ldots$$

rezultă:

$$\bar{F} = m\bar{a};$$

unde:

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots$$

și:

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots$$

[1]) *T. Levi-Civita* („Some mathematical aspects of the new Mechanics", Bull. Am. Math. Soc, 1933).

28. **Impuls. Cantitate de mişcare.** În mecanica newtoniană numim *impuls* vectorul $\bar{p} = m\bar{v}$ a cărui valoare absolută mv este numită şi cantitate de mişcare, noţiune introdusă de N e w t o n (Phil. nat.) în definiţia II: „cantitatea de mişcare este măsura ei, născută din viteză şi din cantitatea de materie împreună“ înţelegînd prin aceasta „masa“. Termenul „cantitate de mişcare“ este părăsit din ce în ce mai mult, păstrîndu-se termenul de „impuls“, mai corespunzător caracterului vectorial al acestei mărimi.

29. **Legea fundamentală a mecanicii.** Această lege a fost formulată de N e w t o n (Phil. nat.) în *Legea II*: „Variaţia mişcării este proporţională cu forţa motoare imprimată şi este dirijată după linia dreaptă în lungul căreia este imprimată forţa“.

N e w t o n înţelege prin „mişcare“ ceea ce s-a numit „cantitate de mişcare“ în definiţia II.

În virtutea acestei legi, ecuaţia fundamentală a mecanicii se scrie:

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F} \tag{3.5}$$

deci: „derivata impulsului în raport cu timpul este egală cu rezultanta forţelor exterioare, imprimate, — în mişcarea *punctului material izolat*“.

Este clar că dacă masa m este considerată *constantă*, ecuaţiile (3.4) şi (3.5) sînt identice; acesta este motivul pentru care se obişnuieşte ca ecuaţia (3.4) să fie considerată drept ecuaţia fundamentală a mecanicii newtoniene. Nu trebuie pierdut însă din vedere că spiritul gîndirii newtoniene are un conţinut mult mai bogat, căci ecuaţia (3.5) este mult mai cuprinzătoare deoarece implică şi cazul maselor variabile, pe care de altfel îl vom trata în cele ce urmează.

Este interesant de observat că legea (3.5) stabileşte relaţia dintre „starea sistemului material“ (în speţă, punctul) şi „starea mediului înconjurător“ (cîmpul de forţe definit prin rezultanta $\bar{F}$). Această interacţiune dintre starea sistemului şi vecinătatea lui este fondul structural al ecuaţiei fundamentale newtoniene.

Încercările de a se *defini* una dintre cele trei mărimi care figurează în relaţia (3.5): m, $\bar{v}$, $\bar{F}$, cu ajutorul celorlalte prin însăşi relaţia (3.5), constituie evident o degradare a legii (3.5), o tautologie.

30. **Principiul reacţiunii.** Acest principiu a fost formulat de N e w t o n (Phil. nat.) prin *Legea III* sub forma: „Reacţiunea este totdeauna contrară şi egală cu acţiunea: sau, acţiunile reciproce a două corpuri sînt totdeauna egale şi dirijate în sensuri contrare“, — şi mai departe: „ceea ce apasă sau trage altceva, este apăsat sau tras cu aceeaşi putere de acel ceva“.

Deci, dacă un punct material M este solicitat de o forţă $\bar{F}$ care ia fiinţă de la un alt punct material M', atunci $\bar{F}$ este dirijată după dreapta MM'; iar punctul M' va fi la rîndul lui solicitat de o forţă $\bar{F}'$, care ia fiinţă în punctul M, astfel încît $\bar{F}' = -\bar{F}$.

31. **Principiul relativităţii.** Legea fundamentală a mecanicii (3.5) se bucură de o proprietate extrem de importantă: este invariantă la transformările galileiene ale sistemelor de referinţă.

Scanned with OKEN Scanner

Fie două sisteme galileiene: unul fix $Oxyz$ și al doilea $O'x'y'z'$ mobil față de primul, dar executînd o mișcare rectilinie și uniformă cu viteză constantă v_0.

Transformările de coordonate care permit trecerea de la un sistem la celălalt sînt date de realțiile:

$$\begin{aligned} x' &= x - v_{01}t + x_0 & \qquad x &= x' + v_{01}t + x_0' \\ y' &= y - v_{02}t + y_0 & \qquad y &= y' + v_{02}t + y_0' \\ z' &= z - v_{03}t + z_0 & \qquad z &= z' + v_{03}t + z_0' \\ t' &= t & \qquad t &= t' \end{aligned} \tag{3.6}$$

unde:

$$x_0,\ y_0,\ z_0 \qquad x_0',\ y_0',\ z_0'$$

sînt constante.

În adevăr, legea de transformare a vitezelor, pentru cazul particular al mișcării rectilinii uniforme, se reduce la $\bar{v}' = \bar{v} - \bar{v}_0$, ceea ce dă:

$$\dot{x}' = \dot{x} - v_{01}; \quad \dot{y}' = \dot{y} - v_{02}; \quad \dot{z}' = \dot{z} - v_{03}. \tag{3.7}$$

Transformările (3.6) ale axelor de coordonate carteziene, formînd sisteme inerțiale de referință, alcătuiesc *grupul de transformări galileian*. Proprietatea fundamentală a acestui grup este că el lasă invariantă legea fundamentală a mecanicii. În adevăr, din (3.7) rezultă, v_0 fiind constant:

$$\dot{\bar{v}}' = \dot{\bar{v}}; \qquad \text{deci,} \qquad \bar{a}' = \bar{a}.$$

înlocuind apoi în $\bar{F}(x, y, z, t)$ coordonatele, conform transformărilor (3.6) obținem o expresie:

$$\bar{F}'(x', y', z', t') = \bar{F}(x, y, z, t).$$

Atunci legea fundamentală (3.4) respectiv (3.5) se transformă în:

$$m\bar{a}' = \bar{F}',$$

respectiv:

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}') = \bar{F}'$$

m fiind scalarul invariant numit masă, deci neafectat de transformarea (3.6). Expresia precedentă demonstrează că: „legea fundamentală a Mecanicii newtoniene rămîne invariantă față de transformările galileiene (3.6)".

Această proprietate constituie *principiul relativității* în mecanica newtoniană. El poate fi exprimat și sub forma: „dacă legile mecanicii newtoniene sînt valabile într-un sistem de referință dat, ele vor fi valabile în orice sistem de referință care se mișcă uniform și rectiliniu față de primul".

Este necesar să precizăm că acest principiu implică următoarele condiții: 1) sistemele de referință sînt formate din bare rigide; 2) spațiul este euclidian și independent de timp; 3) timpul are aceiași măsură în toate sistemele.

În mecanica newtoniană alegem, pentru studiul mișcării, un sistem de referință fix în spațiul absolut, sistemul „astronomic" (§ 3), cu origina

Scanned with OKEN Scanner

în centrul soarelui (mai exact, în centrul de masă al sistemului solar). După considerațiile de mai sus rezultă că în spațiul absolut alegerea originei fixe nu este esențială, deoarece toate sistemele de referință, care se mișcă uniform și rectiliniu, păstrînd axele paralele cu ele însele, sînt egal îndreptățite. Conform principiului relativității nu există un sistem absolut, fix, privilegiat.

Ca exemplu de sistem de referință *neinerțial* să considerăm un sistem O_1 cu originea în O (sistemul fix inerțial) care se *rotește* cu viteza unghiulară constantă ω în jurul axei z' comună cu axa fixă z. Formulele de transformare a coordonatelor sînt:

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos\omega t + y\sin\omega t \\ y_1 &= -x\sin\omega t + y\cos\omega t \\ z_1 &= z. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Vitezele se obțin prin derivare în raport cu timpul:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega y_1 + \dot{x}\cos\omega t + \dot{y}\sin\omega t \\ \dot{y}_1 &= -\omega x_1 - \dot{x}\sin\omega t + \dot{y}\cos\omega t \\ \dot{z}_1 &= \dot{z} \end{aligned}$$

iar accelerațiile devin:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \omega^2 x_1 + 2\omega\dot{y}_1 \\ \ddot{y}_1 &= \omega^2 y_1 - 2\omega\dot{x}_1 \\ \ddot{z}_1 &= \ddot{z} = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

căci am admis că O este inerțial ($\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$). Ultima formulă arată că, în general $\ddot{x}_1 \neq 0$; $\ddot{y}_1 \neq 0$; — așadar, sistemul O_1 nu mai este inerțial, căci accelerațiile nu mai sînt nule în lipsa forțelor exterioare.

32. **Legături.** Cînd punctul material nu este supus nici unui fel de constrîngere, avînd libertatea să se miște numai sub acțiunea forțelor aplicate, după legea (3.5), punctul se numește *liber*. Există însă în natură și cazuri cînd punctul material este obligat, *constrîns*, să se miște pe o curbă sau pe o suprafață, supus fiind la „legături" exprimate prin „forțe de constrîngere". Aceste forțe au caracterul unor *reacțiuni*, care pot echilibra în parte, sau chiar complet forța reală aplicată punctului. Acestor forțe de reacțiune — legăturile — li se aplică, evident, principiul reacțiunii.

Ele sînt însă esențial deosebite de forțele reale aplicate, care există sub formă de cîmp vectorial exterior. În adevăr, forțele de legătură apar numai cînd începe și cît durează mișcarea (sau echilibrul).

33. **Impulsii.** Ecuația fundamentală a mecanicii (3.5):

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F}(x, y, z; t)$$

se poate integra între două momente t_0 și t_1. Se obține:

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}\,dt. \tag{3.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\delta(m\bar{v}) = \bar{F}\cdot\delta t\,;$$

adică, variația elementară a impulsului este egală cu impulsia forțelor exterioare.

Există în natură forțe foarte puternice care durează, în schimb, numai un interval de timp $t_1 - t_0$ foarte scurt, producînd totuși o variație finită a impulsului, și deci a vitezei, în cazul masei constante, conform ecuației (3.8). Vectorul *finit*:

$$\bar{P} = \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}\,dt$$

poartă numele de „vector de impulsie" și este cunoscut cînd se dă expresia forței $\bar{F}$.

În problemele de „mișcare impulsivă" forțele de mărime finită (ex. gravitatea etc.) sînt în general neglijabile față de impulsii.

34. **Legea de mișcare a punctului cu masă variabilă.** Principiile newtoniene sînt valabile și în cazul masei variabile dar ecuația de mișcare ia, aparent, o formă diferită de (3.5) prin faptul intervenției impulsului particulei captate sau emise de către corp. Pentru stabilirea acestei ecuații, aplicăm teorema impulsului la sistemul format din *corp și particulă*: variația elementară a impulsului total este egală cu impulsia forțelor exterioare. Să facem bilanțul impulsului făcînd distincția între cazul captării și al emisiei.

Fie un punct de masă variabilă m animat de viteza momentană absolută $\bar{v}$, în mișcare sub acțiunea forțelor exterioare de rezultantă $\bar{F}$, care primește o particulă de masă $\mu = \delta m \ll m$ sau pierde o particulă de masă $\mu = -\delta m$ foarte mică față de m ($\gg \mu$), avînd viteza absolută $\bar{u}$.

În cazul *captării*, impulsul după captare al sistemului corp plus particulă este $(m+\mu)(\bar{v}+\delta\bar{v})$ căci viteza $\bar{v}$ suferă o variație $\delta\bar{v}$; înainte de captare, impulsul sistemului se compunea din impulsul corpului $(m\bar{v})$ plus impulsul particulei $(\mu\bar{u})$. Așadar, variația impulsului prin captare este:

$$(m+\mu)(\bar{v}+\delta\bar{v}) - (m\bar{v} + \mu\bar{u}) = m\delta\bar{v} + \bar{v}\,\delta m - \delta m\bar{u} + \delta m\cdot\delta\bar{v}$$

sau neglijînd termenii de ordin superior de micime $(\delta m\cdot\delta\bar{v})$, obținem:

$$\delta(m\bar{v}) - \delta m\cdot\bar{u}. \tag{3.10}$$

Egalînd cu impulsia forțelor exterioare (§ 33), se obține ecuația lui I. V. Mescerski:

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F} + \frac{dm}{dt}\bar{u}. \tag{3.11}$$

În cazul *emisiei*, impulsul după emisie este $(m-\mu)(\bar{v}+\delta\bar{v}) + \mu\bar{u}$ iar înainte era $m\bar{v}$, așadar variația impulsului prin emisie este:

$$(m-\mu)(\bar{v}+\delta\bar{v}) + \mu\bar{u} - m\bar{v} = (m+\delta m)(\bar{v}+\delta\bar{v}) - \delta m\cdot\bar{u} - m\bar{v} = \delta(m\bar{v}) - \delta m\cdot\bar{u}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci de aceeaşi formă ca şi (3.10), ceea ce ne conduce tot la expresia (3.11) a legii de mişcare.

Deosebirea între captare şi emisie constă în legea de variaţie a masei, ceea ce conduce la expresii diferite pentru (3.11) în cele două cazuri.

Problema punctului cu masă variabilă îşi găseşte aplicaţia în multe chestiuni tehnice, în problema navigaţiei interplanetare (racheta), avioanele şi proiectilele cu reacţie, în unele chestiuni de astronomie (captare de meteoriţi, desfacere de particule în spaţiul cosmic) precum şi în unele chestiuni de fizică atomică (ecuaţia Gamov pentru emisia razelor alfa). La sfîrşitul cărţii expunem detaliat problema dinamicii corpului cu masă variabilă (§ 118 ş.u.).

35. **Lucrul mecanic. Putere.** O noţiune mecanică extrem de folositoare în studiul mişcării este noţiunea de *lucru mecanic* (muncă).

Fie un punct material M, care se mişcă din cauza acţiunii unei forţe $\bar{F}$, ce-l solicită, din M pînă în M' astfel încît $MM' = \delta\bar{s}$.

Numim *lucru mecanic elementar* produsul scalar (Anexa I, § 14):

$$\delta L = \bar{F}\delta\bar{s} = F\delta s \cos\left(\bar{F}, \overrightarrow{MM'}\right) \tag{3.12}$$

expresie, care se poate exprima astfel: lucrul mecanic elementar produs de forţa $\bar{F}$ asupra punctului material M este egal cu deplasarea elementară efectuată sub acţiunea forţei, înmulţită cu proiecţia forţei pe direcţia deplasării sau cu forţa înmulţită cu proiecţia deplasării pe direcţia forţei.

Dimensiunile lucrului mecanic sînt L^2MT^{-2}. Unitatea de măsură în sistemul CGS este *ergul* ($\varepsilon\rho\gamma o\nu$ = muncă), egal cu lucrul mecanic efectuat de o dynă pe un drum de 1 cm, avînd direcţia forţei.

Deseori se ia ca unitate 1 *joule* = 10^7 erg, în sistemul MKS. El este lucrul mecanic efectuat de o forţă de 1 newton pe un drum de 1 m avînd direcţia forţei. În adevăr;

$$1\,\text{N} = 10^5 \text{ dyne}; \quad 1\,\text{m} = 10^2\,\text{cm};$$

deci 1 joule = $10^5 \cdot 10^2 = 10^7$ ergi.

Lucrul necanic este pozitiv sau negativ; zicem că el este, în primul caz, *motor*, în al doilea caz, *rezistent*; el este nul cînd forţa este perpendiculară pe drum.

În cazul unei deplasări infinit de mici, $d\bar{s}$, executată în timpul dt, relaţia (3.12) se poate scrie:

$$dL = \bar{F}d\bar{s}$$

sau încă:

$$dL = \bar{F}\bar{v}dt. \tag{3.13}$$

Se obişnuieşte a se numi *putere* cîtimea $dL/dt = \bar{F}\bar{v}$.

Dimensiunea puterii este, evident, L^2MT^{-3}; iar unitatea de măsură în sistemul CGS este *erg pe secundă* (simbol erg/s); şi *watt*-ul (W) în sistemul MKS (1 W = 10^7 erg/s = 1 joule/s).

Observăm că expresia lucrului mecanic se supune regulii de adunare algebrică:

$$\delta L = \delta L_1 + \delta L_2 + \ldots + \delta L_n \quad (n = \text{finit})$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă avem un număr finit de termeni. Este remarcabil că legea de adunare scalară a lucrului mecanic corespunde regulii de adunare vectorială a forțelor. În adevăr, pentru aceiași deplasare $\delta\bar{s}$, avem:

$$\delta L = \delta L_1 + \delta L_2 + \ldots = (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots)\ \delta\bar{s} = \bar{F}\,\delta\bar{s}.$$

Dacă, sub influența forței variabile $\bar{F} = \bar{F}(\bar{r})$, mobilul execută o mișcare oarecare, finită, pe o curbă (C), atunci integrala curbilinie:

$$\int_{(C)} \bar{F}\, d\bar{s}$$

se numește *lucrul mecanic total* produs de forța $\bar{F}$.

36. **Funcția potențială.** Cînd forța derivă dintr-un potențial $\varphi = \varphi(\bar{r})$,

$$\bar{F} = \operatorname{grad}\varphi$$

avem, integrînd pe curba C:

$$L = \int_A^B \operatorname{grad}\varphi\, d\bar{s} = \int_A^B \frac{\partial\varphi}{\partial s}\, ds = \varphi_B - \varphi_A. \tag{3.14}$$

Funcția φ se numește *funcție de forță*, sau *funcție potențială* (Anexa II, § 37). În acest caz, relația (3.14) ne spune că lucrul mecanic total depinde numai de valoarea inițială și cea finală, fiind independent de drumul parcurs de punctul material.

Potențial neuniform. Dacă φ este o funcție *uniformă*, iar curba (C) *închisă* $(B = A)$, L devine nul. Integrala curbilinie (3.14) ne dă *circulația* de-a lungul curbei (Anexa II, § 38). Dacă însă funcția φ are determinări multiple pentru anumite curbe alese în domeniul considerat, atunci lucrul mecanic total corespunzător acelor traiectorii nu mai este independent de drum, căci plecînd din A cu o determinare φ_0 vom ajunge în B cu una sau alta din determinările multiple posibile. Pentru o curbă închisă, în acest caz, putem avea

$$\lim\,(\varphi_A - \varphi_B) \neq 0,$$

cînd $B \to A$.

37. **Energia cinetică.** Expresia *energiei cinetice* a unui punct material de masă m, care se mișcă avînd viteza v, este dată de scalarul [1]):

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2. \tag{3.15}$$

Dimensiunile și unitățile de măsură ale energiei cinetice sînt aceleași ca și ale lucrului mecanic. Putem exprima energia cinetică folosind impulsul $\bar{p} = m\bar{v}$ precum urmează:

$$E_c = \frac{1}{2m} p^2. \tag{3.16}$$

[1]) Denumirea de „forță vie" dată de Leibnitz cîtimii mv^2 este complet ieșită din uz.

Scanned with OKEN Scanner

38. **Observație asupra impulsului.** Cum $v = ds/dt$, urmează că expresia energiei cinetice este o formă pătratică omogenă, pozitiv definită, care este determinată de elementul fundamental ds^2 al metricei euclidiene în spațiul cu trei dimensiuni, în care au loc fenomenele mecanice pe care voim să le studiem. Din (3.15) rezultă că:

$$p = \frac{\partial E_c}{\partial v} \tag{3.17}$$

relația care se generalizează în Mecanica analitică pentru coordonate oarecare de poziție și de mișcare, într-un spațiu riemannian cu $3N$ coordonate, dacă N este numărul gradelor de libertate ale sistemului considerat. Prin această formulare analitică, noțiunea de impuls prezintă posibilități remarcabile de aplicație în teoriile clasice ale cuantificării.

39. **Teorema energiei.** Din ecuația fundamentală a mecanicii newtoniene (3.4'), pentru masă constantă:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}$$

deducem, înmulțind scalar cu $\dot{\bar{r}}$:

$$m\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}} = \bar{F}\dot{\bar{r}}$$

sau:

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \bar{F}\,d\bar{r}$$

sau încă:

$$dE_c = dL \tag{3.18}$$

însemnînd cu dL lucrul mecanic elementar datorit forței rezultante $\bar{F}$, care solicită punctul în timpul dt. Relația (3.18) exprimă

Teorema: Diferențiala energiei cinetice în intervalul de timp dt este egală cu lucrul mecanic elementar al forțelor care solicită punctul material în intervalul de timp considerat.

Prin integrare se obține

Teorema: Variația finită a energiei cinetice a unui punct material, într-un interval de timp dat, este egală cu lucrul mecanic total al forțelor aplicate punctului material, în intervalul de timp considerat. În adevăr, integrînd relația (3.18) între două puncte P_0 și P, ocupate de punctul material pe traiectoria lui, în momentele t_0 și t, obținem:

$$\int_{t_0}^{t} E_c dt = \int_{P_0}^{P} \bar{F}\,d\bar{r},$$

ceea ce devine:

$$E_c - E_{c_0} = L_{P_0P}. \tag{3.19}$$

40. **Energia potențială.** În cazul cînd forța derivă dintr-un potențial φ (§ 36), funcția de poziție:

$$E_p = -\varphi$$

Scanned with OKEN Scanner

poartă numele de *energie potențială* (Anexa II, § 35). Din relația (3.14) rezultă (v. Anexa II, § 39):

$$E_p = -\int_{P_0}^{P} dL + \text{const} = -L_{P_0P} + E_{p0} \tag{3.20}$$

41. **Principiul conservării energiei.** Din (3.19) și (3.20) urmează:

$$E_c + E_p = E_{c0} + E_{p0} \tag{3.21}$$

ecuație ce exprimă principiul universal valabil și fundamental în întreaga Fizică, anume *principiul conservării energiei*: energia totală, cinetică și potențială, a unui punct material *izolat* de orice alte acțiuni decît cele datorite forțelor care derivă dintr-un potențial, este constantă. Relația (3.21) se mai scrie:

$$E_c = -E_p + h \tag{3.22}$$

unde h este o constantă de integrare determinată de condițiile inițiale ($h = E_{c0} + E_{p0}$). Ea constituie *integrala energiei*. În acest caz spunem că avem un sistem de forțe *conservativ*: lucrul mecanic al forțelor este independent de drum. În caz contrar, sistemul este neconservativ.

42. **Exemple de forțe conservative.** a) *Cîmpul gravitații pămînteşti.* Pămîntul atrage orice corp material aşezat pe suprafața lui, cu o forță constantă $\bar{F} = m\bar{g}$, unde m este masa corpului, iar $\bar{g}$ accelerația greutății constantă (valoarea ei variind puțin cu latitudinea locului unde se face experiența), avînd direcția verticalei locului spre interiorul pămîntului.

Dacă alegem ca vector unitar pe verticala locului luată ca axă z, vectorul $\bar{k}$, de sens contrar cu $\bar{g}$ (deci spre „zenit"), atunci:

$$\bar{F} = -mg\bar{k}.$$

Punînd:

$$E_p = mgz + h_1$$

rezultă:

$$\bar{F} = -\operatorname{grad} E_p.$$

Relația (3.19) ne dă, în acest caz

$$E_c = -mgz + h$$

h fiind constantă de integrare.

b) Să luăm o forță funcție oarecare numai de z:

$$\bar{F} = \varphi(z)\,\bar{k}.$$

În acest caz:

$$dL = \bar{F}d\bar{r} = \varphi(z)\,\bar{k}\,d\bar{r} = \varphi(z)\,d(\bar{k}\,\bar{r}) = \varphi(z)\,dz,$$

căci $z = \bar{r}\,\bar{k}$. Aşadar:

$$E_p = -\int \varphi(z)\,dz.$$

Scanned with OKEN Scanner

Suprafețele potențiale (Anexa II, § 37) sînt planele paralele cu planul fix.

c) Legea atracției universale stabilită de N e w t o n are forma:

$$\bar{F} = - fMm \frac{\bar{r}}{r^3}$$

unde $\bar{r}$ reprezintă vectorul de poziție al unui punct mobil de masă m față de poziția fixă a corpului de masă M, iar f o constantă. În acest caz:

$$E_p = - fMm \frac{1}{r^3} + h.$$

d) Generalizînd forța newtoniană, putem lua o forță care trece printr-un punct fix (forță centrală), funcție numai de distanța mobilului la acest punct fix; deci de forma:

$$\bar{F} = \pm \varphi (r) \frac{\bar{r}}{r}.$$

În acest caz:

$$E_p = \mp \int \varphi (r) \frac{1}{r} \bar{r}\, d\bar{r}$$

sau încă:

$$E_p = \pm \int \varphi(r)\, dr = \psi (r)$$

iar:

$$\bar{F} = - \text{grad } E_p (r).$$

Suprafețele potențiale sînt sferele cu centrul în centrul corpului atractiv (sau repulsiv) aflător în punctul fix.

43. **Exemple de forțe neconservative.** Cîmpul de forțe neconservative nu este un cîmp de gradient (Anexa II, § 37) căci forța nu admite o funcție de forță. Această împrejurare are drept consecință analitică inexistența, în general, a unei integrale prime dedusă din ecuația energiei. Totuși, pentru forme speciale de forțe neconservative s-au putut obține integrale prime care să substituie integrala energiei și să se integreze complet mișcarea.

a) Exemplu caracteristic de forțe neconservative sînt forțele care apar în mișcările cu *frecare* sau cu rezistență în general, funcții de viteză.

Una dintre problemele importante, studiate în această ipoteză, este problema balistică tratată chiar de N e w t o n (pentru forțe de forma $av + bv^2$), d'A l e m b e r t ($a + bv^n$, $a + b \ln v$), iar în ultimul timp de J. L a n g e v i n care propune o expresie scoasă din date experimentale în acțiunile de artilerie din primul război mondial, de forma $apf\left(\frac{v}{\sqrt{T}}\right)$ unde a este o constantă, p presiunea, v viteza și T temperatura absolută, f fiind o funcție oarecare satisfăcînd anumite condiții de continuitate și uniformitate.

b) În scopul de a se explica unele fenomene astronomice incompatibile cu legea gravitației newtoniene, s-au propus diverse legi corective, neconservative de către G a u s s, W e b e r, A r m e l l i n i și alții.

Dăm ca exemplu: 1. Legea lui W e b e r [1])

$$\bar{F} = fmm' \frac{\bar{r}}{r^3}\left(1 - \frac{1}{c^2}\dot{r}^2 - \frac{2}{c^2} r\ddot{r}\right)$$

care nu admite o funcție de forță. Ea a fost propusă pentru calcularea înaintării periheliei planetei *Mercur*, fără să dea rezultate satisfăcătoare. Ecuațiile de mișcare se integrează complet găsindu-se integralele ariilor (§ 50) Nu se poate scrie integrala primă a energiei.

2. Al doilea exemplu este oferit de legea lui G. A r m e l l i n i [2])

$$fmm' \frac{r}{r^3}(1 + \varepsilon\dot{r})$$

propusă pentru explicarea existenței orbitelor circulare și a altor fenomene astronomice incompatibile cu legea fundamentală a lui N e w t o n.

c) Forme de legi neconservative construite convenabil se găsesc date ca exemplu în tratatul lui P. A p p e l l. Reproducem exemplul lui L e c o r n u.

Fie o forță ale cărei componente satisfac relațiile:

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{\partial F_z}{\partial z}\ ;\quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}\ ;\quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_z}{\partial y}\ . \quad (3.23)$$

Ecuațiile de mișcare se integrează prin cuadraturi. În adevăr, fie:

$$x + y + z = p;\quad x + \alpha y + \alpha^2 z = q;\quad x + \alpha^2 y + \alpha z = r;$$
$$F_x + F_y + F_z = P;\quad F_x + \alpha F_y + \alpha^2 F_z = Q;\quad F_x + \alpha^2 F_y + \alpha F_z = R,$$

unde α și α^2 sînt rădăcinile cubice complexe ale unității. Din condițiile (3.23) rezultă că P depinde numai de p, Q depinde numai de q și R depinde numai de r.

Așadar, ecuațiile de mișcare se reduc la:

$$m\ddot{p} = P;\quad m\ddot{q} = Q;\quad m\ddot{r} = R.$$

44. Sisteme de unități

Sistemul fizic (CGS)

1 kgf (greutate) $= 9{,}81 \cdot 10^5 \frac{g \cdot cm}{s^2} = 9{,}81 \cdot 10^5$ dyn

1 erg = 1 dyn·1 cm

1 J $= 10^7$ erg

1 kgm = 1 000 gf·100 cm $= 9{,}81 \cdot 10^5$ dyn·100 cm $= 9{,}81 \cdot 10^7$ erg = 9,81 J

1 W = 1 J s^{-1}

1 kW = 1 000 J $s^{-1} = \frac{1\ CP}{0{,}736} = 1{,}36$ CP

---

[1]) *Tisserand T.* IV p. 500. [30].

[2]) *G. Armellini* (Accademia dei Lincei, vol. XXVI, 1937 și Calendario del R. Osservatorio e Museo Astronomico di Roma (Monte Mario), vol. XVII, 1941, p. 79.

Scanned with OKEN Scanner

$$1\,g\,(masă) = \frac{1\,kgf}{1\,000}\,\frac{1}{g}\,\frac{s^2}{m}$$

Lucru mecanic (1) = 1 kgf·1 m = 1 kgm

Puterea (1) = 1 kgf·m·s^{-1}

$$1\,CP = 75\,\frac{kgm}{s} = 75 \cdot 1\,000 \cdot 100 \cdot 981\,\frac{erg}{s} = 0{,}736\,kW.$$

Importanța sistemului tehnic al inginerului G. Giorgi este relevată în electrodinamică, prin introducerea celei de-a patra unități: amperul (A).

Capitolul IV

DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

45. Considerații analitice asupra ecuației fundamentale a mecanicii. A studia și a descrie mișcarea unui punct material de masă constantă m, însemnează a exprima în fiecare moment poziția punctului ca funcție cunoscută de timp,

$$\bar{r} = \bar{r}\,(t);\ \text{adică}\ x = x\,(t),\quad y = y\,(t),\ z = z\,(t),$$

integrînd ecuația:

$$m\,\ddot{\bar{r}} = \bar{F}, \tag{4.1}$$

atunci cînd forța rezultantă este o funcție cunoscută de poziție și de timp (în general și de viteză).

Ecuația (4.1) reprezintă, de fapt, un sistem de trei ecuații diferențiale ordinare, simultane, de ordinul al doilea. Integrala generală a ecuației (4.1) va conține deci șase constante arbitrare.

Aceste constante introduse prin calcul, se determină, în fiecare problemă de mișcare, cu ajutorul unor anumite condiții fizice, anume, *condițiile inițiale* ale mișcării. Se dă, pentru momentul inițial $t = 0$:

a) poziția inițială $\bar{r}_0(C_1,\ C_2,\ C_3)$,

b) viteza inițială $\dot{\bar{r}}_0 = \bar{v}_0(C_4,\ C_5,\ C_6)$.

46. Observație privind „teorema de existență". Condițiile inițiale fiind date, ecuația de mișcare (4.1) reprezintă o singură mișcare; iar integrala generală $\bar{r} = \bar{r}\,(t, \bar{r}_0, \bar{v}_0)$ exprimă legea integrală a evoluției sistemului mecanic (mișcarea), în timp. Fiziceste, existența și unicitatea integralei care satisface condițiilor inițiale include *principiul cauzalității* (fenomenelor mecanice): Cunoscînd legea (ecuația diferențială) care stăpînește un fenomen mecanic și starea acestui fenomen într-un moment dat, putem deduce evoluția fenomenului în toate timpurile. Matematic, această condiție rezultă din *teorema de existență* pentru ecuațiile diferențiale a lui Cauchy [atîta vreme cît $\bar{F} = \bar{F}\,(\bar{r}, t)$ este o funcție regulată de variabile] în cazul cînd integrala unică determinată de condițiile inițiale nu prezintă singularități. Pentru puncte singulare este nevoie de condiții

suplimentare care să determine alegerea uneia dintre eventualele ramuri multiple ale soluției inițiale.

Prin urmare, problema analitică se rezumă la găsirea integralei generale a ecuației fundamentale (4.1).

47. **Integrala energiei.** Ecuația energiei (§ 41):

$$E_c = -E_p + h$$

ne dă:

$$v^2 = -\frac{2}{m} E_p(\bar{r}) + h'. \tag{4.2}$$

Această relație este o *integrală primă* a ecuației mișcării. Ea se numește „integrala energiei", iar h este constanta energiei. (Se numește o „integrală primă" a ecuației mișcării, o relație între $x, y, z, t, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ și *o singură* constantă arbitrară).

48. **Teorema impulsului.** Am numit impuls mărimea $\bar{p} = m\bar{v}$. Ecuația mișcării (4.1) se poate scrie:

$$\dot{\bar{p}} = \bar{F} \tag{4.3}$$

denumită „teorema impulsului": derivata impulsului în raport cu timpul este egală cu rezultanta forțelor aplicate.

49. **Teorema momentului cinetic.** Se numește *moment cinetic*, momentul impulsului $\bar{p} = m\bar{v}$ în raport cu un punct dat, sau în raport cu o axă dată (Anexa I, § 18):

$$\bar{K} = \bar{r} \times \bar{p}.$$

Înmulțind vectorial ambii membri ai ecuației mișcării (4.3) cu $\bar{r}$, (vectorul de poziție al punctului unde se află mobilul), obținem:

$$\bar{r} \times \dot{\bar{p}} = \bar{r} \times \bar{F}.$$

Observăm însă că:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times \bar{p}) = \dot{\bar{r}} \times \bar{p} + \bar{r} \times \dot{\bar{p}};$$

dar:

$$\dot{\bar{r}} \times \bar{p} = \dot{\bar{r}} \times m\dot{\bar{r}} = 0;$$

așadar putem scrie

$$\dot{\bar{K}} \equiv \frac{d}{dt}(\bar{r} \times \bar{p}) = \bar{r} \times \bar{F}. \tag{4.4}$$

Teoremă. Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic în raport cu un punct (luat ca pol) este egală cu momentul rezultantei forțelor aplicate, în raport cu același punct.

Extinderea teoremei la cazul cînd momentul este luat în raport cu un ax fix este evidentă. Nu avem decît să înmulțim scalar ecuația (4.4) cu vectorul constant unitar $\bar{\sigma}$ al axului; obținem:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times \bar{p})\,\bar{\sigma} = (\bar{r} \times \bar{F})\,\bar{\sigma}. \tag{4.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

50. **Integrala ariilor.** Teorema momentului cinetic este folositoare în anumite cazuri de mișcare, în special atunci cînd rezultanta forțelor care solicită punctul material are direcții particulare.

a) Forță paralelă, sau concurentă cu un ax fix $\bar{\sigma}$. În acest caz

$$(\bar{r} \times \bar{F})\,\bar{\sigma} = \bar{r}\,(\bar{F} \times \bar{\sigma}) = 0,$$

și deci

$$\frac{d}{dt}\,(\bar{r} \times \bar{p})\,\bar{\sigma} = 0,$$

de unde rezultă

$$(\bar{r} \times \bar{p})\,\bar{\sigma} = \text{const.} \tag{4.6}$$

Pe de altă parte am văzut că viteza areolară era exprimată prin relația (2.10) § 16

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2}\,\bar{r} \times \bar{v}.$$

Rezultă

$$\frac{m}{2}\,(\bar{r} \times \bar{v})\,\bar{\sigma} = m\,\bar{\Omega}\,\bar{\sigma} = \frac{1}{2}\,(\bar{r} \times \bar{p})\,\bar{\sigma} = \text{const.} \tag{4.7}$$

Așa dar, proiecția vitezei areolare (înmulțită cu masa), pe direcția fixă $\bar{\sigma}$ a axului considerat este constantă. Relația (4.6) respectiv (4.7) constituie o integrală primă a ecuației mișcării. Această integrală primă poartă numele de „integrala ariilor" pentru mișcarea proiectată pe un plan fix perpendicular pe vectorul unitar fix $\bar{\sigma}$.

b) Forța este centrală (trece mereu printr-un punct fix O). Atunci, evident, $\bar{r} \times \bar{F} = 0$, și deci:

$$\frac{d}{dt}\,(\bar{r} \times \bar{p}) = 0$$

de unde

$$\bar{r} \times \bar{p} = \bar{K}_0 \text{ (constant)} \tag{4.8}$$

adică, momentul cinetic în raport cu punctul fix, luat ca pol, rămîne constant. Și această expresie (4.8) constituie o integrală primă, similară integralei ariilor, căci din (4.8) rezultă $\dot{\bar{A}} = \text{const.}$

c) Dacă constanta din (4.8) este diferită de zero, atunci înmulțind (4.8) scalar cu $\bar{r}$, rezultă:

$$\bar{r}\,(\bar{r} \times \bar{p}) = 0$$

ceea ce înseamnă că vectorul de poziție $\bar{r}$ se deplasează în timpul mișcării astfel încît rămîne mereu perpendicular pe vectorul fix $\bar{K}_0 = \bar{r}_0 \times \bar{p}_0$. Traiectoria este atunci plană. Mișcarea are loc în planul perpendicular pe vectorul fix $\bar{K}_0$ adică în planul făcut de $\bar{r}_0$ și $\bar{p}_0$ (valorile inițiale), căci $\bar{K} = \bar{K}_0 = \bar{r}_0 \times \bar{p}_0$.

d) Dacă $\bar{r}_0 \times \bar{p}_0 = 0$, rezultă (excluzînd cazurile banale $\bar{r} = 0$ sau $\bar{p} = 0$) că $\bar{p}$ are aceeaşi direcţie cu $\bar{r}$, deci că putem exprima vectorul impuls printr-o relaţie de forma $\bar{p} = \alpha \bar{r}$. Dar atunci urmează $(\bar{p} = m\bar{v} = m\dot{\bar{r}})$:

$$m \frac{d\bar{r}}{dt} = \alpha \bar{r},$$

de unde:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 \, e^{\int_0^t \frac{\alpha}{m} dt},$$

aşa dar $\bar{r}$ va rămîne mereu paralel cu vectorul de poziţie iniţial $\bar{r}_0$. Mişcarea va fi în acest caz, rectilinie.

Un caz interesant de traiectorie plană este tratat în § 73.

51. **Condiţiile de echilibru ale unui punct material liber.** Ştim că dacă punctul material, în mişcarea ce-i este imprimată de forţa (rezultanta) $\bar{R}$, nu este constrîns să se găsească mereu pe o curbă sau suprafaţă fixă, dată dinainte, punctul se mişcă *liber*.

Condiţia necesară şi suficientă a echilibrului, adică a stării de repaos, este ca sistemul de forţe aplicate să fie echivalent cu un sistem identic nul (Anexa 1, § 22). Aşadar:

$$\bar{R} = 0; \quad \bar{M}_p = 0$$

ceea ce înseamnă că invariantul scalar este nul:

$$I = \bar{M}_p \, \bar{R} \equiv 0.$$

Punctul material, prin definiţie, nu posedă rotaţii în jurul unei axe ce trece prin el însuşi, iar mişcările lui în jurul unei axe sau punct (rotaţii) sînt în realitate translaţii circulare de-a lungul traiectoriilor care înconjoară axul sau punctul fix. Aşadar condiţia necesară şi suficientă de echilibru a punctului liber este:

$$\bar{R}(x, y, z) = 0. \tag{4.9}$$

Dacă lăsăm punctul material, fără viteză iniţială, într-o poziţie oarecare în cîmpul de forţe, pentru care $\sum_i \bar{F}_i = \bar{R} = 0$, el va rămîne în repaos în toate timpurile.

Această condiţie rezultă formal şi din ecuaţia de mişcare.

52. **Caz particular important.** $\bar{R} = \text{grad}\, \varphi(P)$. Există o funcţie de forţă $\varphi = \varphi(P)$, sistemul fiind conservativ.

Teoremă. Fie P_0 un punct dat. Pentru ca P_0 să fie o poziţie de echilibru, este *suficient* (dar *nu* necesar) ca $\varphi(P)$ să aibă un extremum în P_0.

Dacă $\varphi(P)$ prezintă un extremum în P_0, atunci această funcţie este:

Or maximă în P_0, adică pentru orice punct P infinit vecin de P_0 avem:

$$\varphi(P_0) \geqslant \varphi(P). \tag{4.10}$$

Or, minimă în P_0, adică pentru orice punct P infinit vecin de P_0, avem:

$$\varphi(P_0) \leqslant \varphi(P). \tag{4.11}$$

Fie două puncte P_1 și P_2 infinit vecine (fig. 8) de P_0 luate pe aceeași direcție s trecînd prin P_0 de o parte și alta a lui P_0. Prin definiție avem, atît în cazul (4.10) cît și în cazul (4.11):

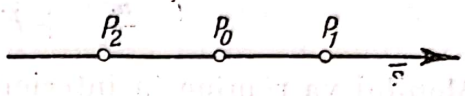

Fig. 8

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{P_0} = \lim_{\to P_0 P_1} \frac{\varphi(P_1) - \varphi(P_0)}{\overline{P_0 P_1}} = \lim_{P_2 \to P_0} \frac{-\varphi(P_2)\ \varphi(P_0)}{\overline{P_2 P_0}}$$

Dacă condițiile (4.10) și (4.11) sînt satisfăcute, numitorii au același semn, iar numărătorii au semne contrarii, sau sînt nuli. Rezultă că $\frac{d\varphi}{ds}$ neputînd fi totodată pozitivă și negativă, va fi nulă; așadar (Anexa *I*, § 37)

$$\text{grad}\ \varphi_{P0} = 0, \tag{4.12}$$

ceea ce exprimă relația de condiție (4.9). Condițiile (4.10) și (4.11) sînt, prin urmare, suficiente. Ele nu sînt necesare cum este în cazul punctelor de inflexie. Presupunem că P_0 este un extremum *izolat*. Înconjurăm punctul P_0 cu o sferă de rază ρ foarte mică. Pentru toate punctele P de pe această sferă grad $\varphi_P \neq 0$, iar în P_0 avem grad $\varphi_{P0} = 0$. Ceea ce putem afirma este numai că există puncte P pe sferă, astfel încît $\varphi(P)$ să fie mai mare decît $\varphi(P_0)$; dar că pot exista și puncte P' pe sferă, astfel încît, în același timp, $\varphi(P')$ să fie mai mic decît $\varphi(P_0)$. De aici urmează că, în același timp, pentru unele direcții ce trec prin P_0, $\varphi(P_0)$ să prezinte un maximum, iar pentru altele să prezinte un minimum, ceea ce nu este admisibil.

53. **Teorema lui Lejeune-Dirichlet.** Dacă $\varphi(P_0)$ este un maxim propriu-zis, adică $\varphi(P_0) > \varphi(P)$ (egalitatea fiind exclusă) atunci P_0 este un punct de echilibru *stabil*. Aceasta înseamnă, după F. K l e i n, că, dacă îndepărtăm extrem de puțin mobilul din poziția P_0 și dacă-i aplicăm o viteză extrem de mică, el nu va putea părăsi o regiune infinit vecină punctului P_0.

Se obișnuiește, pentru ușurință, ca în locul funcției de forță $\varphi(P)$ să se considere energia potențială $E_p = -\varphi$. Atunci teorema se exprimă astfel: în punctul P_0, unde energia potențială prezintă un minim propriu zis mobilul posedă o poziție de echilibru stabil.

Putem lua acest minim egal cu zero, căci putem aduna valorii lui $E_p(P_0)$ o constantă h_0 aleasă așa încît $E_p(P_0) + h_0 = 0$.

Să alegem atunci o sferă (σ) de rază ε infinit de mică, cu centrul în P_0, cu care înconjurăm punctul P_0 astfel încît pe suprafața și în interiorul acestei sfere $E_p(P)$ să fie mereu pozitivă, iar în centru $E_p(P_0) = 0$. Fie μ cea mai mică valoare pe care o ia $E_p(P)$ pe sferă. Atunci $\mu > 0$. Funcția potențială $E_p(P)$ este continuă și se anulează în P_0. Vom putea găsi o sferă (σ') de rază $\rho = \varepsilon' < \varepsilon$, interioară lui (σ) pe care funcția $E_p(P)$ să aibă o valoare minimă $\mu' < \frac{\mu}{2}$. Să așezăm mobilul într-un punct P' interior lui (σ')

și să-i imprimăm o viteză $v < u$ astfel încît $m\frac{u^2}{2} = \frac{\mu}{2}$. Mișcarea mobilului trebuind să satisfacă ecuației energiei $E_c + E_p = h$, vom avea, în interiorul lui (σ),

$$\frac{mv^2}{2} + E_p(P') = h < \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} = \mu.$$

Mobilul va rămîne în interiorul sferei (σ'), arcul de curbă descris de mobil va fi cel mult egal cu $\varepsilon' < \varepsilon$, căci în caz contrar, mobilul ieșind din sfera (σ') poate ajunge pe sfera (σ). Dar, în acest moment $E_p > \mu$ și energia totală $\frac{mv^2}{2} + E_p = h'$ mai mare ca μ (deci $h' > h$), ceea ce nu este posibil, constanta energiei fiind evident aceeași pentru toată mișcarea; mobilul își va micșora viteza pînă ce h' se egalează cu h.

Așadar, aplicînd punctului o deplasare suficient de mică de viteză u el va rămîne la o depărtare de poziția inițială P_0, mai mică decît $\varepsilon \to 0$.

Or, această condiție exprimă proprietatea echilibrului stabil.

Reciproca teoremei precedente este probabil să fie adevărată: dacă, într-un punct de echilibru izolat, avem grad $E_p = 0$, fără ca E_p să fie minimă, echilibrul corespunzător este nestabil. Teorema nu este demonstrată în toată generalitatea ei. Se poate arăta chiar că, în anumite cazuri particulare, un punct de echilibru neizolat poate fi poziție de echilibru stabil, fără ca energia potențială E_p să prezinte, în acest punct, un minim.

În cazul cînd P_0 este un punct de maximum propriu-zis pentru $E_p(P)$, atunci printr-un raționament similar cazului precedent, concludem că mobilul trebuie să-și mărească viteza cînd se depărtează de P_0; acest punct este deci un punct de echilibru *nestabil*.

După L i a p u n o v, teorema lui D i r i c h l e t se poate inversa, într-o *anumită* condiție dată: „dacă starea de echilibru corespunde numai la o valoare *staționară* a potențialului E_p, care *nu* este maximă și dacă — cum se petrece în cazurile comune — absența maximului se poate recunoaște din examinarea valorilor numerice locale ale derivatelor de ordinul doi, — echilibrul este *instabil*.

După L e v i - C i v i t a: „instabilitatea constituie regula, pe cînd stabilitatea este mai curînd o excepție".

Dacă nu avem o funcție de forță, pozițiile de echilibru se recunosc după proprietatea de definiție. Imprimăm mobilului o deplasare extrem de mică din poziția de echilibru, aplicîndu-i o viteză foarte mică. Dacă mobilul revine în poziția inițială, după un timp extrem de mic, avem echilibru stabil. Dacă mobilul se depărtează mereu din poziția de echilibru, avem echilibru nestabil. Dacă punctul rămîne în echilibru, în orice poziție l-am așeza, avem echilibru *indiferent*. (Exemple în Cap. VI).

Capitolul V

CAZURI SPECIALE DE MIȘCARE A PUNCTULUI MATERIAL LIBER

Vom studia, în cele ce urmează, cîteva cazuri importante de mișcare a unui punct material liber, mișcări care joacă roluri însemnate în natură. Alegem, așa dar, mișcări care constituie legi fizice simple pentru anumite fenomene naturale. Studiul acestor mișcări, și deducerea legilor fizice care

Scanned with OKEN Scanner

le stăpînesc, se face cu ajutorul noțiunilor fundamentale pe care le-am dezvoltat pînă acum.

54. **Legea căderii corpurilor în vid.** a) *La suprafața pămîntului.* Una dintre cele mai vechi observații cunoscută încă din antichitate este constatarea fenomenului fizic de cădere a corpurilor, lăsate liber, la suprafața pămîntului. Pentru observatorii din vechime acest fenomen apărea foarte complicat, căci există corpuri care cad mai repede și altele care cad mai încet, ba chiar, există unele corpuri, care în loc să cadă se ridică în sus. De aceea cugetătorii antichității (A r i s t o t e l) împărțeau, în mod naiv, corpurile în „materiale", adică cele care cad spre pămînt, și „spirituale" (între care era și focul), care se urcă spre cer. De-abia în 1638 G a l i l e o G a l i l e i a izbutit să recunoască în această mișcare, proprietatea generală a corpurilor *grele*. Mișcarea acestor corpuri puteau să redea fondul, esențialul, fenomenului desfăcut de complicațiile ce intervin în căderea corpurilor ușoare, prin intrarea în acțiune a rezistenței aerului. G a l i l e i întrebîndu-se *cum* cad corpurile, a căutat, și a reușit, să stabilească o lege fizică a acestui fenomen natural. El a procedat prin observație și inducție științifică. A încercat mai întîi să verifice experimental ipoteza că viteza corpurilor în cădere ar fi proporțională cu spațiile parcurse. Verificarea prin experiență a infirmat această lege ipotetică. A încercat apoi legea proporționalității vitezei cu timpul. Experiența a confirmat această lege: $v = \alpha t$, traiectoria fiind linia dreaptă verticală.

G a l i l e i nu s-a întrebat *de ce* există o astfel de lege. Formula găsită de el este o lege *integrală*, care nu este dedusă din studiul mecanic bazat pe *cauza* mișcării. Această metodă a fost întrebuințată mai tîrziu de N e w t o n, pe baza „principiilor" admise de el ca fundament al Mecanicii. Prin scrierea ecuației generale a Mecanicii și în urma descoperirei legii gravitații, N e w t o n rezolvă problema *cauzei* mișcărilor mecanice.

După N e w t o n, toate corpurile materiale de pe suprafața pămîntului sînt atrase spre pămînt, pe verticala locului unde se găsește mobilul, cu o accelerație constantă $\bar{g}$ (care variază cu latitudinea locului și altitudinea), efectuînd o mișcare uniform accelerată. Numim g accelerația *greutății* fiindcă, precum vom vedea mai tîrziu, greutatea este rezultanta atracției (gravității) și rotației pămîntului (forța centrifugă).

Pentru 45° (latitudinea noastră), accelerația greutății este $g = 980{,}635$ cm/s². S-a introdus denumirea de „*gal*", (de la G a l i l e i) pentru unitatea absolută a greutății, anume: 1 cm/1 s².

Noi vom deduce legea integrală a căderii corpurilor grele din ecuația mecanicii:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}, \tag{5.1}$$

unde luăm ca direcție a traiectoriei verticala locului. Luăm această direcție ca axă z avînd vectorul unitar $\bar{k}$, în sensul opus greutății (verticală în sus). Forța $\bar{F}$, acționînd spre interiorul pămîntului, are același sens cu $\bar{k}$, fiind tot verticală. Deci, mișcarea va fi dată de:

$$\ddot{z} = -g;$$

de unde, integrînd:

$$\dot{z} = v = -gt + v_0$$

unde v_0 este viteza inițială; apoi:

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + z_0$$

unde z_0 este poziția inițială. Mișcarea este așa dar uniform accelerată, pe axa z.

Integrala energiei. Putem integra complet ecuația (5.1) aplicînd integrala energiei, care constituie o integrală primă.

Integrala primă a energiei ne dă:

$$v^2 = -\frac{2}{m} E_p + h'.$$

În cazul nostru avem ($E_p = mgz$ și $h' = v_0^2$ căci $E_p = 0$ pentru $z = 0$):

$$v^2 = v_0^2 - 2gz;$$

de unde:

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2gz}. \tag{5.2}$$

Această lege se verifică cantitativ prin diferite experiențe de laborator.

Mișcarea verticală ascendentă. Fie corpul svîrlit vertical, de jos în sus, cu viteza $v_0 > 0$. El va merge în sus cu viteza $v > 0$, deci luăm semnul $+$ înaintea radicalului (5.2); cînd $z = \frac{v_0^2}{2g}$ viteza se anulează; corpul se oprește și pornește spre pămînt cu viteza $v < 0$; luăm semnul $(-)$ în fața radicalului.

b) *Căderea liberă de la distanță mare a meteoriților pe suprafața pămîntului.* În acest caz, nu mai putem considera forța de atracție drept constantă, ci trebuie s-o înlocuim cu forța gravitațională a lui Newton asupra căreia vom reveni mai tîrziu (§ 78):

$$m\ddot{\bar{r}} = -f \frac{mM}{r^3} \bar{r}$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziție a punctului, cu originea în centrul pămîntului în sens ascendent, f constanta gravitațională (§ 78), m masa corpului care cade (atras) și M masa pămîntului. Neglijînd rezistența aerului, la suprafața pămîntului accelerația greutății g este dată de relația:

$$g = f \frac{M}{a^2}$$

unde a este raza medie a pămîntului considerat ca sferic. Cu această substituție ecuația de mișcare devine:

$$\ddot{\bar{r}} = -g \frac{a^2}{r^2} \frac{\bar{r}}{r}.$$

Considerînd energia potențială:

$$E_p(r) = -mg \frac{a^2}{r}$$

Scanned with OKEN Scanner

ecuația precedentă admite integrala primă a energiei:

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{mga^2}{r} = h = -\frac{mga^2}{R}$$

unde h este constanta energiei și R distanța poziției inițiale pînă la centrul pămîntului, viteza inițială fiind nulă. Din ecuația energiei se obține viteza:

$$v = \dot{r} = a\sqrt{2g}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}$$

timpul fiind dat de ecuația:

$$t = \frac{1}{a\sqrt{2g}} \int_R^a \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}}.$$

Distingem două cazuri particulare interesante:

$$R = \infty \text{ și } R = a + \rho, \text{ unde } \rho \ll a.$$

În primul caz, viteza cu care meteoritul ajunge pe pămînt este $v = \sqrt{2ga}$; deci, căderea liberă de la foarte mare distanță în cîmpul gravitațional se efectuează ca și în cazul căderii la suprafața pămîntului cu accelerația gravitației constantă g de la distanța a.

În cazul al doilea avem, în condițiile fixate:

$$v = \dot{r} \equiv \sqrt{2ga}\sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{\rho}{a}}} = \sqrt{2g\rho}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\rho}{a} + \ldots\right)$$

putînd considera termenul $\frac{1}{2}\frac{\rho}{a}$ drept o corecție a vitezei de cădere a meteoritului de la înălțime nu prea mare, datorită descreșterii accelerației gravitației.

55. **Experiențe** (fig. 9).

a) O placă de metal AB are pe ea o față care poate înregistra dungile de cerneală aruncate de vîrful C care se rotește cu mișcare de rotație avînd un număr fix, cunoscut, de rotații pe secundă, n/s. Acest depozit de cerneală C este învîrtit, de exemplu, cu ajutorul unui electromotor. Raza de cerneală svîrlită de C va ajunge placa AB la fiecare $1/n$ dintr-o secundă, pe care va înregistra dungile *1*, *2*, *3*, *4*, *5*... Experiența satisface cantitativ legea $v^2 = 2gz$ (z măsurat în jos), din care deducem accelerația g. P o h l, luînd $n = 50$, găsește pentru accelerație valoarea satisfăcătoare: $g = 9{,}8$ m/s^2.

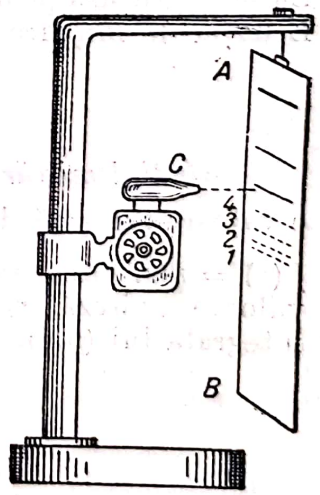

Fig. 9

b) *Experiența firului* (fig. 10). Luăm un fir atîrnat vertical pe care se găsesc fixate niște sfere de metal în punctele A, B, C, D, E la distanțe 1, 4, 9, 16 etc. După legea:

$$z = \frac{1}{2} g t^2$$

dacă vom da drumul firului din punctul de atîrnare M, sferele de metal căzînd pe rînd la pămînt în M', zgomotul ciocnirilor lor cu suprafața M' se va auzi la intervale egale:

$$t = \sqrt{\frac{2z}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{z} \qquad \text{dar } z = 1, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots \qquad \text{deci } \sqrt{\frac{g}{2}}\, t = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

c) Atîrnăm un număr dat (de exemplu, patru) plăci mici dar grele, de metal, la înălțimi egale respectiv cu 171,5, 117,6, 73,5, 39,2, 14,7 de planul orizontal. Dăm drumul primei plăci în momentul $t = 0$, celei de a doua după o secundă; celei de a treia după două secunde și celei de a patra după trei secunde. Ele vor atinge planul orizontal în același moment. Zgomotul căderii celor patru plăci se va auzi simultan.

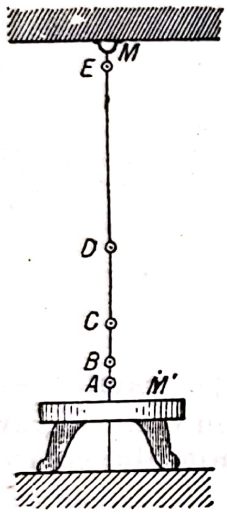

Fig. 10

56. **Căderea corpurilor grele în aer.** După date experimentale nu se cunoaște exact și explicit forța de rezistență a aerului. Se știe însă că această rezistență se opune mișcării, deci are direcția vitezei și sens contrar ei, fiind o funcție crescătoare de viteză. Ea are deci forma generală:

$$\bar{R} = -f(v)\,\frac{\bar{v}}{v}.$$

Forța totală care solicită punctul material greu va fi, așa dar, de forma:

$$m\bar{g} - f(v)\,\frac{\bar{v}}{v} \qquad (5.3)$$

unde am luat ca sens pozitiv pe axa z (verticala locului) sensul greutății $\bar{g}$, în punctul de pe suprafața pămîntului unde se efectuează experiența.

Mișcarea este rectilinie după observația făcută la § 50 (integrala ariilor). Ea se efectuează pe direcția verticalei locului în sensul de la zenit spre nadir. Ecuația de mișcare va fi atunci, după (5.3)

$$m\frac{dv}{dt} = mg - f(v). \qquad (5.4)$$

Studiul mișcării. Viteza pe care o poate avea corpul în cădere posedă o valoare extremă dedusă din ecuația (5.4), punînd $\frac{dv}{dt} = 0$, de unde rezultă $f(v) = mg$. Admitem că această ecuație are o soluție $v = v_c$. Numim această valoare, „viteză critică". Ea poate fi atinsă de mobil într-un timp dat de integrala lui (5.4), anume:

$$t = \int_{v_0}^{v_c} \frac{m\,dv}{mg - f(v)}, \qquad (5.5)$$

care, pentru $v = v_c$ are numitorul integrandului nul.

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, pentru $v = v_c$ urmează $t = \infty$, fiindcă experienţa arată că numitorul este de ordin mai mare ca unitatea. Prin urmare, viteza critică va fi atinsă de mobil după un timp extrem de lung.

Diferite cazuri de mişcare

a) Viteza iniţială $v_0 = v_c$. Atunci $v = v_c$ este o integrală a ecuaţiei (5.4) care satisface condiţiile iniţiale $v_0 = v_c$. Aşadar, această integrală reprezintă mişcarea.

Mobilul rămîne tot timpul cu viteza iniţială v_c; el cade în mişcare uniformă pe verticală.

b) $v_0 < v_c$; din (5.4) rezultă, $f(v)$ fiind o funcţie crescătoare de viteză, că:

$$\frac{dv}{dt} > 0.$$

Viteza creşte de la valoarea iniţială v_0 la valoarea critică v_c, pe care o ia, după (5.5) într-un timp extrem de lung. Acest timp, în practică, este totuşi finit, aşa încît în realitate mişcarea devine după un timp suficient de lung (dar finit) sensibil uniformă, revenind la cazul a).

c) $v_0 > v_c$; din (5.4) rezultă:

$$\frac{dv}{dt} < 0$$

deci viteza descreşte de la v_0 pînă la v_c, mobilul reluîndu-şi mişcarea uniformă, ca şi în cazul precedent.

57. **Oscilatorul liniar armonic** [1]. Foarte multe probleme tehnice au ca obiect studiul vibraţiilor (sau oscilaţiilor) în construcţiile de clădiri, în instalaţii de maşini, fenomenele provocate de cutremure; precum şi multe probleme de fizică atomică folosesc modelul cel mai simplu de *atom*, care este *oscilatorul* şi *rotatorul*. (Sisteme unidimensionale). Oscilatorul este compus dintr-un mobil care oscilează pe o dreaptă în jurul unei poziţii de echilibru, atras fiind de o forţă proporţională cu distanţa de la mobil la centrul fix, numită *forţă elastică* (fig. 11).

Fie un punct material de masă m, mişcîndu-se pe dreapta fixă xx', atras fiind de forţa elastică:

$$F = -k^2x,$$

însemnînd cu x mărimea deplasării faţă de O, într-un moment dat. Ecuaţia mişcării este:

$$m\ddot{x} + k^2x = 0$$

sau punînd $k^2 = m\omega^2$, ecuaţia devine:

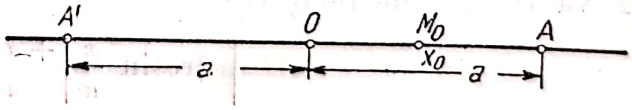

Fig. 11

$$\ddot{x} + \omega^2x = 0. \qquad (5.6)$$

[1]) Se numeşte „liniar" întrucît ecuaţia care descrie mişcarea este o ecuaţie diferenţială ordinară *liniară*.
Ne mărginim, aproape exclusiv, la probleme unidimensionale.

Funcția de forță fiind $-\frac{k^2x^2}{2} = -\frac{m}{2}\omega^2x^2$, integrala energiei ne dă:

$$v^2 = -\omega^2x^2 + h \tag{5.7}$$

constanta h fiind determinată prin condițiile inițiale ($t = 0$, $r = r_0$, $v = v_0$):

$$v_0^2 = -\omega^2x_0^2 + h.$$

Scriind în ecuația (5.7) $h = \omega^2a^2$, adică:

$$a^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2},$$

obținem:

$$v = \pm\,\omega\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{5.8}$$

Expresia (5.8) a vitezei ne spune că mobilul, plecînd din poziția inițială x_0 (în M_0), nu se poate deplasa decît între limitele:

$$-a \leqslant x \leqslant +a.$$

$OA = a$ este *amplitudinea* oscilației, iar x este *elongația* momentană.

Integrînd ecuația (5.8) sau direct ecuația (5.6) avem:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{a^2 - x^2}} = \omega t$$

sau

$$x = a\sin(\omega t + \alpha) \tag{5.9}$$

unde $\alpha = \arcsin\frac{x_0}{a}$ se numește *constanta fazei*, iar întreg argumentul $(\omega t + \alpha)$ se numește *fază*.

Relația (5.9) se mai poate scrie ($x_0 = a\sin\alpha$, $v_0 = a\omega\cos\alpha$):

$$x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t. \tag{5.10}$$

Formulele (5.9), (5.10) ne dau legile integrale ale mișcării. Avem o mișcare *periodică*, numită adesea *mișcare armonică*.

Perioada este timpul necesar ca mobilul să efectueze o oscilație completă, adică să ajungă din A' în A și înapoi în A' (v. fig. 11). Perioada T va fi dată de relația:

$$\left|\arcsin\frac{x}{a}\right|_{-a}^{+a} = \frac{1}{2}\omega T$$

de unde:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

ceea ce ne dă *frecvența* ν și viteza unghiulară $\omega = 2\pi\nu$ (v. § 15) sau frecvență circulară.

Scanned with OKEN Scanner

Amplitudinea mișcării este dată de relația (5.10) punînd $t = T$. Ea este egală cu:

$$a = \pm \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Energia totală este egală cu:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + 2\pi^2 m \nu^2 x^2$$

sau, după (5.9):

$$E = 2\pi^2 m \nu^2 a^2;$$

deci proporțională cu pătratul amplitudinii.

Mișcarea este *tautocronă*: Perioada $T = \frac{2\pi}{\omega}$ este independentă de poziția inițială x_0 și de viteza inițială v_0.

Tabela mișcării

x	$A'(-a)$ crește 0 crește $A(+a)$				x	$A(+a)$ descr. 0 descr. $A'(-a)$			
semnul lui v	+	+	+	+		−	−	−	−
v	0		$+\omega a$ max		0	0		$-\omega a$ min	0

În fig. 12 se arată graficul relației (5.9) $x = a \sin(\omega t + \alpha)$ precum și interpretarea diferenței de fază α.

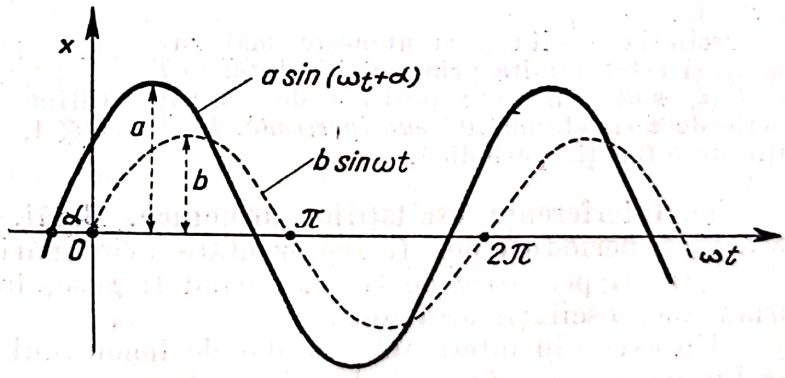

Fig. 12

58. **Experiență.** Dacă atîrnăm de un stativ (fig. 13) un fir spiral elastic care susține o greutate M și-i imprimăm o ușoară deplasare (axa x), fără rotație, greutatea M începe să oscileze în sus și în jos.

Dacă lăsăm greutatea M în repaos ea va lua o anumită poziție de echilibru pe care o luăm ca poziție inițială. Dacă o deplasăm puțin din poziția de echilibru și o lăsăm liberă, ea începe să oscileze pe direcția x în jurul poziției de echilibru. Aceste oscilații pot fi înscrise grafic pe un cilindru înregistrator R care se rotește astfel încît vîrful unei peniță A imprimă o urmă de cerneală pe o foaie de hîrtie așezată pe R. Experiența arată că, desfășurînd cilindrul pe plan, se obține o curbă sinusoidală:

$$x = a \sin(\omega t + \alpha),$$

atîta vreme cît oscilaţiile nu au amplitudini prea mari şi nu lăsăm ca experienţa să dureze un timp prea lung. În acest caz apar fenomene de *amortizare* din cauza *frecărilor* inerente oricărui dispozitiv mecanic şi din cauză că firul nu poate fi perfect elastic.

Dispozitivele experimentale introduc noţiunea de „amortizare", avînd drept cauză „frecările" sau „rezistenţele".

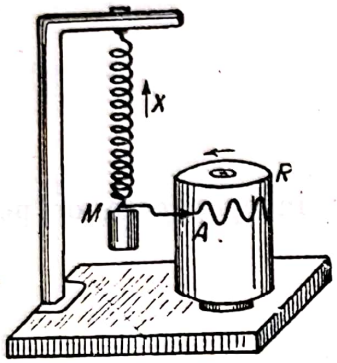

Fig. 13

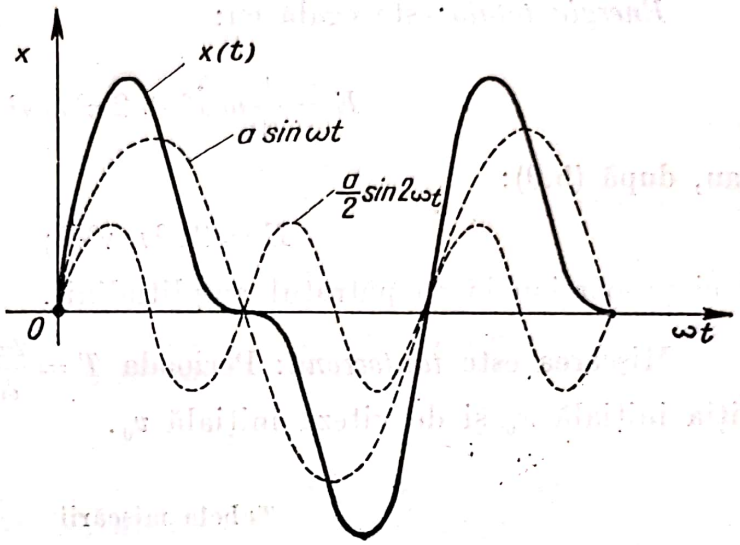

Fig. 14

Problema mişcărilor cu frecare va fi tratată mai tîrziu.

În fig. 14 dăm graficul oscilaţiei periodice *nearmonice*:

$$x(t) = a \sin \omega t + \frac{a}{2} \sin 2\omega t$$

de unde se vede că dacă toate oscilaţiile armonice sînt periodice, reciproca nu este adevărată.

Oscilaţia rezultantă se numeşte, mai corect, aproape periodică, sau *cuasiperiodică*, şi este definită prin condiţia $[x(t+T) - x(t)] \leqq \varepsilon$, pentru oricare t unde ε şi $T(\varepsilon)$ sînt constante pozitive determinate. Cîtimea $T(\varepsilon)$ este, în general, o funcţie de ε şi este numită *cuasipericadă*. Pentru $\varepsilon \ll 1$, funcţia $x(t)$ diferă foarte puţin de o funcţie periodică.

59. **Interferenţa oscilaţiilor armonice. Bătăi.** Multe fenomene fizice de natură periodică pot fi reprezentate prin mărimi de stare (Anexa II, §33), funcţii periodice de timp, putînd fi puse, în anumite condiţii, sub forma unor oscilaţii armonice.

Un exemplu interesant este dat de fenomenul de interferenţă a undelor luminoase (sau sonore). Lumina este un fenomen periodic reprezentat printr-o undă (teoria electromagnetică a luminii); de pildă o *undă plană*,

$$\xi = a \cos\left(\omega t - \frac{x}{\lambda} + \alpha\right), \tag{5.11}$$

unde ξ este *mărimea de stare* reprezentînd fenomenul fizic. După concepţia existenţei unui mediu numit *eter* în care au loc fenomenele luminoase, ξ reprezintă deplasarea unei particule de eter, care prin oscilaţiile ei produce

Scanned with OKEN Scanner

unda de lumină în planul (x, y) din spațiu, unda propagîndu-se în direcția x. Oscilația ξ trebuie să aibă loc perpendicular pe x, în planul (y, z).

Expresia (5.11) reprezintă o *undă plană*, monocromatică, care se propagă în direcția x. Trebuie observat că (5.11) este o soluție a ecuației oscilatorului:

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0$$

într-un anumit punct ($x = \text{const}$) din spațiu. Funcția (5.11) satisface însă unei ecuații cu derivate parțiale numită ecuația undelor, care pentru lumină se deduce din ecuațiile lui Maxwell (vezi *Electromagnetismul*, [33]).

Argumentul $\omega t - \frac{x}{\lambda} + \alpha$ se numește *fază*, iar:

$$\omega t - \frac{x}{\lambda} + \alpha = \text{const},$$

este ecuația suprafețelor de fază constantă, în fiecare moment t. Ele sînt, precum se vede, planele $x = \text{const}$; ω este frecvența undei monocromatice, numită și *pulsație* iar λ este *lungimea de undă* (distanța străbătută de frontul undei într-o perioadă). Dacă T este perioada, ω frecvența și q viteza de propagare a undei, avem relația

$$q = \frac{\lambda \omega}{2\pi} = \frac{\lambda}{T}.$$

Viteza $q = \dot{x}$ este derivata deplasării undei x (a planului suprafață de fază constantă); căci:

$$\omega\, dt - \frac{\omega}{q} dx = 0.$$

Constanta α în (5.11) se numește *constanta fazei*.

Să presupunem că vrem să cunoaștem starea de lumină într-un punct oarecare de pe planul $x = x_0$ (const). Înglobînd termenul constant $\frac{x_0}{\lambda}$ în constanta fazei α, expresia (5.11), ce reprezintă starea luminoasă în orice punct de pe planul $x = x_0$, ia forma:

$$\xi = a \cos(\omega t + \alpha_0),$$

soluție care reprezintă o oscilație armonică.

a) *Interferență* (Unde plane)

Să considerăm acum două unde de forma (5.11), în același plan oarecare $x = x_0$,

$$\xi_1 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1);\ \xi_2 = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \qquad (5.12)$$

având aceeași frecvență și aceeași direcție de propagare.

Ecuațiile (5.12) reprezintă două oscilații armonice, care se suprapun dînd tot o oscilație armonică $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Această suprapunere dă loc unui *fenomen de interferență*: „lumina suprapusă peste lumină poate să dea întuneric".

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a lămuri acest fenomen trebuie să introducem noțiunea de „intensitate". *Intensitatea* este definită prin pătratul amplitudinii și este o mărime măsurabilă experimental (placa fotografică, celula fotoelectrică etc.).

Ne punem, așadar, problema: în planul $x = x_0$, suprapunem oscilațiile (5.12). Care va fi intensitatea rezultantă, care poate fi măsurată experimental (pe un ecran)?

Pentru a răspunde acestei întrebări este nevoie să mai reamintim că, în practică, nu se pot măsura elongațiile și deci intensitățile *fiecărei* oscilații ξ_1^2, ξ_2^2, deoarece o undă luminoasă din spectrul vizibil (4 000 — 7 500 Å) are frecvența de ordinul lui 10^{15} cm/s, prin urmare, oscilează extraordinar de repede. Ceea ce se măsoară practic este numai o *valoare medie*.

Să reamintim deci noțiunea de *valoare medie* $\bar{\varphi}$ a unei funcții de timp $\varphi(t)$ pe durata unei perioade T. Prin definiție[1]):

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\,dt.$$

Observăm că:

$$\overline{\cos^2(\omega t + \alpha)} = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \alpha)\,dt = \frac{1}{2}\cdot$$

$$\overline{\cos(\omega t + \alpha_1)\cdot\cos(\omega t + \alpha_2)} = \frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega t + \alpha_1)\cdot\cos(\omega t + \alpha_2)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Acestea fiind date, fie $\xi = \xi_1 + \xi_2$ unda rezultantă; $I = 2\overline{\xi^2}$ fiind intensitatea ei, avem:

$$I = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2). \tag{5.13}$$

Din relațiile (5.12) rezultă că în toate punctele din spațiu unde $x = x_0$, avem:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = (2k + 1)\pi$$

$I = (a_1 - a_2)^2$, deci pentru $a_1 = a_2$ vom avea $I = 0$; așa dar întuneric.

Termenul $2a_1a_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$ se numește *termenul de interferență*. În alte regiuni din spațiu ($x = x_1$) vom putea avea maxime de lumină date de:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2k\pi$$

unde $I = (a_1 + a_2)^2$. Experimental fenomenul se prezintă, într-adevăr, ca o succesiune de maxime și minime producînd cunoscutul efect al *dungilor de interferență*. Acest exemplu ilustrează aplicația noțiunii de oscilație armonică în Fizică.

---

[1]) Folosim notația standardizată (literă supraliniată) pentru valori medii, atrăgînd atenția a nu se confunda cu notația vectorială.

Scanned with OKEN Scanner

b) *Bătăi.* Orice mașină electrică emite un *șorăit magnetic* cu un ton egal cu de două ori frecvența curentului; în T.F.F., în acustică, în emisiunile de radio etc., acest fenomen se face auzit, adeseori în mod foarte supărător. El provine din faptul că două sunete care au aproape același ton și o intensitate sensibil egală se combină și dau un sunet de intensitate variabilă, variațiile intensității având o frecvență egală cu diferența frecvențelor celor două sunete combinate.

Fenomenul este cunoscut sub numele de *bătăi* ale oscilațiilor de frecvențe și amplitudini aproape egale.

Fie:

$$\xi_1 = a_1 \cos \omega_1 t;\ \xi_2 = a_2 \cos \omega_2 t = a_2 \cos (\omega_1 + \Delta\omega)\, t \qquad (5.14)$$

căci am pus, conform primei condiții: $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$.

Dezvoltînd $\cos (\omega_1 + \Delta\omega)\, t$ și adunînd cele două expresii (5.14) se obține:

$$\xi_1 + \xi_2 = (a_1 + a_2 \cos \Delta\omega t) \cos \omega_1 t - a_2 \sin \Delta\omega t \sin \omega_1 t.$$

Intensitatea I a oscilației rezultante este după (5.13), unde am pus $\alpha_1 = \alpha_2$ [conform (5.14)]:

$$I = (a_1 + a_2 \cos \Delta\omega t)^2 + (a_2 \sin \Delta\omega t)^2$$

sau:

$$I = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \Delta\omega t \qquad (5.15)$$

expresie care variază de la $(a_1 + a_2)^2$ pînă la $(a_1 - a_2)^2$; deci, în cazul $a_1 = a_2 = a$ avem:

$$0 \leqslant I \leqslant 2a. \qquad (5.16)$$

Relațiile (5.15) și (5.16) redau analitic fenomenul de bătăi: două oscilații având *aproape* aceeași frecvență și o intensitate sensibil egală dau, prin combinațiile lor, o oscilație de intensitate variabilă, ale cărei variații au o frecvență egală cu diferența celor două oscilații (fig. 15).

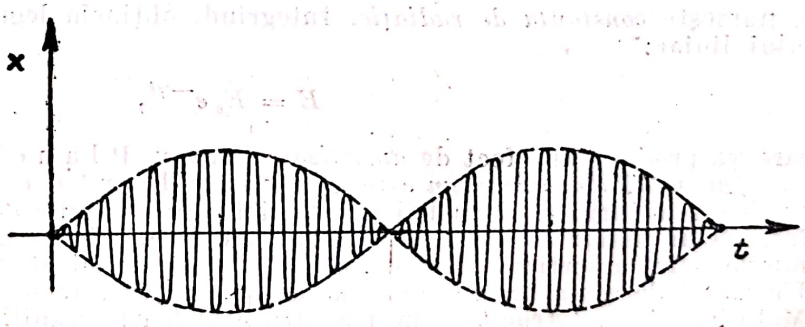

Fig. 15

60. **Radiația unui oscilator liniar armonic.** Undele electromagnetice cunoscute sub numele de unde hertziene (după numele descoperitorului lor H. Hertz) sînt emisiuni produse de un dispozitiv experimental echivalent unui oscilator liniar, numit *oscilatorul lui Hertz.* El constă dintr-o încărcare electrică e lăsată să sară de pe una pe cealaltă din cele două armături ale unui condensator, — mai exact, producînd experimental o schimbare ritmică de încărcare a armăturilor prin alternarea curentului electric. Dispozitivul apare echivalent unui *dipol* de moment $\bar{p} = e\bar{x}$, unde $\bar{x}$ este elongația momentană a încărcării. În teoria electromagnetismului se arată că pentru un astfel de dispozitiv cîmpul de gradient corespunzător dipolului, este [1])

$$\varphi = \bar{p}\ \mathrm{grad}\ \frac{1}{r}, \qquad (5.17)$$

[1]) Liniuța înseamnă vector.

în vecinătatea dipolului se reduce la cîmpul unui circuit liniar de moment $\bar{p}$, astfel încît $\dot{\bar{p}} = J\bar{x}$, unde $J = \frac{de}{dt}$ este intensitatea curentului (v. *Electromagnetismul* [33]). Legile electromagnetismului demonstrează că un astfel de dispozitiv emite, adică pierde, energia sub formă de energie radiată spontan W, dată de relația[1])

$$W = \frac{2}{3c^3}\overline{\ddot{p}^2} = \frac{2}{3c^3}e^2\overline{\ddot{x}^2}$$

unde c este viteza luminii în vid şi x elongaţia momentană. Valorile medii sînt datorite faptului că emisiunea W este o mărime măsurabilă. Ecuaţia de mişcare a încărcării este ecuaţia oscilatorului liniar:

$$\ddot{x} + 4\pi^2\nu^2 x = 0.$$

Rezultă:

$$\overline{\ddot{x}^2} = (4\pi^2\nu^2)^2\,\overline{x^2} = 16\pi^4\nu^4 a^2\,\overline{\sin^2(\omega t + \alpha)} = 8\pi^4\nu^4 a^2.$$

Prin urmare

$$W = \frac{16\pi^4 e^2 \nu^4}{3c^3} a^2. \tag{5.18}$$

Acest oscilator va pierde din energia lui totală $E = 2\pi^2 m\nu^2 a^2$, prin radiaţie pe secundă, cantitatea

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{16}{3c^3} e^2\pi^4\nu^4 a^2.$$

Rezultă:

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma E$$

unde:

$$\gamma = \frac{8e^2\pi^2\nu^2}{3mc^3}$$

se numeşte *constanta de radiaţie*. Integrînd, obţinem legea de emisiune a oscilatorului liniar:

$$E = E_0 e^{-\gamma t},$$

care va produce un efect de *amortizare* (Max Planck).

Modelul clasic de atom este un oscilator Hertz conceput ca un electron care oscilează în jurul unei poziţii de echilibru, după legile descrise mai sus. Am văzut însă că un astfel de atom trebuie să piardă energie în mod permanent şi că deci, mişcarea lui amortizată îl duce, după un timp suficient de lung, să cadă în nucleu. Un astfel de atom ar fi aşadar, *nestabil*, ceea ce este în contrazicere cu realitatea. Materia există, întrucît atomul neutru este foarte stabil. Aceste motive au condus la introducerea noţiunii de discontinuitate, prin *teoria cuantelor* (Max Planck, 1900) în structura materiei (Niels Bohr, 1913). Totuşi, pentru un foarte mare număr de fenomene fizice modelul clasic de atom descris mai sus este satisfăcător.

Emisiune prin antenă (Telegrafia fără fir). Pentru oscilatorul lui Hertz, de frecvenţă ν avînd soluţia $x = x_0 \sin 2\pi\nu t$, momentul dipolar va fi $p = p_0 \sin 2\pi\nu t$, iar intensitatea curentului $J = J_0 \cos 2\pi\nu t$. Din relaţia (5.18) deducem:

$$W = \frac{16\pi^4\nu^4}{3c^3}\overline{p_0^2}$$

---

[1]) Liniuţa înseamnă valoarea medie (standard).

sau încă, avînd în vedere că $\ddot{\bar{p}}^2 = 4\pi^2\nu^2 l^2 J^2$ unde l însemnează lungimea oscilatorului,

$$W = \frac{8\pi^2}{3c}\frac{l^2}{\lambda^2}\bar{J}^2$$

unde am pus $c = \lambda\nu$. Expresia de mai sus este folosită în telegrafia fără fir şi dă radiaţia unei antene de lungimea l, pentru lungimea de undă λ şi avînd „curentul efectiv" $\sqrt{\bar{J}^2}$. Generatorul oscilaţiei va trebui să producă *cel puţin* această energie.

61. **Oscilaţii armonice suprapuse bidimensionale. Oscilaţii eliptice şi circulare.** Fie un punct material M (fig. 16) solicitat de forţa $-k^2\bar{r}$, îndreptată mereu spre un punct fix O, de-a lungul vectorului de poziţie $\bar{r}$. Mişcarea va fi plană (§ 50), iar ecuaţiile mişcării sînt:

$$m\ddot{\bar{r}} + k^2\bar{r} = 0$$

de unde (punînd $k^2 = m\omega^2$), deducem:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0; \qquad \ddot{y} + \omega^2 y = 0.$$

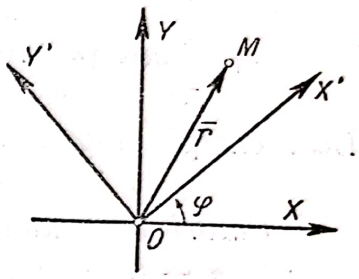

Fig. 16

Aceste ecuaţii admit soluţiile

$$x = a\sin(\omega t + \alpha) \text{ şi } y = b\sin(\omega t + \beta) \qquad (5.19)$$

α şi β fiind constantele fazelor, iar $\omega = 2\pi\nu = 2\pi : T$. Aceste două oscilaţii se adună vectorial şi imprimă mobilului o mişcare, care-l obligă să se mişte după o traiectorie obţinută, prin eliminarea lui t din relaţiile (5.19) care reprezintă ecuaţiile parametrice ale traiectoriei. Eliminarea lui t ne conduce la ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos(\alpha-\beta) = \sin^2(\alpha-\beta).$$

Traiectoria este o elipsă. Pentru a-i găsi axele facem transformarea obişnuită:

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$
$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$

şi determinăm unghiul φ astfel încît ecuaţia elipsei să ia forma normală. Pentru aceasta anulăm coeficientul termenului în $x'y'$; obţinem condiţia:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2ab}{a^2 - b^2}\cos(\alpha-\beta),$$

care ne dă unghiul φ $\left(-\frac{\pi}{4} < \varphi < +\frac{\pi}{4}\right)$, făcut de axele elipsei cu axele de coordonate. Calculul semiaxelor ne conduce la valorile următoare pentru inversele valorilor semiaxelor:

$$\frac{1}{\sin^2(\alpha-\beta)}\left[\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2} - \frac{\sin 2\varphi}{ab}\cos(\alpha-\beta)\right]$$

şi

$$\frac{1}{\sin^2(\alpha-\beta)}\left[\frac{\sin^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\varphi}{b^2} + \frac{\sin 2\varphi}{ab}\cos(\alpha-\beta)\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe această traiectorie punctul se mișcă după legea ariilor. Aceasta înseamnă că viteza areolară

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}) = \pi ab\nu \sin(\alpha - \beta)$$

este constantă.

Energia potențială este $E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$. Teorema energiei este satisfăcută, căci $\frac{1}{2} mv^2 + E_p = \text{const}$. Rezultă:

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 [a^2 \cos^2(\omega t + \alpha) + b^2 \cos^2(\omega t + \beta)] +$$

$$+ \frac{1}{2} m\omega^2 [a^2 \sin^2(\omega t + \alpha) + b^2 \sin^2(\omega t + \beta)] = \frac{m\omega^2}{2} (a^2 + b^2).$$

Deci energia totală este $E = \frac{m}{2} \omega^2 (a^2 + b^2)$.

Cazuri particulare (fig. 17).

1. $\alpha - \beta = 0$; elipsa este degenerată într-o linie dreaptă: $\bar{r} = \bar{a} \sin(\omega t + \alpha)$, care face cu axa x unghiul ascuțit dat de relația $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$.

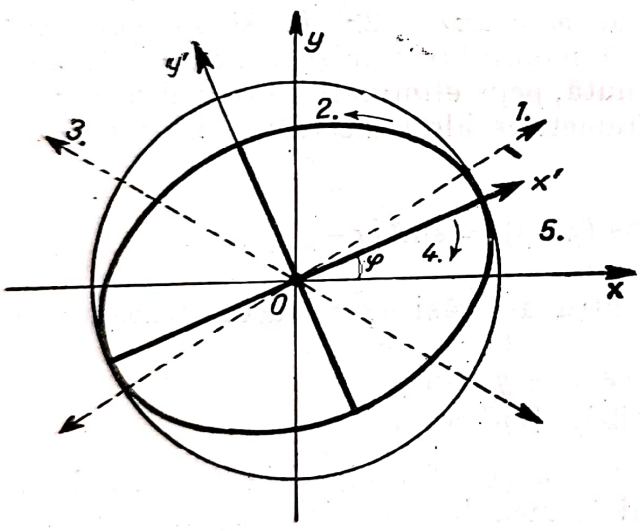

Fig. 17

2. $0 < \alpha - \beta < \pi$; elipsa este descrisă în sensul lui θ crescător, căci $\dot{\theta} > 0$. Avem oscilația eliptică directă.

3. $\alpha - \beta = \pi$. Elipsa este degenerată într-o dreaptă simetrică cu cea de la punctul 1. Mobilul efectuează oscilații rectilinii.

4. $\pi < \alpha - \beta < 2\pi$. Mișcare eliptică în sens invers celei directe de la punctul 2.

5. $a = b$; $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$. Mișcare circulară. Elipsa degenerează în cerc; φ este nedeterminat.

Acest exemplu rezolvă problema *polarizării luminii*.

62. **Oscilații foarte mici în jurul unei poziții de echilibru.** Să presupunem că forța care solicită punctul este derivată dintr-o funcție $-E_p$ analitică; atunci ecuația mișcării este:

$$m\ddot{\bar{r}} = -\operatorname{grad} E_p .$$

Să presupunem de asemenea că originea coordonatelor este o poziție de echilibru *stabil* în care E_p este minimă (conform teoremei lui D i r i-

chlet). Putem admite că valoarea minimă este $E_p = 0$. Funcția E_p va putea fi dezvoltată în jurul acestui punct în seria Taylor:

$$E_p(P) = E_{p2} + E_{p3} + \dots$$

unde $E_{pn}(x, y, z)$ este grupul termenilor de gradul n în x, y, z, termenii de grade zero și unu lipsind prin ipoteză.

Dacă $E_{p2} \neq 0$, atunci E_{p2} va fi o formă pătratică pozitiv definită (admițînd că derivatele de ordinul al doilea ale lui E_p nu se anulează toate în origine). Raportată la axele de simetrie, forma pătratică se va scrie:

$$E_{p2} = \frac{1}{2}(k_1^2 x^2 + k_2^2 y^2 + k_3^2 z^2).$$

Dacă (x, y, z) rămîn mai mici ca o mărime δ suficient de mică, putem neglija termenii superiori lui E_{p2} în dezvoltarea Taylor, iar ecuația de mișcare se reduce la:

$$m\ddot{r} = -\operatorname{grad} E_{p2}$$

ecuație echivalentă cu sistemul

$$m\ddot{x} = -k_1^2 x; \quad m\ddot{y} = -k_2^2 y; \quad m\ddot{z} = -k_3^2 z;$$

pentru care avem soluțiile cunoscute:

$$x = a_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1); \quad y = a_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2); \quad z = a_3 \sin(\omega_3 t + \alpha_3),$$

unde frecvențele sînt date de relațiile

$$\omega_1^2 = \frac{k_1^2}{m}; \quad \omega_2^2 = \frac{k_2^2}{m}; \quad \omega_3^2 = \frac{k_3^2}{m}.$$

Mișcarea rezultantă este o suprapunere de trei mișcări armonice paralele cu axele de coordonate.

Cum, în general, numerele ω_1, ω_2, ω_3 nu satisfac unei relații de forma:

$$\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \beta_3\omega_3 = 0,$$

(β_1, β_2, β_3 fiind întregi) deci nu sînt comensurabile între ele, traiectoria punctului nu va fi o curbă închisă.

Proiecțiile traiectoriei punctului material pe cele trei plane de coordonate sînt niște curbe, care poartă numele de *figurile lui Lissajous*.

63. **Oscilații amortizate.** Am văzut în exemplele precedente că, de multe ori, o mișcare oscilatorie armonică poate fi stînjenită, prin apariția unor efecte perturbatoare care încetinesc mișcarea inițială. Astfel de efecte am recunoscut a fi frecarea, rezistența aerului, pierderea de energie prin radiație, etc. Mișcarea rezultantă, cînd unei mișcări oscilatorii armonice i se suprapune un efect de amortizare, se numește „oscilație amortizată". Cazul cel mai răspîndit de amortizare este acela cînd cauza amortizantă este o forță proporțională cu viteza și acționînd în sens invers mișcării

(vitezei), așa dar, o forță de forma $-m\varkappa^2\bar{v}$. Ecuația mișcării liniare este atunci:

$$m\ddot{x} + m\varkappa^2\dot{x} + m\omega^2 x = 0$$

sau încă:

$$\ddot{x} + \varkappa^2\dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{5.20}$$

Această ecuație se integrează după regulile cunoscute din calculul diferențial și integral. Se formează ecuația caracteristică, încercîndu-se a se satisface ecuația (5.20) cu o soluție de forma $x = e^{rt}$. Ecuația caracteristică este:

$$r^2 + \varkappa^2 r + \omega^2 = 0,$$

cu rădăcinile:

$$r_1 = -\frac{\varkappa^2}{2} + \sqrt{\frac{\varkappa^4}{4} - \omega^2} \text{ și } r_2 = -\frac{\varkappa^2}{2} - \sqrt{\frac{\varkappa^4}{4} - \omega^2}.$$

Integrala generală a ecuației se scrie:

$$x = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t},$$

A și B fiind constantele de integrare, care trebuie determinate prin condițiile inițiale.

Să luăm drept condiții inițiale: $t = 0$, $x = x_0$, $v = v_0$.

Să însemnăm, pentru prescurtare:

$$+\sqrt{\frac{\varkappa^4}{4} - \omega^2} = \gamma;$$

atunci, putem scrie:

$$x = e^{-\frac{\varkappa^2 t}{2}}\left(Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t}\right);$$

de unde:

$$x_0 = A + B;\ v_0 = A\left(-\frac{\varkappa^2}{2} + \gamma\right) - B\left(+\frac{\varkappa^2}{2} + \gamma\right).$$

Întrucît ecuația $x = 0$ are o soluție reală dacă luăm $\gamma \neq 0$, putem lua ca moment inițial unul din momentele cînd mobilul a trecut prin origine, apoi putem presupune viteza inițială pozitivă; deci $x_0 = 0$, $v_0 > 0$, ceea ce nu afectează generalitatea raționamentului. Atunci, condițiile inițiale ne dau $A = \frac{v_0}{2\gamma}$, $B = -\frac{v_0}{2\gamma}$, iar integrala generală se poate scrie:

$$x = \frac{v_0}{2\gamma} e^{-\frac{\varkappa^2}{2}t}\left(e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}\right). \tag{5.21}$$

a) *Oscilații amortizate aperiodice.* Cînd $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^4 - 4\omega^2}$ este real și pozitiv ($\gamma > 0$), deci $\varkappa^2 > 2\omega$, exponențiala $e^{\gamma t}$ crește mereu începînd de

Scanned with OKEN Scanner

la $t = 0$ pînă la $t = +\infty$, dominînd termenul $e^{-\gamma t}$ care este monoton descrescător. Pentru $t \to +\infty$ avem:

$$\underset{t\to+\infty}{x} = \frac{v_0}{2\gamma} e^{\left(\gamma - \frac{\varkappa^2}{2}\right)t} \longrightarrow 0,$$

căci:

$$\gamma < \frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^4} = \frac{\varkappa^2}{2}.$$

Punctul pornește din $x = 0$ spre $x > 0$ cu viteza pozitivă v_0 și rămîne mereu de partea lui x pozitiv pînă ajunge la o elongație maximă dată de valoarea care anulează viteza $\dot{x} = 0$, sau:

$$e^{\gamma t}\left(\gamma - \frac{\varkappa^2}{2}\right) + e^{-\gamma t}\left(\gamma + \frac{\varkappa^2}{2}\right) = 0$$

de unde rezultă:

$$e^{2\gamma t} = \frac{\varkappa^2 + 2\gamma}{\varkappa^2 - 2\gamma};$$

deci:

$$t = \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{\varkappa^2 + 2\gamma}{\varkappa^2 - 2\gamma},$$

iar din (5.21) rezultă:

$$x_{max} = \frac{v_0}{\omega}\left(\frac{\varkappa^2 + 2\gamma}{\varkappa^2 - 2\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\varkappa^2}{2\gamma}}.$$

După acest timp, din poziția maximă x_{max}, mobilul schimbă sensul vitezei și al mișcării, revenind spre origine, pe care o ajunge după un timp infinit de lung ($\underset{t=\infty}{x} = 0$). Prin aceasta, mișcarea s-a terminat (punctul se apropie asimptotic de origine).

b) *Oscilații amortizate, periodice* (fig. 18). În cazul cînd γ este imaginar adică $\gamma = i\gamma'$ unde:

$$\gamma' = \sqrt{\omega^2 - \frac{\varkappa^2}{4}}, \text{ deci } \varkappa^2 < 2\omega,$$

soluția (5.21) se scrie sub forma:

$$x = \frac{v_0}{2i\gamma'} e^{-\frac{\varkappa^2}{2}t}\left(e^{i\gamma' t} - e^{-i\gamma' t}\right)$$

sau:

$$x = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{\varkappa^2}{2}t} \sin \gamma' t. \qquad (5.22)$$

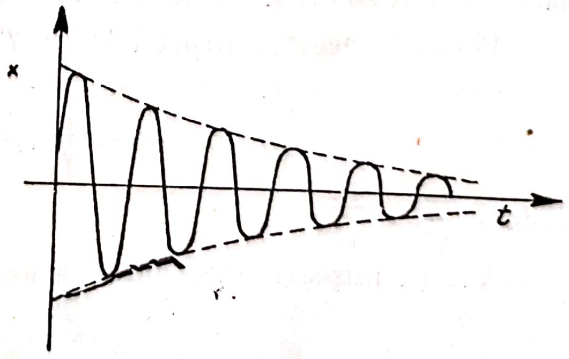

Fig. 18

Mișcarea aceasta este similară unei mișcări periodice libere, în care însă amplitudinea elongației, în fiecare moment, este funcție descrescătoare de timp

$$a = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{\varkappa^2}{2} t}$$

Pentru puncte egal distanțate, amplitudinea scade după tabela următoare:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	. . . .
$\frac{\gamma'}{v_0} a$	1	$e^{-\frac{\varkappa^2}{4}\pi} = a_1$	a_1^2	a_1^3	a_1^4	. . . .

așadar, cînd timpul crește în progresie aritmetică cu rația $\frac{\pi}{2}$, amplitudinea scade în progresie geometrică cu rația $a_1 = e^{-\frac{\varkappa^2}{4}\pi}$.

Frecvența oscilației este γ'; deci perioada va fi $T' = \frac{2\pi}{\gamma'}$.

Fie t timpul în care amplitudinea este $a_n = a_1^n$, fie t' timpul cînd amplitudinea este $a_m = a_1^m$ ales astfel încît $t' - t = T'$; cum:

$$a_n = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{\varkappa^2}{2} t} \quad \text{și} \quad a_m = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{\varkappa^2}{2} t'}$$

rezultă:

$$\frac{a_m}{a_n} = e^{-\frac{\varkappa^2}{2}(t'-t)} = e^{-\frac{\varkappa^2}{2} T'}.$$

Diferența, pentru două oscilații succesive în același sens,

$$\delta = \ln a_n - \ln a_m = \frac{\varkappa^2}{2} T'$$

se numește *descreșterea logaritmică* (sau *decrementul logaritmic*).

Se observă că mișcarea este *isocronă*, căci perioada T' este independentă de timpul scurs de la începutul mișcării. Cu cît amplitudinile se micșorează, cu atît se micșorează și viteza, astfel încît perioada rămîne constantă.

Perioada acestei mișcări $T' > T = \frac{2\pi}{\omega}$, căci:

$$\gamma' = \sqrt{\omega^2 - \frac{\varkappa^4}{4}} < \omega$$

și deci $\frac{2\pi}{\gamma'} > \frac{2\pi}{\omega}$.

Viteza mișcării este dată de expresia dedusă din (5.22)

$$v = \dot{x} = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{\varkappa^2}{2} t} \left(\gamma' \cos \gamma' t - \frac{\varkappa^2}{2} \sin \gamma' t\right). \tag{5.23}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ea se va anula în fiecare moment cînd mobilul se oprește și se întoarce. Valorile extreme ale elongației vor fi date de ecuația ($\dot{x} = 0$):

$$\gamma' \cos \gamma' t - \frac{\varkappa^2}{2} \sin \gamma' t = 0$$

deci:

$$\operatorname{tg} \gamma' t = \frac{2\gamma'}{\varkappa^2} = \sqrt{4\frac{\omega^2}{\varkappa^4} - 1}\,. \tag{5.24}$$

Fie t_1 cea mai mică valoare pozitivă a lui t care satisface ecuația (5.20); celelalte valori vor fi date de

$$t_{n+1} = t_1 + \frac{n\pi}{\gamma'}\,; \tag{5.25}$$

așa dar, progresia aritmetică a valorilor timpului este formată de valorile care exprimă momentele cînd sensul mișcării se schimbă; am văzut, mai sus, că amplitudinile corespunzătoare descresc în progresie geometrică.

De altfel amplitudinile scad extrem de repede cu timpul, așa încît ne sînt suficienți numai cîțiva termeni ai progresiei aritmetice (5.25) ca să anihileze practic mișcarea. De pildă, dacă după t_0 factorul din exponent devine $\frac{1}{2}$, $\left(\frac{\varkappa^2}{2} t_0 = \frac{1}{2}\text{, deci } t_0 = \frac{1}{\varkappa^2}\right)$, amplitudinea va fi proporțională cu $e^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2{,}7}}$; după timpul $2t_0$ amplitudinea devine $\frac{1}{2{,}7}$, iar după $10t_0$, ea devine $e^{-5} \approx \frac{1}{148}$ etc.

64. **Amortizare prin frecare.** Punctul material M de masă m (fig. 19), mișcîndu-se sub acțiunea forței elastice $-m\omega^2 x$ în jurul centrului atractiv O să fie imaginat ca un corp material care alunecă pe o bară rigidă, astfel încît să sufere în timpul mișcării o „frecare" datorită aderenței dintre el și bară. Efectul frecării să fie astfel încît să se opună, în fiecare moment, mișcării, deci să fie mereu în sens contrar mișcării. Fie F amortizarea datorită frecării. Spre deosebire de cazul precedent, — cînd forța amortizatoare își schimbă sensul opunîndu-se mișcării, în mod automat, din cauza proporționalității cu viteza, — în cazul de față nu facem asupra lui F nici o ipoteză, ci admitem numai că frecarea $\overline{F}$ este o forță constantă opusă mișcării.

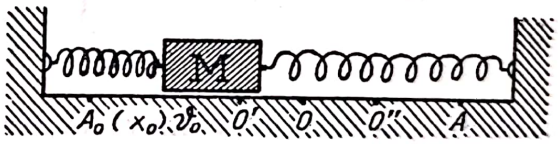

Fig. 19

Distingem două posibilități:

1. Mișcarea se efectuează în sensul pozitiv pe axa x. Ecuația mișcării este:

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x = -F.$$

Să punem $\frac{F}{m\omega^2} = d$; ecuația devine:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x + d) + m\omega^2 (x + d) = 0;$$

ea reprezintă o mișcare oscilatorie liberă, cu elongația

$$x + d = a \sin (\omega t + \alpha).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci, o mişcare armonică în care forţa elastică $-m\omega^2 x$ îşi are centrul de acţiune în punctul O', dat de $OO' = d$.

2. Mişcarea se efectuează în sens contrar, de la x spre O', centrul forţei elastice. Ecuaţia mişcării va fi:

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x = + F$$

adică:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x - d) + m\omega^2(x - d) = 0$$

avînd soluţia

$$x - d = a \sin(\omega t + \alpha);$$

deci tot o mişcare armonică în jurul centrului O'', aşa ca $OO'' = d$. În acest caz, punctul repetă mişcarea în sens invers.

Discuţia mişcării. Trebuie să observăm în primul rînd că între mişcarea în sens pozitiv şi cea în sens negativ există un moment cînd viteza se anulează. Cînd elongaţia x devine mai mare în valoare absolută ca d, atunci avem o întoarcere a punctului; cînd însă $|x| \leqslant d$ corpul rămîne în repaos. În adevăr, pentru ca să avem repaos trebuie ca sistemul vectorial al forţelor să fie echivalent cu sistemul identic nul, $\overline{R} = 0$ ($\overline{R}$ fiind rezultanta). Aşa dar, condiţia de echilibru este $|\overline{F}| = + m\omega^2|x|$; deci începînd din momentul cînd $|x| = \dfrac{F}{m\omega^2} = d$, ccrpul rămîne în echilibru pentru tot restul timpului şi cu atît mai mult cînd $|x| < d$.

Mişcarea începe la $t = 0$ cu amplitudinea $x_0 > d$ şi viteza nulă. Are loc o mişcare în sens pozitiv. Condiţia iniţială $v_0 = 0$ determină pe $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, căci la începutul mişcării ($t = 0$), viteza este:

$$\dot{x}_0 = \omega a \cos(\omega t + \alpha) = 0 = \omega a \cos\alpha.$$

Atunci $x_0 = a + d$, căci $O'A_0 = OA_0 + O'O = - x_0 + d = a \cos \omega t_0$, (deci $a = x_0 - d$). Pentru $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{T}{2}$ $\left(\text{unde } T = \dfrac{2\pi}{\omega}\right)$, vom avea:

$$x = - d - (x_0 - d) \cos \omega t;$$

mişcarea este periodică liberă în jurul lui O'. Pentru $t = \dfrac{T}{2} = \dfrac{\pi}{\omega}$ vom avea $x = x_0 - 2d$, iar viteza

$$\dot{x} = a\omega \sin \omega t$$

va fi evident nulă. Mobilul se întoarce. Pentru $\dfrac{T}{2} \leqslant t \leqslant T$ vom avea

$$x = d - (x_0 - 3d) \cos \omega t.$$

Mişcarea negativă va fi tot periodică liberă în jurul lui O''. Pentru $t = T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, avem:

$$x = d - (x_0 - 3d) = - x_0 + 4d$$

şi aşa mai departe.

Vedem prin urmare că elongaţiile x oscilează între maxime şi minime date, în valoare absolută, de şirul (progresia aritmetică cu raţia $2d$)

$$x_0, x_0 - 2d, x_0 - 4d, \ldots$$

Va sosi un moment cînd un maximum (în valoare absolută) va fi mai mic decît d,

$$|x_0 - 2nd| < d.$$

Atunci, după cele precizate mai sus asupra condiției de repaos, mobilul rămîne în nemișcare. Aceasta se întîmplă, practic, după un număr limitat de oscilații.

În această mișcare, perioada $T = \frac{2\pi}{\omega}$ rămîne egală cu perioada oscilațiilor armonice, ca și cum nu ar exista amortizare; spre deosebire de cazul precedent al mișcării oscilatorii cînd amortizarea era proporțională cu viteza, caz în care perioada era mărită prin efectul de amortizare.

65. Aplicații

a) *Electronul legat.* Am amintit că, după legile electrodinamicii, un oscilator liniar armonic pierde energia radiantă după legea (§ 60):

$$E = E_0 e^{-\gamma t}$$

unde constanta de amortizare este:

$$\gamma = \frac{8e^2\pi^2}{3mc^3}\nu^2.$$

Cum $E = \text{const.}\, a^2$, rezultă că amplitudinile însești descresc după legea:

$$a = a_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

ceea ce caracterizează o mișcare amortizată. Ne așteptăm așa dar ca, în realitate, ecuația *electronului legat elastic în atom* să fie de forma ecuației oscilatorului amortizat și nu a oscilatorului liber. În adevăr, putem aprecia forța care se dezvoltă în cîmpul exterior sub influența radiației atomice și care va acționa ca un cîmp exterior asupra oscilatorului însuși, amortizîndu-i mișcarea. Fie $\overline{F}$ această forță. Ecuația mișcării va trebui să ia atunci forma:

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x = F. \tag{5.26}$$

Integrala primă a energiei ne dă

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{m}{2}\omega^2 x^2\right) = F\frac{dx}{dt}$$

or, în membrul întîi avem variația energiei totale $\frac{dE}{dt}$ căci:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{m}{2}\omega^2 x^2.$$

Așa dar, am găsit relația:

$$\frac{dE}{dt} = F\frac{dx}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{x}^2.$$

Să exprimăm membrul al doilea tot ca un produs scalar dintre o mărime vectorială și vectorul $\dot{\overline{x}}$, ca și în membrul întîi. Aceasta ne va permite să găsim valoarea lui $\overline{F}$. Pentru aceasta observăm că:

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}\ddot{x}) = \ddot{x}^2 + \dot{x}\dddot{x},$$

Deci, pentru o „valoare medie“ între $t = 0$ şi $t = T$, vom avea[1]):

$$\overline{F\dot{x}} = \frac{2e^2}{3c^3}\overline{(\dot{x}\,\ddot{x})} - \frac{2e^2}{3c^3}\left[(\dot{x}\,\ddot{x})_{t=T} - (\dot{x}\,\ddot{x})_{t=0}\right];$$

luînd T suficient de mic, termenul al doilea poate fi neglijat faţă de primul. Avem, prin urmare:

$$F = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x}, \tag{5.27}$$

aşa încît ecuaţia exactă a electronului *legat* elastic în atom, care oscilează cu emisie de radiaţie electromagnetică, va fi:

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x - \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x} = 0$$

în locul ecuaţiei (5.26), forţa de amortizare (5.27) avînd o formă diferită de formele precedent studiate. Această ecuaţie se integrează prin metoda obişnuită. Facem substituţia:

$$x = ae^{i\omega t}$$

şi găsim soluţia:

$$x = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(a_1 e^{i\omega_0 t} + a_2 e^{-i\omega_0 t}\right)$$

unde:

$$\gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}.$$

Mişcarea posedă caracterul esenţial al oscilaţiilor amortizate.

b) *Analogie electro-mecanică.* Un circuit electric cu inductanţă $\mathfrak{L}$, capacitate C şi rezistenţă ohmică R în serie.

Alegînd ca variabilă sarcina condensatorului q (astfel încît curentul $i = \dot{q}$) ecuaţia tensiunilor este de forma:

$$\mathfrak{L}\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

care se reduce la ecuaţia (5.20) a oscilaţiilor amortizate, punînd:

$$q = x,\quad k^2 = \frac{R}{\mathfrak{L}},\quad \omega^2 = \frac{1}{\mathfrak{L}C}.$$

Analogia este evidenţiată prin tabela următoare:

Oscilator liniar armonic	*Circuit electric*
Masa m	Inductanţa $\mathfrak{L}$
Coeficient de amortizare k	$\frac{1}{C}$ (C = capacitate)
Deplasarea x	Sarcina condensatorului q
Viteza $\dot{x}$	Intensitatea $i = \dot{q}$
Forţa de inerţie $m\frac{dv}{dt}$	Tensiunea la borne $\mathfrak{L}\frac{di}{dt}$
Energie cinetică $\frac{mv^2}{2}$	Energie înmagazinată în inductanţa $\mathfrak{L}$, anume $\frac{\mathfrak{L}i^2}{2}$

[1]) Aici liniuţa de deasupra reprezintă valoare medie.

Scanned with OKEN Scanner

66. **Oscilații întreținute.** Să presupunem că asupra oscilatorului amortizat acționează o forță exterioară periodică, menită să întrețină oscilația proprie a oscilatorului. Fie $\varkappa^2$ constanta de amortizare; ω_0 frecvența proprie și ω frecvența forței exterioare. Ecuația de mișcare va fi:

$$\ddot{x} + \varkappa^2 \dot{x} + \omega_0^2 x = ae^{i\omega t}. \tag{5.28}$$

Avem o ecuație diferențială liniară, cu coeficienți constanți, cu membrul al doilea, a cărei integrală generală se află prin metoda cunoscută: se adună integralei generale a ecuației omogene (fără membrul al doilea) o integrală particulară a ecuației cu membrul al doilea. O astfel de integrală particulară se găsește făcînd substituția:

$$x = x_0 e^{i\omega t};$$

se obține relația de condiție:

$$x_0 = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\varkappa^2} = \frac{a(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\varkappa^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\varkappa^4}.$$

Putem scrie pe x_0 sub forma $\alpha e^{-i\varphi}$; de unde

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\varkappa^4}} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{a\omega\varkappa^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Integrala generală a ecuației (5.28) va fi, așa dar,

$$x = e^{-\frac{\varkappa^2}{2}t}\left(Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t}\right) + \alpha e^{i(\omega t - \varphi)} \tag{5.29}$$

După un timp suficient de lung termenul provenit din oscilația proprie, amortizată, avînd amplitudinea descrescătoare exponențial: $e^{-\frac{\varkappa^2}{2}t}$, va deveni foarte repede neglijabil față de termenul provenit din forța de întreținere, $\alpha e^{i(\omega t - \varphi)}$, care va rămîne singur și va reprezenta oscilația armonică, cu frecvență egală cu frecvența forței exterioare. Pe de altă parte α și φ variază cu frecvența ω după curbele din fig. 20.

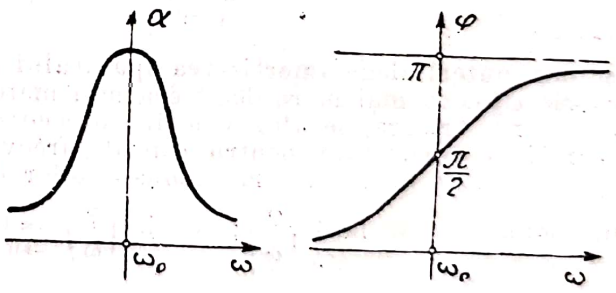

Fig. 20

Din integrala (5.29) vom considera ca soluție a problemei mecanice partea reală (sau imaginară). O formă elegantă pentru integrala generală (5.29) se găsește, dacă se iau drept condiții inițiale $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 1$. Se verifică ușor că soluția particulară a ecuației neomogene, însemnînd în general cu $F(t)$ membrul al doilea al ecuației (5.29) se scrie, în acest caz,

$$\int_0^t F(u)\, x(t-u)\, du,$$

dacă $x(t)$ reprezintă integrala generală a ecuației omogene.

67. **Rezonanța.** Amplitudinea oscilației datorită forței exterioare

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \varkappa^4}}$$

este cu atît mai mare, cu cît numitorul este mai mic. Or, valoarea minimă a numitorului se va obține cînd $\omega_0^2 = \omega^2$, așa dar cînd frecvențele oscilației proprii și a oscilației exterioare coincid. Acest caz produce efectul de „rezonanță".

Este clar că efectul va fi cu atît mai mare cu cît amortizarea $\varkappa^2$ va fi mai mică. Cînd $\varkappa = 0$, $\alpha \to \infty$ pentru $\omega \to \omega_0$.

Acest fenomen are mare însemnătate practică. Sistemele materiale care pot avea oscilații (poduri, vapoare, mașini etc.) sînt foarte sensibile la acțiuni exterioare ritmice, dacă oscilația imprimată din afară poate deveni sensibil egală cu oscilația proprie a sistemului; soldații cari trec în pas ritmic pe un pod, trenul, vehiculele ce trec pe poduri etc. pot adesea produce surparea podului, cînd rezistența materialului elastic, adică amortizarea $\varkappa^2$ nu este suficient de mare pentru ca să anihileze efectul de rezonanță, adică $\alpha \to \infty$ cînd $\omega \to \omega_0$.

68. **Aplicații.** a) *Aparatele înregistratoare* sînt dispozitive care oscilează cu amortizare și sub acțiunea unei forțe exterioare. Sîntem deci exact în cazul oscilațiilor amortizate și întreținute. La aceste aparate constantele m, ω_0 și $\varkappa^2$ sînt susceptibile de valori extrem de variate, după necesitățile experimentale de măsurare. În experiențe avem nevoie de următoarele proprietăți distincte și separate pentru un aparat de înregistrare:

1. Să fie foarte *sensibil*. Pentru aceasta se scoate mai mult în relief efectul de rezonanță. Aparatele se întrebuințează în acest caz pentru oscilații exterioare foarte mici $\omega \ll 1$. Atunci $\alpha \approx \frac{1}{\varkappa^2}$ pentru $\omega \to \omega_0$. Așa dar $\frac{1}{\varkappa^2}$ poate fi considerat ca măsura sensibilității aparatului.

2. Trebuie eliminate deformările elongațiilor acului indicator, adică, să îndepărtăm pe cît posibil variațiile prea mari ale amplitudinii. Pentru asta putem considera valorile extreme date de $\alpha'(\omega) = 0$, pentru $\omega \to 0$, anume:

$$\underset{\omega=0}{\alpha'(\omega)} \approx -2\omega_0^2 + \varkappa^4 = 0.$$

Așa dar, putem alege amortizarea aparatului $\varkappa^2 = \sqrt{2}\,\omega_0$, după ce am ales frecvența proprie ω_0 ceva mai mare decît cea mai mare frecvență ω care poate interveni din afară. Prin urmare, se aleg valorile precedente care fac $\alpha' \to 0$, pentru că aceste valori lasă α constant pentru diferite frecvențe ω.

La fel se obțin valorile constantelor disponibile care lasă aproape invariabilă deplasarea în fază $\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)$; deci, $\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)'_{\omega \to 0} = 0$. Această condiție ne dă din:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega \varkappa^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

condiția $\varkappa^2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\omega_0$, dacă în dezvoltarea lui $\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)'$ anulăm coeficientul termenului în ω. Vedem că aceste două relații $\varkappa^2 = \sqrt{2}\,\omega_0$ și $\varkappa^2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\omega_0$ nu pot fi satisfăcute simultan, dar sînt destul de apropiate. De aceea, în practică, se ia o valoare medie, anume $\varkappa^2 = 1{,}12\,\omega_0$.

Scanned with OKEN Scanner

b) *Lărgirea liniilor spectrale* (teoria lui J. Holtsmark)[1]. În spectrul de linie al unor gaze (Natriul) s-a observat că, pentru presiuni mici, liniile de absorbție în gaz sînt înguste; cu cît însă se mărește presiunea gazului (Natriu) se observă o lărgire crescîndă a liniilor de absorbție. În aplicațiile oscilătorului liniar am văzut (§ 60 și 65) că putem concepe o explicare a lărgirii liniilor spectrale, ceea ce înseamnă o difuzare a lor, ca fiind datorită amortizării oscilațiilor proprii prin emisie spectrală, efect pus în evidență mai întîi de H. A. Lorentz și Max Planck. În cazul Natriului însă, lărgirea este așa de mare încît acest efect nu poate fi explicat cantitativ prin teoria lui Lorentz-Planck.

J. Holtsmark atribuie acest fenomen acțiunii reciproce dintre oscilatori (considerați ca atomi), prin efect de rezonanță.

Să presupunem că avem doi atomi identici (în gazul considerat), care oscilează cu frecvențe diferite ω_1 și ω_2, dar astfel încît fiecare acționează asupra celuilalt ca și cum ar exista o forță exterioară produsă de unul dintre oscilatori și solicitînd pe celălalt.

Holtsmark ia, după anumite considerații fizice, deduse din prezența cîmpului coulombian, forțe exterioare perturbatoare proporționale cu elongațiile respective ale oscilatorului care produce forța. În acest caz, ecuațiile mișcării sînt (doi dipoli cu axele paralele fixe):

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + m_1\omega_1^2 x_1 + \alpha x_2 &= 0, \\ m_2\ddot{x}_2 + m_2\omega_2^2 x_2 + \alpha x_1 &= 0, \end{aligned} \tag{5.30}$$

unde α este calculat prin considerații atomice de către Holtsmark și găsit egal cu:

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{e^2}{\gamma^3} \approx 10^4,$$

e fiind sarcina electrică și γ distanța relativă a pozițiilor de echilibru a celor doi oscilatori de masă m_1 și m_2. Din sistemul (5.30) făcînd substituția:

$$x_1 = C_1 e^{i\omega t}\ ; \quad x_2 = C_2 e^{i\omega t}\ ,$$

se deduce ecuația seculară pentru necunoscuta ω:

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 & \frac{\alpha}{m_1} \\ \frac{\alpha}{m_2} & \omega_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

care rezolvată ne dă:

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\left\{\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)^2 + 4\frac{\alpha^2}{m_1 m_2}}\right\}. \tag{5.31}$$

Putem distinge două cazuri:

1. $\left|\omega_1^2 - \omega_2^2\right| \gg \frac{\alpha}{2}$, atunci cuplarea celor doi oscilatori este foarte slabă și nu există efect de rezonanță, căci ω_1 și ω_2 sînt diferite. În acest caz avem, după (5.31):

$$\omega^2 = \omega_{1,2}^2 \pm \frac{\alpha^2}{m_1 m_2\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)},$$

așa dar o lărgire a liniei spectrale proporționale cu pătratul coeficientului α.

2. $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$. În acest caz avem efectul de rezonanță, iar după (5.31):

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \frac{\alpha}{\sqrt{m_1 m_2}}$$

---

[1]) Pentru verificarea experimentală a teoriei lui Holtsmark, se va consulta articolul lui *P. Bogen*, Ztschf. für Physik, 149, p. 62, 1957.

Scanned with OKEN Scanner

așa dar, un efect de ordinul puterii întîia a lui α, deci cu mult mai mare ca în primul caz, deoarece lărgirea liniei spectrale, măsurată în lungime de undă, este invers proporțională cu α. Acest rezultat este în conformitate cu experiența.

c) *Analogie electro-mecanică.* Circuit electric cu generator (echivalentul forței exterioare de întreținere $E_0 \sin \omega t$), condensator C (capacitate), rezistență ohmică R și inductanță $\mathfrak{L}$, în serie.

$$\mathfrak{L}\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E_0 \sin \omega t$$

unde $q = i$ (curentul în circuit); deci de forma ecuației oscilațiilor întreținute (5.28)

69. **Oscilații auto-întreținute.** O mașină cu abur și cu un cilindru al cărui piston execută o mișcare de du-te-vino (alternativă), deci o vibrație, respectiv, oscilație. Forța care întreține această oscilație este datorită aburului care apasă alternativ pistonul; avem o oscilație auto-întreținută.

În general, într-o oscilație auto-întreținută, forța alternativă care menține mișcarea este produsă de mișcarea însăși. Cînd încetează oscilația, forța alternativă dispare. Spre deosebire, într-o oscilație forțată (întreținută) forța alternativă există independent de mișcare și persistă dacă suprimăm oscilația.

O oscilație auto-întreținută poate fi privită ca o oscilație liberă cu rezistență negativă, — ceea ce face ca această forță în loc să descrească amplitudinea, o mărește.

Ecuația diferențială a unei astfel de oscilații este:

$$\ddot{x} - \varkappa^2\dot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad (5.32)$$

cu integrala:

$$x = e^{\frac{\varkappa^2 t}{2}}(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \qquad (5.33)$$

deci o oscilație cu amplitudine crescînd exponențial cu timpul (fig. 21). Așadar, teoretic, pentru un sistem liniar de oscilații auto-întreținute, amplitudinea va deveni infinit de mare cu timpul. În practică însă sistemul oscilant este supus simultan atît la rezistențe pozitive, cît și negative astfel încît amplitudinea nu devine așa de mare (infinită).

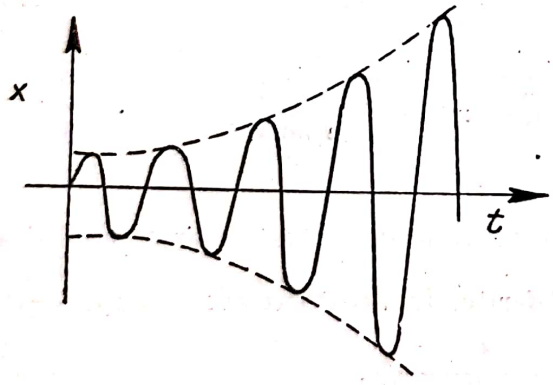

Fig. 21

Oscilațiile auto-întreținute prezintă importanță mai mare în electricitate decît în mecanică; — de exemplu, circuitul unei lămpi triode în regim oscilator. Bateria este sursa permanentă de energie, frecvența este determinată de valorile lui $\mathfrak{L}$ și C de la circuitul plăcii, iar rezistența negativă este reprezentată prin grilă.

70. **Oscilații cu caracteristici variabile.** Prin „caracteristici" înțelegem parametrii sistemului care intră în coeficienții ecuației de mișcare și care definesc structura sistemului și anume: masa, frecvența, constanta de elasticitate etc.

Scanned with OKEN Scanner

Un caz ilustrativ îl vom trata la § 100 despre oscilațiile scrînciobului ca pendul de lungime variabilă.

Forma generală a ecuației oscilațiilor cu caracteristici variabile în cazul unidimensional, fără forță exterioară de întreținere este:

$$\ddot{x} + \alpha(t)\,\dot{x} + \beta(t)\,x = 0 \tag{5.34}$$

unde x este elongația căutată, iar $\alpha(t)$ și $\beta(t)$ sînt funcții periodice de timp.

Prin substituția

$$x(t) = u(t)\,e^{-\frac{1}{2}\int \alpha(t)\,dt} \tag{5.35}$$

se ajunge la ecuația tipică pentru această problemă:

$$\ddot{u} + \gamma(t) \cdot u = 0 \tag{5.36}$$

unde:

$$\gamma(t) = \beta(t) - \frac{1}{2}\dot{\alpha}(t) - \frac{1}{4}\alpha^2(t).$$

Studiul unui sistem unidemensional cu caracteristici variabile se reduce la studiul ecuației (5.36), pentru care nu se poate găsi o integrală generală exprimabilă prin funcții cunoscute, ci se procedează, după caz, la căutarea unor soluții aproximative sau la deducerea aspectului soluției $x = x(t)$ din însăși ecuația (5.36). Soluția generală a unei astfel de ecuații se scrie formal:

$$u(t) = e^{\lambda t}\varphi(t) + e^{\mu t}\psi(t) \tag{5.37}$$

unde λ și μ sînt niște constante numite „coeficienții caracteristici" ai ecuației, iar $\varphi(t)$ și $\psi(t)$ sînt funcții periodice cu perioada T care trebuie determinate.

a) Să luăm ca exemplu oscilațiile laterale ale unui fir supus la acțiunea unei tracțiuni variabile, a cărui ecuație de mișcare se poate pune sub forma:

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 + \alpha \sin \omega t)\,x = 0. \tag{5.38}$$

Luăm ca soluție generală o expresie de tipul (5.37):

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t}\varphi(t) + C_2 e^{-\lambda t}\psi(t) \tag{5.39}$$

unde C_1 și C_2 sînt constante de integrare, φ și ψ funcții periodice de timp, avînd perioada $T = 2\pi/\omega$ și λ un coeficient independent de timp. Prin urmare, dacă $x = f(t)$ reprezintă deplasarea mobilului în momentul t, după scurgerea unui interval egal cu o perioadă T, deplasarea va fi:

$$f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = kf(t) \tag{5.40}$$

unde k este un număr care depinde de valoarea exponentului λ. Dacă cunoaștem mișcarea în timpul unei perioade, mișcarea în timpul perioadei următoare se obține înmulțind elongația din prima perioadă cu factorul

Scanned with OKEN Scanner

k, și așa mai departe. Deci timpul mișcării depinde de acest factor. Dacă $|k| < 1$ elongațiile tind către zero; oscilația se amortizează pînă la anihilare. Dacă $k > 1$ elongațiile cresc cu timpul, mișcarea devenind instabilă.

Pentru practică este deosebit de important a se cunoaște regiunile în care poate exista această instabilitate, căci apar oscilații care pot deveni periculoase.

Un caz interesant se prezintă cînd variația elasticității resortului oscilant constă numai dintr-o ondulație care se suprapune constantei elastice care rămîne invariabilă la fiecare semiperioadă.

Putem folosi ecuația oscilațiilor armonice neamortizate. Fie $\Delta\omega$ variația frecvenței datorită variației elasticității $\Delta\omega = \Delta k/m$, unde k este coeficientul forței elastice.

Pentru prima semiperioadă $0 < t < \pi/\omega$ ecuația de mișcare devine:

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 + \Delta\omega)\, x = 0. \tag{5.41}$$

Pentru a doua semiperioadă vom avea:

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 - \Delta\omega)\, x = 0. \tag{5.42}$$

Punînd $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \Delta\omega}$; $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \Delta\omega}$ soluțiile ecuațiilor (5.41) și (5.42) se scriu, respectiv:

$$x_1 = C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t \tag{5.43}$$

$$x_2 = C_3 \sin \omega_2 t + C_4 \cos \omega_2 t \tag{5.44}$$

unde C_1, C_2, C_3 și C_4 sînt patru constante de integrare, care urmează a fi determinate prin condițiile:

1) la sfîrșitul fiecărei semiperioade ($t = \pi/\omega$) soluțiile (5.43) și (5.44) trebuie să coincidă:

2) la sfîrșitul unei perioade complete ($t = 2\pi/\omega$) elongația și viteza trebuie să fie, după (5.40), multiplicate prin factorul k. Așadar, constantele de integrare se determină din condițiile:

$$x_1 = x_2;\ \dot{x}_1 = \dot{x}_2, \text{ pentru } t = \pi/\omega \tag{5.45}$$

$$(x_2)_{t=2\pi/\omega} = k\,(x_1)_{t=0};\quad (\dot{x}_2)_{t=2\pi/\omega} = k\,(\dot{x}_1)_{t=0}$$

Prima dintre ecuațiile (5.45) scrisă explicit are forma:

$$C_1 \sin \frac{\pi\omega_1}{\omega} + C_2 \cos \frac{\pi\omega_1}{\omega} - C_3 \sin \frac{\pi\omega_2}{\omega} - C_4 \cos \frac{\pi\omega_2}{\omega} = 0$$

deci o formă liniară și omogenă în constantele $C_1, \ldots C_4$.

Cum celelalte trei ecuații (5.45) sînt similare primei, ele vor conduce la alte trei ecuații liniare și omogene în $C_1, \ldots C_4$; așadar, vom avea în total un sistem de ecuații liniare și omogene, care, pentru a avea o soluție nenulă trebuie să aibă determinantul coeficienților nul. Scriind această expresie și dezvoltînd se obține ecuația pentru k:

$$k^2 - 2Nk + 1 = 0 \tag{5.46}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde am pus:

$$N = \cos\frac{\pi\omega_1}{\omega}\cos\frac{\pi\omega_2}{\omega} - \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2\omega_1\omega_2}\sin\frac{\pi\omega_1}{\omega}\sin\frac{\pi\omega_2}{\omega} \tag{5.47}$$

Rădăcinile ecuației (5.46) sînt:

$$k = N \pm \sqrt{N^2-1}. \tag{5.48}$$

După relația (5.48) rezultă că valoarea factorului k depinde de cantitatea N (5.47).

Pentru $N > 1$, una dintre rădăcinile (5.48) este superioară unității; deci mișcarea este instabilă.

Pentru $-1 < N < +1$, rădăcinile (5.48) sînt complexe; mișcarea este stabilă.

Pentru $N < -1$, mișcarea este instabilă, ca și în primul caz.

b) În unele probleme tehnice (motoare multicilindrice) se pune problema variabilității masei oscilante (rotor) prin variația momentului de inerție al pistonului (§ 161 ș.u.) Ecuația de mișcare devine:

$$m(t)\ddot{x} + kx = 0 \tag{5.49}$$

sau:

$$\ddot{x} + \omega^2(t)\,x = 0$$

unde am pus $\omega^2 = k/m(t)$, variabilă în timp, k fiind constant. O astfel de problemă concretă se pune în electricitate unde modularea în frecvență are o expresie de forma:

$$\omega(t) = (a + b\cos\omega t)^{-\frac{1}{2}}$$

unde a și b sînt constante date astfel încît $0 < |b| < a$.

În general, $\omega(t)$ trebuie să fie o funcție reală și continuă de timp. Lăsînd la o parte soluția banală $x(t) = 0$, pentru ecuația (5.49) se pune problema găsirii unei metode care să ne informeze asupra aspectului soluției $x = x(t)$, fără a scrie explicit această expresie. O astfel de metodă este dezvoltată de Aurel Wintner[1]).

Auto-oscilațiile conduc în general, la ecuații neliniare asupra cărora dăm o succintă expunere în paragraful următor.

71. **Noțiuni asupra oscilațiilor neliniare.** Se spune că un sistem oscilant nu este liniar cînd în ecuația diferențială a mișcării unul sau mai mulți dintre parametrii caracteristici (masa, coeficientul de elasticitate, frecvența etc.) depind de elongația x. Avem astfel un sistem cu caracteristici neliniare.

Problema apare în diferite cazuri practice, pentru care dăm cîteva exemple. În construcțiile de fontă sau de beton în încercările la tracțiune modulul de elasticitate descrește cînd deformația crește, deci frecvența scade cînd amplitudinea crește. Putem construi, de asemenea, pendule cu lungimi variabile, cum este scrînciobul [pe care-l examinăm mai tîrziu (§ 100)].

[1]) *Aurel Wintner*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, vol. VII, 1956 p. 350).

a) Redăm un exemplu de sistem neliniar simplu: oscilația de-a lungul axei x (orizontală) a unei mase m fixată la mijlocul unui fir întins AB vertical, de lungime $AB = 2l$, (v. fig. 22).

Fie T forța de tracțiune inițială în fir (tensiunea firului); x deplasarea momentană orizontală a masei m; A aria secțiunii transversale în fir; E modulul de elasticitate a firului. Lungirea specifică a firului datorită deplasării x este:

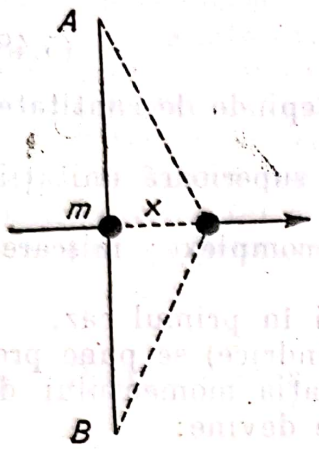

Fig. 22

$$\frac{\sqrt{l^2 + x^2} - l}{l} \approx \frac{x^2}{2l^2}.$$

Forța de tracțiune corespunzătoare în fir devine $T + AE\frac{x^2}{2l^2}$, iar forța de rapel care solicită masa m are expresia:

$$\left(T + AE\frac{x^2}{2l^2}\right)\frac{2x}{\sqrt{l^2 + x^2}} \approx \frac{2T}{l}x + AE\frac{x^3}{l^3}.$$

Ecuația diferențială a mișcării masei m devine astfel:

$$m\ddot{x} + \frac{2T}{l}x + AE\frac{x^3}{l^3} = 0. \tag{5.50}$$

Deci formă de oscilație neliniară, prin apariția termenului în x^3 pe lîngă termenul în x specific oscilațiilor armonice. Alt exemplu vom întîlni în problema pendulului matematic (§ 98).

b) Oscilațiile unui sistem în care forța elastică nu este liniară, fără amortizare, sînt date de o ecuație de forma:

$$\ddot{x} + \omega^2 f(x) = 0$$

unde $\omega^2 f(x)$ este forța de rapel, funcție de elongație, pe unitate de masă. Înmulțind cu $\dot{x}$ avem:

$$\dot{x}\ddot{x} + \omega^2 f(x)\dot{x} = 0$$

ceea ce prin integrare ne dă:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \omega^2 \int f(x)\,dx = 0. \tag{5.51}$$

Dacă cunoaștem $f(x)$ și condițiile inițiale putem calcula ușor viteza momentană cu ajutorul relației (5.51) care reprezintă de fapt ecuația energiei, termenul $\omega^2 \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ exprimînd energia potențială.

Timpul este dat de următoarea relație dedusă din (5.51):

$$t = -\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2\omega^2 \int_{x}^{x_0} f(x)\,dx}}.$$

Cazul simplu al oscilațiilor armonice, unde $f(x) = x$, se integrează imediat. Avem:

$$t = \int_{x}^{x_0} \frac{dx}{\omega \sqrt{x_0^2 - x^2}} = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{x}{x_0}$$

deci:

$$x = x_0 \cos \omega t.$$

c) Forma generală a ecuației oscilațiilor neliniare este:

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}, t) = 0 \tag{5.52}$$

pentru care nu există metode generale de integrare. De aceea, s-a recurs la metode prin aproximații succesive, — metode elaborate în special de N. Krîlov și N. Bogoliubov [1]).

Literatura problemei fiind foarte vastă, ne mărginim a reda cîteva cazuri specifice.

Una dintre metodele aproximațiilor succesive se aplică la integrarea ecuației cuasi-liniare.

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon f(x) = 0 \tag{5.53}$$

care este un caz particular al ecuației (5.52). Vom reda o metodă expusă de Timoshenko.

În ecuația (5.53) ε este un parametru foarte mic, iar $f(x)$ un polinom de grad cel puțin doi. Considerăm cazul cînd sistemul este simetric față de poziția de echilibru static ($x = 0$); putem lua atunci în $f(x)$ numai puteri impare de x.

Considerăm că cea mai simplă ecuație de acest tip este:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon x^3 = 0 \tag{5.54}$$

identică ecuației (5.50) pentru oscilațiile laterale ale firului întins.

Ne propunem să calculăm a doua aproximație a soluției ecuației (5.54). Parametrul ε fiind foarte mic, admitem, în primă aproximație, că x este o mișcare armonică de frecvență ω_1 care diferă puțin de ω. Punem:

$$\omega^2 = \omega_1^2 + (\omega^2 - \omega_1^2) \tag{5.55}$$

unde $\omega^2 - \omega_1^2 = \Delta\omega^2$ este o cantitate foarte mică. Introducînd această notație în (5.54) obținem:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x + \Delta\omega^2 \cdot x + \varepsilon x^3 = 0. \tag{5.56}$$

Presupunem că în momentul inițial $x = a$, $(t = 0)$, mișcarea armonică satisfăcînd condițiilor inițiale este dată de:

$$x = a \cos \omega_1 t. \tag{5.57}$$

Aceasta este prima aproximație a soluției ecuației (5.54) cu condițiile inițiale date.

---

[1]) *N. Krîlov și N. Bogoliubov*, „Introduction of non-linear Mechanics" Princeton Univ. Press. 1947.

Introducem valoarea (5.57) a lui x în ecuația (5.56); se obține:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = -a\Delta\omega^2 \cos \omega_1 t - \varepsilon a^3 \cos^3 \omega_1 t$$

de unde, avînd în vedere identitatea:

$$4 \cos^3 \omega_1 t = \cos 3\omega_1 t + 3 \cos \omega_1 t$$

rezultă ecuația:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = -\left(a\Delta\omega^2 + \frac{3\varepsilon a^3}{4}\right) \cos \omega_1 t - \frac{\varepsilon a^3}{4} \cos 3\omega_1 t. \qquad (5.58)$$

Avem astfel ecuația unei oscilații forțate în mișcarea armonică fără amortizare. Primul termen din membrul doi al ecuației (5.58) constituie un element perturbator cu aceeași frecvență ca și oscilația proprie a oscilatorului. Aceasta conduce, după cum știm, la fenomenul de rezonanță care trebuie eliminat. În acest scop, punem $a\Delta\omega^2 + \frac{3\varepsilon a^3}{4} = 0$,

deci:

$$\omega_1^2 = \omega^2 + \frac{3\varepsilon a^2}{4}. \qquad (5.59)$$

Soluția generală a ecuației (5.58) se poate scrie, avînd în vedere (5.59):

$$x = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t + \frac{\varepsilon a^3}{32\,\omega_1^2} \cos 3\omega_1 t$$

Condițiile inițiale ne dau:

$$C_1 = a - \frac{\varepsilon a^3}{32\,\omega_1^2} \quad \text{și} \quad C_2 = 0$$

astfel încît soluția generală în a doua aproximație este:

$$x = \left(a - \frac{\varepsilon a^3}{32\,\omega_1^2}\right) \cos \omega_1 t + \frac{\varepsilon a^3}{32\,\omega_1^2} \cos 3\omega_1 t. \qquad (5.60)$$

Așadar, prin prezența în ecuația (5.54) a termenului în x^3 soluția nu mai este armonică simplă, introducîndu-se o armonică superioară $3\omega_1 t$; curba reprezentativă nu mai este sinusoidală, deviația ei de la sinusoida oscilației armonice depinzînd de factorul ε. După relația (5.59) se constată că nici oscilația proprie nu mai este constantă, ci depinde de amplitudinea a și crește cu această amplitudine pentru ε pozitiv.

Alte exemple se găsesc în publicațiile de specialitate unde sînt expuse diversele metode de integrare a ecuațiilor de tip (5.54).

d) Redăm teoria elementară a aproximațiilor succesive, după K r î l o v și B o g o l i u b o v, trimițînd pentru dezvoltare la lucrarea citată. Considerăm ecuația cuasi-armonică de forma (5.52):

$$\ddot{x} + \nu^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = 0 \qquad (5.61)$$

unde ν este frecvența proprie (nu $\omega = 2\pi\nu$), iar ε un factor foarte mic. Se observă că nu poate fi întrebuințată metoda clasică a aproximațiilor succesive, după P o i s s o n, care conduce la termeni seculari de forma t înmulțit

cu o funcție trigonometrică. De aceea, metoda propusă de acești autori diferă de cea clasică.

Fie, pentru $\varepsilon = 0$, soluția armonică:

$$x = a \sin (\nu t + \varphi) \tag{5.62}$$

$$\dot{x} = a\nu \cos (\nu t + \varphi) \tag{5.63}$$

unde amplitudinea a și constanta de fază φ sînt constante.

Considerăm acum pe a și φ drept noi necunoscute, funcții de timp care urmează a fi determinate din condiția ca soluțiile (5.62) și 5.63) să satisfacă ecuația (5.61). Se obține:

$$\dot{x} = \dot{a} \sin (\nu t + \varphi) + a \dot{\varphi} \cos (\nu t + \varphi) + a\nu \cos (\nu t + \varphi)$$

de unde, ținînd seamă de (5.63) rezultă:

$$\dot{a} \sin (\nu t + \varphi) + a \dot{\varphi} \cos (\nu t + \varphi) = 0. \tag{5.64}$$

Din aceste relații se deduce:

$$\ddot{x} = \nu \dot{a} \cos (\nu t + \varphi) - \nu a \dot{\varphi} \sin (\nu t + \varphi) - \nu^2 a \sin (\nu t + \varphi)$$

și deci, după (5.61):

$$\nu \dot{a} \cos (\nu t + \varphi) - \nu a \dot{\varphi} \sin (\nu t + \varphi) = - \varepsilon f [a \sin (\nu t + \varphi), a\nu \cos (\nu t + \varphi)] \tag{5.65}$$

Această ecuație combinată cu (5.64) ne dă ecuațiile:

$$\dot{a} = - \frac{\varepsilon}{\nu} f [a \sin (\nu t + \varphi), a\nu \cos (\nu t + \varphi)] \cos (\nu t + \varphi) \tag{5.66}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{a\nu} f [a \sin (\nu t + \varphi), a\nu \cos (\nu t + \varphi)] \sin (\nu t + \varphi). \tag{5.67}$$

Prin urmare, în locul unei singure ecuații diferențiale de ordinul doi (5.61) în necunoscuta x, avem două ecuații de primul ordin în necunoscutele a și φ. Observăm că funcția f admite perioada $2\pi/\nu = T$; și că atît a cît și φ sînt proporționale cu ε, ceea ce înseamnă că sînt funcții care variază foarte încet cu timpul într-o perioadă T și că într-o primă aproximație le putem considera constante.

Să construim aproximația soluțiilor ecuațiilor (5.66) și (5.67). Considerăm dezvoltările în serii F o u r i e r:

$$f (a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \cos \varphi = K_0 + \sum_{n>0} [K_n (a) \cos n\varphi + L_n (a) \sin n\varphi] \tag{5.68}$$

$$f (a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \sin \varphi = P_0 + \sum_{n>0} [P_n (a) \cos n\varphi + Q_n (a) \sin n\varphi] \tag{5.69}$$

Coeficienții seriilor se calculează după metoda cunoscută din teoria seriilor F o u r i e r; pentru primii coeficienți se obțin expresiile:

$$K_0 (a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f (a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \cos \varphi \cdot d\varphi \tag{5.70}$$

$$P_0 (a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f (a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \sin \varphi \cdot d\varphi. \tag{5.71}$$

Folosind aceste dezvoltări putem pune expresiile (5.66) și (5.67) sub forma:

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{\nu} K_0(a) - \frac{\varepsilon}{\nu} \sum_{n>0} [K_n(a) \cos n(\nu t + \varphi) + L_n(a) \sin n(\nu t + \varphi)] \quad (5.72)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{\nu a} P_0(a) + \frac{\varepsilon}{\nu a} \sum_{n>0} [P_n(a) \cos n(\nu t + \varphi) + Q(a) \sin n(\nu t + \varphi)] \quad (5.73)$$

Integrăm aceste expresii în intervalul $(t, t + T)$, luînd pe a și φ constanți pentru $t = t_0$. Se obține:

$$\frac{a(t+T) - a(t)}{T} = -\frac{\varepsilon}{\nu} K_0[a(t)]; \quad \frac{\varphi(t+T) - \varphi(t)}{T} = \frac{\varepsilon}{\nu a} P_0[a(t)].$$

Întrucît diferențele $a(t + T) - a(t)$ și $\varphi(t + T) - \varphi(t)$ sînt mici, putem scrie în prima aproximație:

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{\nu} K_0(a); \qquad \dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{\nu a} P_0(a) \quad (5.74)$$

ceea ce se obține făcînd valorile medii ale expresiilor (5.72) și (5.73) în raport cu timpul.

Să considerăm variabila $\psi = \nu t + \varphi$, în locul lui x. Avem:

$$\dot{\psi} = \nu + \frac{\varepsilon}{\nu a} P_0(a). \quad (5.75)$$

Pentru a scrie soluția explicită introducem în (5.74) și (5.75) expresiile (5.70) și (5.71). Soluția ecuației (5.61) este deci, în prima aproximație:

$$x = a \sin \psi$$

unde a și ψ sînt determinați de ecuațiile (5.74) și (5.75).

e) Dacă funcția f din (5.61) este funcție numai de x, atunci ecuațiile (5.74) devin:

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi) \cos \varphi \, d\varphi.$$

$$\dot{\psi} = \omega(a) = \nu + \frac{\varepsilon}{2\pi a \nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi) \sin \varphi \, d\varphi. \quad (5.76)$$

Punînd:

$$\Phi(x) = \int_0^x f(x) \, dx$$

rezultă:

$$\int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi) \cos \varphi \, d\varphi = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{d\Phi(a \sin \varphi)}{d\varphi} = 0$$

deci:

$$\dot{a} = 0; \qquad a = a_0 \text{ (constant)};$$

iar:

$$\psi = \omega(a)\, t + \psi_0$$

unde ψ_0 este constanta de fază, egală cu valoarea inițială a lui ψ.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția aproximativă a ecuației, în acest caz, devine:

$$x = a \sin [\omega (a)t + \psi_0] \tag{5.77}$$

ceea ce arată că neliniaritatea are ca efect de a face frecvența să depindă de amplitudine.

Ridicînd la pătrat expresia (5.76) se obține o formulă comodă pentru frecvență:

$$\omega^2 (a) = \nu^2 + \frac{\varepsilon}{a\pi} \int_0^{2\pi} f (a \sin \varphi) \sin \varphi \, d\varphi. \tag{5.78}$$

Exemplu. Ecuația pendulului pentru oscilații nu prea mici și nici prea mari (§ 99):

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}\left(a - \frac{x^3}{6}\right) = 0 \tag{5.79}$$

unde g este accelerația greutății și l lungimea pendulului, ne dă:

$$\omega^2 (a) = \nu^2 - \frac{g}{l}\frac{a^2}{6\pi} \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi \, d\varphi = \frac{g}{l}\left(1 - \frac{a^2}{8}\right).$$

Cum amplitudinea crește, rezultă că frecvența descrește și perioada crește, ceea ce rezultă din formula:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{1}{1 - \frac{a^2}{16}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{a^2}{16}\right).$$

De exemplu, pentru $a = 30°$, se obține $T = 1{,}014 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

f) Nu este locul să insistăm și asupra altor metode de integrare cum sînt: metoda amplitudinilor variabile, metoda reprezentării în spațiul fazelor etc. care depășește cadrul și scopul lucrării. În capitolul de teoria relativității (§ 121 ș.u.) vom expune problema oscilatorului relativist care conduce la o ecuație de oscilație neliniară.

72. **Problema balistică clasică.** Un punct material greu este aruncat din origină cu o viteză inițială $\bar{v}_0$. Punctul se va mișca fiind solicitat de forța greutății $-mg\bar{k}$ ($\bar{k}$ fiind vectorul unitate pe verticală) și va suferi în timpul mișcării o rezistență amortizantă, din cauza aerului, sub forma unei forțe de rezistență a aerului, pentru care se ia ca expresie o funcție de viteză în fiecare moment, însă *opusă* mișcării:

$$\bar{R} = -f(v)\,\bar{\mathrm{t}},$$

unde $\bar{\mathrm{t}} = \frac{d\bar{r}}{ds}$ este vectorul unitate al tangentei (Anexa I, § 27); ceea ce revine a scrie $\bar{R} = -\alpha (v)\ \bar{v}$. Mai exact $\alpha (v)$ depinde și de temperatura absolută T; precum s-a arătat (§ 43), Langevin găsește că această funcție este de forma $a\,p\,f\left(\frac{v}{\sqrt{T}}\right)$, p fiind presiunea aerului și a o constantă[1]).

[1]) O aplicație interesantă se găsește la *Caius Iacob* „Despre calculul traiectoriilor bombelor de avion" (Revista Matematică din Timișoara, an. 24; p. 63; 1944).

Forța de rezistență a aerului nu este cunoscută, fiind o funcție complicată de viteză. Experiența arată că pentru viteze mai mici ca 240 m/s rezistența aerului este aproximativ proporțională cu v^2; pentru viteze mai mari, rezistența crește foarte repede cu viteza; cea mai repede creștere o suferă în vecinătatea vitezei sunetului 330 m/s; pentru viteze și mai mari ajunge iar proporțională cu v^2. În general, cînd corpul zvîrlit nu este sferic, este posibil chiar, ca rezistența aerului să-l scoată din planul traiectoriei. În problema balistică clasică se face abstracție de variația lui g cu altitudinea.

73. Traiectoria plană în problema balistică

Fie ecuația mișcării:

$$m\ddot{\bar{r}} = -mg\bar{k} - f(v)\frac{\bar{v}}{v} \tag{5.80}$$

sau, punînd pentru prescurtare $f(v)/v = \alpha(v)$, derivînd în raport cu timpul și scriind rezultatul sub formă diferențială, obținem:

$$m\,d^3\bar{r} + \alpha(v)\,d^2\bar{r} + \alpha'(v)\,\dot{v}\,d\bar{r} = 0. \tag{5.81}$$

Pe de altă parte se știe (Anexa I, § 27) că torsiunea este dată de relația:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{(d\bar{r}, d^2\bar{r}, d^3\bar{r})}{(d\bar{r} \times d^2\bar{r})^2}.$$

Ecuația (5.81) este o relație liniară și omogenă în $d\bar{r}$, $d^2\bar{r}$ și $d^3\bar{r}$, care sînt elementele unei linii a determinantului de la numărătorul lui $1/\tau$. Această proprietate spune că determinantul este identic nul. Așa dar, torsiunea este nulă. Ceea ce înseamnează că traiectoria este plană.

Planul curbei este determinat de viteza inițială $\bar{v}_0$ și de direcția fixă $\bar{k}$ a greutății. În adevăr, din relația lui F r e n e t (Anexa I, § 27) sub condiția enunțată, rezultă:

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \frac{1}{\tau}\bar{n} = 0$$

deci versorul binormalei $\bar{b} = \bar{t} \times \bar{n}$ este constant. Planul osculator (determinat de $\bar{t}$ și $\bar{n}$) este deci invariabil și conține curba traiectorie. Așa dar:

$$\bar{t} \times \bar{n} = \bar{t}_0 \times \bar{n}_0$$

unde $\bar{t}_0$ este vectorul unitar al vitezei inițiale $\bar{v}_0$, iar $\bar{n}_0$ este proporțional cu $d^2\bar{r}$, deci cu accelerația și, după ecuația de mișcare, proporțional cu vectorul unitar al forței aplicate $\bar{k}$. Rezultă proprietatea enunțată.

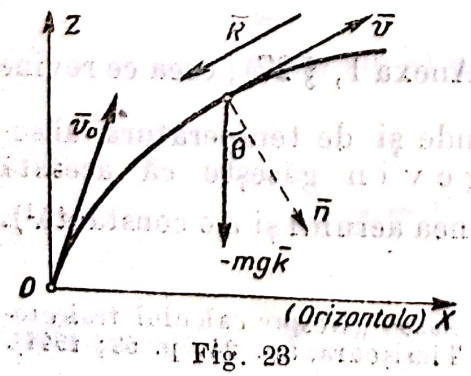

Fig. 23

74. Integrarea ecuației mișcării balistice.

Pentru problema de față este mai comod să ne folosim de coordonatele normale, (raportate la triedrul principal), descompunînd forța pe normala principală și tangentă (fig. 22).

Ecuația mișcării se descompune, atunci, în următoarele două ecuații pe tangentă:

$$m\dot{v} = -mg \sin \theta - f(v) \tag{5.82}$$

și pe normală:

$$\frac{mv^2}{\rho} = mg \cos \theta, \tag{5.83}$$

θ fiind unghiul tangentei cu orizontala.

Ecuația (5.83) ne arată că avem $\cos \theta \geqslant 0$, deci $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Cum forța $-mg\bar{k}$ este negativă, normala principală $\bar{n}$ este dirijată în sens contrar lui $\bar{k}$, prin urmare curba are concavitatea spre $-\bar{k}$, deci unghiul θ este descrescător. Așa dar $\frac{d\theta}{dt} < 0$. Raza de curbură va fi dată de relația cunoscută:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\theta}{ds} = -\frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{1}{v}. \tag{5.84}$$

Înlocuind în (5.83) obținem:

$$-v\frac{d\theta}{dt} = g \cos \theta. \tag{5.85}$$

Divizînd (5.82) cu (5.85) căpătăm ecuația:

$$\frac{dv}{v} = \frac{mg \sin \theta + f(v)}{mg \cos \theta} d\theta. \tag{5.86}$$

Presupunem că putem integra această ecuație și obținem $v = \varphi(\theta)$. Rezultă, după (5.85)

$$dt = -\frac{\varphi(\theta)\, d\theta}{g \cos \theta}, \tag{5.87}$$

sau

$$t = -\frac{1}{g}\int \frac{\varphi(\theta)}{\cos \theta} d\theta.$$

Pentru a găsi pe x și z observăm că $dx = ds \cos \theta$ și $dz = ds \sin \theta$; sau $dx = v \cos \theta\, dt$ și $dz = v \sin \theta\, dt$. Înlocuind pe dt din (5.87) căpătăm:

$$x = -\frac{1}{g}\int \varphi^2(\theta)\, d\theta \text{ și } z = -\frac{1}{g}\int \varphi^2(\theta) \operatorname{tg} \theta\, d\theta, \tag{5.88}$$

relații care pot fi considerate ca ecuațiile parametrice ale traiectoriei.

Integrarea efectivă și ecuația explicită nu se poate exprima pentru cazul general al funcției $f(v)$, întrucît nu se cunoaște forma explicită a funcției $f(v)$.

Vom studia mai jos cazul particular cînd rezistența aerului este nulă.

75. **Rezistența aerului neglijabilă.** $f(v) = 0$; în acest caz ecuația (5.86) ne dă:

$$v = \varphi(\theta) = \frac{v_0 \cos \theta_0}{\cos \theta}.$$

unde v_0 și θ_0 sînt valorile inițiale pentru $t = 0$.

Ecuațiile (5.88) se pot integra efectiv; se obține:

$$x = -\frac{v_0^2 \cos^2 \theta_0}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -\frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \theta_0)$$

$$z = -\frac{v_0^2 \cos^2 \theta_0}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta = -\frac{v_0^2 \cos^2 \theta_0}{g} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{\cos^2 \theta_0} \right)$$

de unde, eliminînd pe θ, rezultă ecuația traiectoriei:

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} \cdot x^2 + \operatorname{tg} \theta_0 \cdot x; \qquad (5.89)$$

care este o parabolă trecînd prin origina O. Punctul culminant al parabolei se capătă făcînd $dz = 0$, sau $\theta = 0$. Coordonatele acestui punct vor fi:

$$x_1 = \frac{v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0; \quad z_1 = -\frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin^2 \theta_0.$$

Deplasînd originea axelor de coordonate în acest punct, ecuația parabolei ia forma:

$$x^2 = -\frac{2v_0^2 \cos^2 \theta_0}{g} z$$

cu parametrul $p = \dfrac{v_0^2 \cos^2 \theta_0}{g}$.

Se vede imediat că mișcarea se efectuează astfel încît de-a lungul axei x mișcarea este uniformă $v \cos \theta = v_0 \cos \theta_0$, iar de-a lungul axei z mișcarea este uniform accelerată (ca și mișcarea de cădere a corpurilor) $v \sin \theta = v_0 \sin \theta_0 - gt$.

Distanța maximă la care poate ajunge proiectilul va fi dată de $z = 0$ ($\theta = -\theta_0$); așa dar:

$$x = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 2x_1.$$

Această distanță se numește bătaia proiectilului. Ea este maximă pentru $\theta_0 = 45°$.

Toate parabolele obținute menținînd v_0 constant, dar variind pe θ_0, au ca înfășurătoare parabola:

$$z = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g};$$

[se obține eliminînd θ_0 între (5.89) și derivata ei în raport cu θ_0]. Această parabolă se numește *curba de siguranță*.

76. **Cazul general.** Admitem că forța de rezistență a aerului are forma $\overline{R} = -f(v)\,\overline{t}$. Se pot deduce unele proprietăți ale curbei balistice. În primul rînd din ecuația (5.83) rezultă că v este finită și diferită de zero;

în adevăr, θ fiind mereu descrescător și $> -\frac{\pi}{2}$, avem, pentru t finit, $\theta > -\frac{\pi}{2}$ și $\cos\theta > 0$.

Valoarea extremă a lui v va fi dată de ecuația $\frac{dv}{dt} = 0$, adică:

$$f(v) = -mg \sin\theta. \tag{5.90}$$

Admitem că $f(v)$ este o funcție monoton crescătoare de v. Aceasta este o ipoteză plauzibilă, căci rezistența aerului se dovedește experimental a fi funcție crescătoare de viteza mobilului cel puțin pentru o regiune limitată de valori date vitezei.

Deoarece v este finit, din ecuația:

$$-v\frac{d\theta}{dt} = g\cos\theta$$

rezultă că și θ are o valoare extremă pentru $\frac{d\theta}{dt} = 0$ sau $\cos\theta = 0$. Așadar, (θ fiind descrescător) $\lim\limits_{t\to\infty}\theta = -\frac{\pi}{2}$. Deci tangenta la curba balistică tinde să devină paralelă cu axa z după un timp îndepărtat (fig. 24). Pentru $\theta = -\frac{\pi}{2}$, din ecuația (5.90) rezultă:

$$f(v) = mg$$

ecuație verificată pentru o singură „valoare critică" $v = v_c$, fiindcă $f(v)$ este funcție crescătoare.

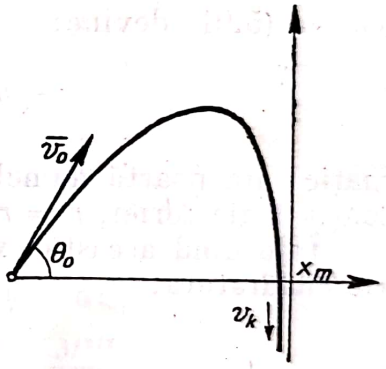

Fig. 24

Pe de altă parte din:

$$x = -\frac{1}{g}\int_{\theta_0}^{\theta}\varphi^2(\theta)\,d\theta$$

rezultă:

$$\lim_{t\to 0} x = -\frac{1}{g}\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\varphi^2(\theta)\,d\theta;$$

și cum $\varphi(\theta)$ rămîne finită pentru $t\to\infty$, rezultă $\lim\limits_{t\to\infty} x = x_m$ finită. Așadar curba balistică este o curbă de natură asemănătoare parabolei mișcării fără rezistența aerului, însă strînsă spre o asimptotă verticală la distanța finită x_m, pe care corpul cade cu viteza constantă v_c.

În realitate, experiența arată și o deviație a proiectilului din planul vertical, deviație care nu poate fi explicată prin legile mecanicii punctului, căci intervine problema complicată de rotație a proiectilului conceput ca un corp rigid și nu ca un punct material.

77. **Studiul mișcărilor unui punct material sub acțiunea unei forțe centrale.** Una din cele mai importante mișcări în natură este mișcarea sub acțiunea forțelor centrale.

Dacă forța $\bar{F} = F\frac{\bar{r}}{r}$ trece mereu printr-un punct fix O, mișcarea este plană, căci $\bar{r} \times \bar{F}$ fiind nul, momentul cinetic $\bar{r} \times \bar{p}$ în raport cu punctul fix O este constant. În planul traiectoriei, vom raporta mișcarea la coordonate polare luînd polul în punctul fix. Ecuația mișcării se deduce din ecuația generală (v. § 19):

$$m\{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{\rho} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\bar{\varepsilon}\} = \bar{F}$$

care se descompune în:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F \quad \text{și} \quad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0. \tag{5.91}$$

Din a doua ecuație (5.91) rezultă integrala primă (integrala ariilor)

$$r^2\dot{\theta} = C = |\bar{r} \times \bar{v}|_0 = r_0 v_0 \sin(\bar{r}_0, \bar{v}_0). \tag{5.92}$$

Să transformăm prima ecuație (5.91) ținînd seama de relația (5.92). Avem, notînd cu accente derivatele în raport cu θ,

$$\dot{r} = \dot{\theta}r'; \text{ apoi } \ddot{r} = \dot{\theta}(\dot{\theta}r')' = \frac{C}{r^2}\left(\frac{C}{r^2}r'\right)' = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{1}{r}\right)''.$$

Ecuația (5.91) devine:

$$-m\frac{C^2}{r^2}\left\{\left(\frac{1}{r}\right)'' + \frac{1}{r}\right\} = F(r, \theta) \tag{5.93}$$

ecuație care poartă numele de *formula lui Binet*. Prin integrare se obține ecuația traiectoriei, $r = r(\theta, c_1, c_2)$.

Înlocuind această expresie a lui r în ecuația (5.92) obținem timpul, prin cuadratura:

$$t = \frac{1}{C}\int r^2 d\theta. \tag{5.94}$$

78. **Atracția invers proporțională cu pătratul distanței.** Expresia legii fizice a *atracției universale* dată de N e w t o n, este:

$$\bar{F} = -f\frac{Mm}{r^3}\bar{r},$$

unde M și m sînt masele pozitive ale corpului atrăgător și a celui atras, $f = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ este constanta atracției universale avînd dimensiunea $(L^3 T^{-2} M^{-1})$, iar r este distanța dintre cele două corpuri.

Ecuația lui B i n e t (5.93) devine, punînd $\frac{C^2}{fM} = p$,

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}.$$

Integrala generală a acestei ecuații diferențiale liniare de ordinul al doilea, este:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + A\cos(\theta - \alpha). \tag{5.95}$$

A și α fiind constante de integrare, determinate de condițiile inițiale. Ecuația (5.95) este ecuația unei conice cu un focar în O. În adevăr, se știe că ecuația unei conice cu un focar în O și excentricitatea ε este:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos(\theta - \alpha). \tag{5.96}$$

Comparînd (5.95) și (5.96) deducem excentritatea traiectoriei:

$$\varepsilon = pA = \frac{C^2}{fM} A.$$

Să exprimăm constantele în funcție de condițiile inițiale.

Am găsit $C = r_0 v_0 \sin(\bar{r}_0, \bar{v}_0)$; luînd $\theta_0 = 0$ rezultă din (5.95):

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{p} + A\cos\alpha. \tag{5.97}$$

Unghiul $\theta - \alpha = \omega$ se numește *anomalie adevărată*.

Unghiul dintre viteză și vectorul de poziție este dat de:

$$\operatorname{tg}(\bar{r}, \bar{v}) = r\frac{d\theta}{dr}$$

sau din (5.94):

$$\operatorname{tg}(\bar{r}, \bar{v}) = \frac{1}{Ar\sin(\theta - \alpha)}$$

așa încît ($\theta = 0$):

$$-A\sin\alpha = \frac{1}{r_0}\operatorname{ctg}(\bar{r}_0, \bar{v}_0). \tag{5.98}$$

Din (5.97) și (5.98) deducem pe A și α. Obținem:

$$A^2 = \frac{f^2M^2\varepsilon^2}{C^4} = \frac{1}{r_0^2\sin^2(\bar{r}_0, \bar{v}_0)} - \frac{2Mf}{C^2 r_0} + \frac{M^2f^2}{C^4},$$

de unde:

$$(\varepsilon^2 - 1)\frac{M^2f^2}{C^4} = \frac{1}{r_0^2\sin^2(\bar{r}_0, \bar{v}_0)} - \frac{2Mf}{C^2 r_0}.$$

Rezultă:

$$(\varepsilon^2 - 1)\frac{M^2f^2}{C^2} = v_0^2 - \frac{2Mf}{r_0};$$

relație care determină excentricitatea ε a conicei.

Integrala energiei ne dă, avînd în vedere că sistemul de forțe este conservativ și însemnînd prin h constanta din ecuația energiei:

$$v^2 = -\frac{2}{m}\int f\frac{Mm}{r^2}dr + h, \tag{5.99}$$

căci funcția potențială este $U = f\frac{Mm}{r^2}$; urmează:

$$v^2 = \frac{2Mf}{r} + h \qquad (5.100)$$

deci:

$$v_0^2 = \frac{2Mf}{r_0} + h;$$

de unde rezultă că expresia care dă excentricitatea se simplifică:

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{hC^2}{f^2M^2}. \qquad (5.101)$$

Din (5.101) urmează că, dacă $h < 0$, traiectoria este o *elipsă*; dacă $h = 0$, traiectoria este o *parabolă* și dacă $h > 0$, traiectoria este o *hiperbolă*. Forma curbei depinde, așadar, numai de v_0 și r_0, ea nu depinde și de unghiul $(\bar{r}_0, \bar{v}_0)$.

79. **Mișcarea eliptică.** Pentru o elipsă, dacă a este semiaxa mare, avem $p = a(1 - \varepsilon^2)$, sau $a = -\frac{M}{h} f$. Calculul timpului se face cu ajutorul ecuației (5.94).

Din (5.96) deducem:

$$\frac{dr}{r^2} = \frac{\varepsilon}{p} \sin(\theta - \alpha)\, d\theta \text{ și } \cos(\theta - \alpha) = \frac{1}{\varepsilon r}(p - r);$$

deci:

$$r^2\, d\theta = \pm \frac{pr\, dr}{\sqrt{\varepsilon^2 r^2 - (p - r)^2}};$$

sau, cum:

$$p = a(1 - \varepsilon^2)$$

rezultă:

$$\varepsilon^2 r^2 - (p - r)^2 = (1 - \varepsilon^2)[a^2\varepsilon^2 - (a - r)^2];$$

sau încă:

$$\varepsilon^2 r^2 - (p - r)^2 = [(\varepsilon + 1)r - a(1 - \varepsilon^2)]\,[(\varepsilon - 1)r + a(1 - \varepsilon^2)];$$

atunci, rezultă din (5.94)

$$t = \pm \sqrt{\frac{a}{Mf}} \int \frac{r\, dr}{\sqrt{a^2\varepsilon^2 - (a - r)^2}}. \qquad (5.102)$$

Limitele integralei le fixăm ulterior.

Dar, cum timpul este crescător, vom lua semnul $(+)$ cînd r crește de la $a(1 - \varepsilon)$ la $a(1 + \varepsilon)$ și semnul $(-)$, cînd r descrește.

Se introduce, mai convenabil, un parametru u prin substituția

$$a - r = a\varepsilon \cos u, \text{ cu } r = a(1 - \varepsilon \cos u), \qquad (5.103)$$

unde u variază în același sens cu θ. Fie $C > 0$, deci θ și u crescători. Presupunem $u = 0$, cînd mobilul trece întîia oară prin vîrful A al elipsei (cel mai apropiat de focar; $\theta = \alpha$). Punctul A se numește (în cazul sistemului planetar) *periheliu*; (A', opus, se numește *afeliu*). Avem:

$$\varepsilon \cos(\theta - \alpha) = \frac{p}{r} - 1$$

Scanned with OKEN Scanner

sau:

$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{\cos u - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos u}$$

de unde:

$$\frac{1 - \cos(\theta - \alpha)}{1 + \cos(\theta - \alpha)} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \cdot \frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}$$

adică:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta - \alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}; \tag{5.104}$$

cînd $0 \leqslant u \leqslant \pi$ atunci $\alpha \leqslant \theta \leqslant (\alpha + \pi)$
„ $\pi \leqslant u \leqslant 2\pi$ „ $(\alpha + \pi) \leqslant \theta \leqslant (\alpha + 2\pi)$.
Dacă $\theta = 0$, u este negativ, $-u_0$ este dat de:

$$\operatorname{tg} \frac{u_0}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Din relația (5.94) deducem expresia pentru timpul:

$$t = a \sqrt{\frac{a}{Mf}} \int_{u_0}^{u} (1 - \varepsilon \cos u)\, du.$$

Însemnînd cu t_α momentul cînd punctul mobil trece pentru prima oară prin vîrful elipsei, putem scrie:

$$t_\alpha = a \sqrt{\frac{a}{Mf}} \int_{u_0}^{0} (1 - \varepsilon \cos u)\, du$$

deci:

$$\frac{1}{a} \sqrt{\frac{Mf}{a}} (t - t_\alpha) = \int_{0}^{u} (1 - \varepsilon \cos u)\, du$$

sau:

$$\frac{1}{a} \sqrt{\frac{Mf}{a}} (t - t_\alpha) = u - \varepsilon \sin u. \tag{5.105}$$

Această ecuație este cunoscută sub numele de „*ecuația lui Kepler*". Ea permite să calculăm u ca funcție implicită de timp. Diferitele metode analitice pentru rezolvarea acestei ecuații se găsesc studiate în diferite tratate de analiză matematică, interesînd îndeosebi mecanica cerească.

Perioada unei revoluții, T, va fi dată de $u = 2\pi$, sau $t = T + t_\alpha$. Rezultă

$$\frac{1}{a} \sqrt{\frac{Mf}{a}}\, T = 2\pi, \quad \text{deci} \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Mf}. \tag{5.106}$$

Scanned with OKEN Scanner

80. **Aplicație la mecanica cerească.** „*Legile lui Kepler*“. Din observațiile acumulate de Tycho Brache (în 1609), astronomul curții din *Praga*, Kepler, formulează următoarele legi empirice pentru mișcările planetelor în jurul soarelui:

1) „Planetele descriu în mișcarea lor în jurul soarelui elipse“; această lege este stabilită în calculul precedent și anume ea este exprimată prin ecuația traiectoriei (formula 5.96):

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos(\theta - \alpha)$$

completată cu condițiile:

$$p = a(1-\varepsilon^2),\quad a = -\frac{Mf}{h},\quad \varepsilon^2 = 1 + \frac{hC^2}{M^2f^2} \text{ și } h = v_0^2 - \frac{2Mf}{r_0} < 0.$$

2) „Aria măturată de vectorul de poziție a planetei față de soare (ca pol), este proporțională cu timpul în care s-a efectuat mișcarea“. Această lege este cuprinsă în teorema ariilor dată de formula (5.93):

$$r^2\dot{\theta} = C$$

care ne spune că, în unitatea de timp, vectorul de poziție descrie o arie constantă.

3) „Pătratele timpurilor unei revoluții complete sînt proporționale, la diferite planete, cu cuburile semiaxelor mari“. Această lege este exprimată în ultima formulă (5.106):

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Mf}$$

M fiind masa soarelui.

Vedem, așadar, că legile lui Kepler sînt niște consecințe ale problemei studiate mai sus: mișcarea centrală sub acțiunea unei forțe atractive invers proporțională cu pătratul distanței. Această descoperire este opera lui Isaac Newton.

Gravitația universală. Newton constată anume, că legea de atracție este valabilă nu numai în cazul mișcării planetelor ci și pentru comete și sateliți. Din această observație el deduce că soarele produce în jurul lui un cîmp de forțe:

$$\overline{F} = -f\frac{Mm}{r^3}\overline{r},$$

unde m este masa corpului atras, iar M masa soarelui. Newton însă nu vorbea de *cîmp*, considerînd că forțele acționează instantaneu, la distanță. Generalizînd, Newton conclude că și „greutatea“ corpurilor care „cad“ spre pămînt ar fi tot un efect al gravitației universale. În adevăr, ar urma atunci, dacă nu ținem seamă de rotația pămîntului în jurul axei sale, că ar trebui să avem:

$$mg = \frac{fMm}{R^2}$$

unde R este raza, iar M masa pămîntului care atrage corpul de masă m. În felul acesta se poate calcula o valoare apropiată lui $g = 981$ cm/s² la latitudinea 45°, valoare conformă cu datele experimentale.

Asupra determinării experimentale a lui g vom reveni mai tîrziu (§ 174).

81. **Interpretare geometrică.** Formulele (5.103) și (5.105):

$$r = a(1 - \varepsilon \cos u) \text{ și } \frac{1}{a}\sqrt{\frac{Mf}{a}}(t - t_\alpha) = u - \varepsilon \sin u$$

sînt susceptibile de o interesantă interpretare geometrică (fig. 25). Se știe că elipsa poate fi considerată drept proiecția unui cerc avînd ca diametru axa mare a elipsei și așezat într-un plan înclinat cu unghiul arc cos $\frac{b}{a}$ față de planul elipsei (b fiind semiaxa mică). Fie M punctul de pe elipsă și M' punctul de pe cercul omografic. Avem:

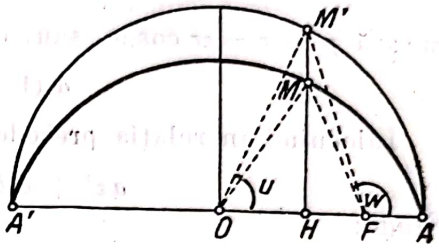

Fig. 27.

$$\text{aria } (MFA) = \frac{b}{a} \text{ aria } (M'FA).$$

Unghiul $\widehat{MFA} = w = \theta - \alpha$ este *anomalia adevărată*. Unghiul $\widehat{M'FA}$ se numește *anomalia excentrică*.

Apoi,

$$\text{aria sector } M'FA = \text{aria } M'OA - \text{aria } M'OF =$$

$$= \frac{1}{2}a^2u - \frac{1}{2}a^2\varepsilon \sin u, \text{ (căci } c = OF = a\varepsilon).$$

Urmează

$$\text{aria } (M'FA) = \frac{a^2}{2}(u - \varepsilon \sin u)$$

de unde

$$\text{aria } (MFA) = \frac{ab}{2}(u - \varepsilon \sin u).$$

Dar după legea lui K e p l e r, aria sectorului este proporțională cu timpul necesar pentru a o descrie. Fie $t - t_\alpha$ acest timp și T perioada revoluției complete; avem:

$$\frac{\text{aria } (MFA)}{t - t_\alpha} = \frac{\pi ab}{T}.$$

Rezultă, înlocuind:

$$\frac{2\pi}{T}(t - t_\alpha) = u - \varepsilon \sin u$$

formulă identică cu ecuația lui K e p l e r, dacă însemnăm cu:

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{Mf}{a}}$$

sau:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{Mf}{4\pi^2}$$

ceea ce exprimă legea a treia a lui K e p l e r.

În Astronomie se notează frecvența cu $\frac{2\pi}{T} = n$ și se numește „*mișcare medie*" așa încît *ecuația lui K e p l e r*, se scrie

$$u - \varepsilon \sin u = n(t - t_\alpha).$$

Pe de altă parte avem evident $OF + FH = OH$; deci:

$$a\varepsilon + r\cos w = a\cos u$$

sau înmulțind cu ε:

$$a\varepsilon^2 + r\varepsilon\cos w = a\varepsilon\cos u.$$

Să considerăm ecuația traiectoriei:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos w.$$

Urmează $p - r = \varepsilon r\cos w$, sau, cum $p = a(1 - \varepsilon^2)$, rezultă:

$$a(1 - \varepsilon^2) - r = \varepsilon r\cos w.$$

Înlocuind în relația precedentă, rezultă:

$$a\varepsilon^2 + a(1 - \varepsilon^2) - r = a\varepsilon\cos u;$$

de unde:

$$r = a(1 - \varepsilon\cos u).$$

82. **Aplicație.** *Formularea problemei celor două corpuri* (fig. 26). Fie soarele și o planetă, reduse la cîte un punct de mase M și m. Presupunem că toate celelalte planete și corpuri cerești au mase neglijabile față de masa M, deci, ca și cum întregul sistem solar s-ar compune din soare și o singură planetă. Prin aceasta sîntem conduși la mișcarea eliptică cunoscută sub numele de „problema celor două corpuri". Fie $\bar{r}_1$ vectorul de poziție al soarelui și $\bar{r}_2$ vectorul de poziție al planetei, relative la un sistem de coordonate fix (O, x, y, z). Ecuațiile de mișcare sînt:

$$M\ddot{\bar{r}}_1 = -f\,Mm\frac{\bar{r}}{r^3}$$

$$m\ddot{\bar{r}}_2 = f\,Mm\frac{\bar{r}}{r^3};$$

$\bar{r}$ având sensul pozitiv $S \to P$ (vezi fig. 26).

Din aceste două ecuații deducem prin scădere, observînd că $\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$:

$$\ddot{\bar{r}}_2 - \ddot{\bar{r}}_1 = -f(M + m)\frac{\bar{r}}{r^3}$$

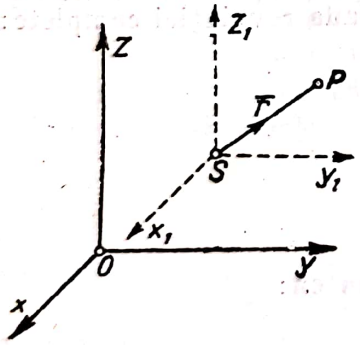

Fig. 26

sau:

$$m\ddot{\bar{r}} = -fm(M + m)\frac{\bar{r}}{r^3}$$

care este ecuația mișcării relative, considerînd punctul S (soarele) ca fix și avînd masa $M + m$. El atrage punctul P (planeta) de masă m, după legea lui N e w t o n. Acest sistem de ecuații se integrează ca în cazul precedent. Traiectoria este plană; ea este o conică avînd S ca focar. Mișcarea se efectuează după legea ariilor. Fiind vorba de o planetă, conica este o elipsă.

După legea a treia a lui K e p l e r

$$\mu = f(M + m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2};$$

pentru o altă planetă, avem:

$$f(M + m_1) = \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2}$$

aşadar urmează:

$$\frac{a^3}{T^2} : \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{1 + \frac{m}{M}}{1 + \frac{m_1}{M}}.$$

Dar rapoartele $\frac{m}{M}$ şi $\frac{m_1}{M}$ fiind de ordinul 10^{-6} al doilea membru este aproape egal cu unitatea. Din această observaţie rezultă că legea a treia a lui K e p l e r este numai o lege aproximativă.

83. **Elementele mişcării eliptice.** Mişcarea eliptică a unei planete este definită, în spaţiu, prin şase constante. Luăm ca plan fundamental *planul eclipticei* la o dată anumită; acesta fie planul xy (fig. 27). Axele: Sx trece prin echinoxul de primăvară (punctul vernal γ); Sy trece prin solstiţiul de vară; Sz este îndreptată spre polul boreal al eclipticei.

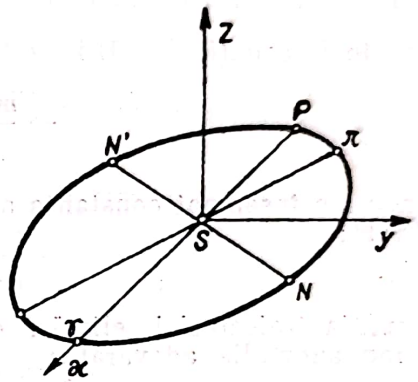

Fig. 27

Planul orbitei planetare taie planul eclipticei (xy) după *linia nodurilor* NN' (N este nodul ascendent, de la care z trece de la valori negative la valori pozitive, iar N' este nodul descendent: z trece de la valori pozitive la valori negative). Planul orbitei este fixat dîndu-se unghiul $\widehat{xSN} = \theta$ numit *longitudinea nodului ascendent* şi inclinaţia φ a planului orbitei pe planul eclipticei. Avînd planul elipsei, trebuie să fixăm poziţia şi forma elipsei. Poziţia *periheliului* π se fixează prin *longitudinea periheliului* $= \widehat{\gamma S\pi} = \omega$. Ea fixează poziţia elipsei. Mărimea elipsei este dată de semiaxa mare a şi de excentricitatea ε. În sfîrşit, felul mişcării planetei pe orbită este precizat de perioada $T = \frac{2\pi}{n}$ şi momentul t_α cînd planeta trece pe la periheliu.

Aşadar, în rezumat, mişcarea este definită prin cele şase constante (cele şase „elemente" ale mişcării eliptice) θ, φ, ω, a, ε şi t_α.

84. **Aplicaţie. Atomul lui Bohr (pentru hidrogen).** Diferite experienţe au arătat că modelul clasic de atom, despre care am vorbit la § 60, reprezentat sub forma unui oscilator liniar armonic care radiază energie din cauza acceleraţiei ce o posedă, este infirmat de anumite fenomene fizice, cum sînt *emisiunile spectrale* sub formă de spectre discontinui, numite *spectre de linii*.

În 1913, N i e l s B o h r dezvoltă cel dintîi o nouă teorie a atomului, pornind de la concepţia lui R u t h e f o r d, care imaginase un model de atom asemănător sistemului solar.

Un nucleu central format din încărcări electrice pozitive, aşezate pe o masă materială mare, atrage după legea lui C o u l o m b (analogă legii newtoniene a gravităţii) electronii negativi şi-i pune în mişcare după legile lui K e p l e r (v. *Electromagnetismul* [33]).

După legile electrodinamicii ar urma ca un astfel de electron, în mişcare kepleriană, să piardă energie ca un oscilator liniar armonic după formula

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{3c^2}\overline{\ddot{p}^2}.$$

Această pierdere de energie ar avea însă drept consecinţă, după cum vom verifica mai jos, micşorarea axei elipsei traiectorie şi deci, posibilitatea distrugerii atomului, cauzînd, prin căderea electronului în nucleu, cunoscuta *catastrofă atomică*. În cursul calculelor care urmează vom stabili acest fenomen. Pentru a înlătura această „catastrofă atomică", N. B o h r postulează următoarele principii:

1. În atom, electronii descriu, ca şi planetele, în jurul nucleului, elipse keplericne după legile mecanicii newtoniene; *fără însă a pierde energie prin radiaţie, în*

contrazicere cu electrodinamica. Aceste traiectorii se numesc traiectorii „staţionare“ şi sînt alese după criteriul următor.

Din ansamblul tuturor traiectoriilor posibile pe care un electron le poate descrie în jurul nucleului, „traiectoriile staţionare“ se caracterizează prin *condiţiile cuantice.*

Aceste condiţii cuantice cer ca, pentru traiectoriile staţionare, *impulsurile* corespunzătoare fiecărui grad de libertate (fiecărei coordonate) integrate de-a lungul mişcării complete, să fie multipli întregi de o constantă universală, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ erg·s, numită constanta lui P l a n c k.

2. Emisia de radiaţii se efectuează numai cînd electronul „sare“ de pe o traiectorie staţionară pe altă traiectorie staţionară, din cauza unei excitaţii exterioare.

În cazul cînd avem un singur nucleu cu o singură încărcare electrică pozitivă şi un singur electron, modelul reprezintă atomul de *hidrogen.*

Prin urmare, avem un centru atractiv pozitiv şi o particulă de masă m şi încărcare electric negativă, care se mişcă, fiind solicitată de forţa coulombiană $-\frac{e^2}{r^2}$, aşa încît ecuaţia lui B i n e t se scrie:

$$-\frac{mp^2}{r^2}\left\{\left(\frac{1}{r}\right)'' + \left(\frac{1}{r}\right)\right\} = -\frac{e^2}{r^2}$$

unde am însemnat constanta ariilor cu p şi încărcarea electrică $e = 4{,}77^{-10}$ u. e. m. Avem:

$$mr^2\dot{\theta} = p.$$

Ecuaţia traiectoriei eliptice este, după cum am văzut mai sus (§ 82), $w = \theta - \alpha$ fiind anomalia adevărată:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon \cos w}{a(1 - \varepsilon^2)}. \tag{5.107}$$

Am definit impulsul p prin relaţia $p = \frac{\partial E_c}{\partial v}$, unde E_c este energia cinetică. Cum, în coordonate cartesiene, pentru fiecare grad de libertate se defineşte impulsul respectiv, generalizăm această noţiune şi pentru altfel de coordonate, de pildă coordonate polare, prin relaţia $p_s = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_s}$ însemnînd cu q una din coordonatele de poziţie (x, sau r, sau θ etc.); atunci p_s este impulsul corespunzător acestei coordonate.

În coordonate polare:

$$E_c = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2); \quad \text{deci } p_r = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; \; p_w = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{w}.$$

Prin urmare, dintre toate traiectoriile vom alege numai pe acelea care satisfac condiţiile de cuantificare (Principiul 2):

$$\oint m\dot{r}\,dr = n'h \quad \text{şi} \quad \int_0^{2\pi} p_w\,dw = nh; \tag{5.108}$$

n şi n' fiind două numere întregi pozitive. Limitele de integrare în (5.108) se determină astfel: pentru unghiul azimutal w, se ia o perioadă completă, adică 2π; iar pentru prima integrală se ia o revoluţie completă de la r_{min} prin r_{max} din nou la r_{min}; deci de la $r_{periheliu}$ pînă la următoarea $r_{periheliu}$.

Cum $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$, după legea ariilor, urmează $p_\theta = p$ (constanta ariilor). Aşadar, condiţia (5.108) ne dă

$$\int_0^{2\pi} p_w\,dw = p\,2\pi = nh$$

căci, $p_w = p_\theta = p$; de unde, constanta ariilor este $p = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar$.

Pe de altă parte avem:

$$p_r = m\dot{r} = m\frac{dr}{dw}\dot{w} = \frac{p}{r^2}\cdot\frac{dr}{dw} \quad \text{şi} \quad dr = \frac{dr}{dw}\cdot dw.$$

Deci:

$$p_r\,dr = p\varepsilon^2\frac{\sin^2 w\,dw}{(1+\varepsilon\cos w)^2};$$

condiţia (5.108) devine:

$$p\varepsilon^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 w}{(1+\varepsilon\cos w)^2}dw = n'h;$$

sau încă:

$$\frac{\varepsilon^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 w}{(1+\varepsilon\cos w)^2}dw = \frac{n'}{n}.$$

Observînd că $\varepsilon < 1$ şi $|\cos w| < 1$, integrala se efectuează integrînd mai întîi prin părţi:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 w\cdot dw}{(1+\varepsilon\cos w)^2} = \left|\frac{\sin w}{\varepsilon(1+\varepsilon\cos w)}\right|_0^{2\pi} - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{2\pi}\frac{\cos w\cdot dw}{1+\varepsilon\cos w} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{1+\varepsilon\cos w}-1\right)dw.$$

Integrala ultimă se efectuează astfel:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dw}{1+\varepsilon\cos w} = \int_0^{2\pi}\frac{dw}{\sin^2\frac{w}{2}+\cos^2\frac{w}{2}+\varepsilon\left(\cos^2\frac{w}{2}-\sin^2\frac{w}{2}\right)} =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\frac{d\left(\frac{w}{2}\right)}{(1-\varepsilon)\sin^2\frac{w}{2}+(1+\varepsilon)\cos^2\frac{w}{2}} = \frac{2}{1-\varepsilon}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{w}{2}+\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)}\frac{d\left(\frac{w}{2}\right)}{\cos^2\frac{w}{2}} =$$

$$= \frac{2}{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\cdot\operatorname{arctg}\left.\frac{\operatorname{tg}\frac{w}{2}}{\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}}\right|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Găsim deci:

$$\frac{\varepsilon^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 w\,dw}{(1+\varepsilon\cos w)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - 1$$

iar condiţia cuantică devine:

$$1-\varepsilon^2 = \frac{n^2}{(n+n')^2}. \qquad (5.109)$$

Vedem deci că:

$$p = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar$$

determină mărimea elipsei, iar excentricitatea:

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{n^2}{(n + n')^2}$$

îi determină forma.

Aşadar, numai pe aceste traiectorii se poate mişca electronul în atom, fără să radieze (în contradicţie cu legile electrodinamicii clasice).

Să calculăm energia cinetică şi energia potenţială, necesare pentru a scrie ecuaţia energiei. Avem:

$$E_c = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p^2}{r^2}\right) = \frac{p^2}{2mr^2}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{dw}\right)^2 + 1\right] =$$

$$= \frac{p^2}{ma^2(1-\varepsilon^2)^2}\left[\frac{1+\varepsilon^2}{2} + \varepsilon\cos w\right];$$

$$E_p = -\frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{a(1-\varepsilon^2)}(1 + \varepsilon\cos w).$$

Ecuaţia energiei este deci $E_c + E_p = \text{const.} = W$, unde W este independent de w; aşadar coeficientul termenului în $\varepsilon\cos w$ trebuie să lipsească în $E_c + E_p$. Aceasta conduce la condiţia:

$$a = \frac{p^2}{me^2(1-\varepsilon^2)} = \frac{h^2}{4\pi^2 me^2}(n + n')^2.$$

Atunci, energia totală este:

$$W = E_c + E_p = \frac{e^2}{a(1-\varepsilon^2)}\left(\frac{1+\varepsilon^2}{2} - 1\right) = -\frac{e^2}{2a}$$

relaţie care arată că dacă $-W$ ar putea creşte continuu prin pierdere de energie, a s-ar micşora producînd catastrofa atomică.

Înlocuind în această relaţie pe a, avem:

$$W = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2} \cdot \frac{1}{(n + n')^2} \qquad (5.110)$$

formulă fundamentală în teoria spectrelor de linie. Energia pe o traiectorie staţionară, cu numerele cuantice n şi n', este dată de (5.110) şi este constantă.

Fie W_1 energia corespunzătoare traiectoriei staţionare (n_1, n_1') şi W_2 traiectoriei (n_2, n_2'). După al doilea postulat, energia emisă va avea o frecvenţă dată de relaţia fundamentală:

$$h\nu = W_2 - W_1$$

deci:

$$\nu = -R\left(\frac{1}{(n_1 + n_1')^2} - \frac{1}{(n_2 + n_2')^2}\right) \qquad (5.111)$$

unde $R = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3}$ (constanta lui R y d b e r g). Dacă $n_2 + n_2' > n_1 + n_1'$ urmează $W_2 > W_1$. Relaţia (5.111) formulează *legea lui R i t z.*

Această lege fundamentală ne permite să găsim pentru frecvenţele ν corespunzătoare diferitelor valori ale numerelor întregi n liniile de emisie sau absorbţie în spectru. Ele corespund, în adevăr, experienţei.

Scanned with OKEN Scanner

Este de observat că în expresia lui W (5.110) numerele cuantice apar numai în combinația $n + n'$, așa încît am putea considera că avem un singur număr cuantic, numit „număr cuantic principal" $n + n'$ ca și cum ar fi de cuantizat numai un singur grad de libertate.

Din această pricină mișcarea kepleriană clasică este o mișcare „degenerată" Ea nu ne permite să explicăm și liniile satelite din vecinătatea unei linii principale corespunzătoare unor valori date pentru fiecare număr cuantic n și n'.

Relația (5.111) care ne dă pe ν ne exprimă, teoretic, spectrul de linii al hidrogenului, cu diversele serii găsite empiric sau experimental (B a l m e r, L y m a n, P i c k e r i n g, F o w l e r).

85. **Mișcarea parabolică.** 1. Cînd constanta energiei este nulă, $h=0$, atunci $\varepsilon = 1$ și traiectoria se reduce la parabola:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\cos(\theta - \alpha) = \frac{2}{p}\cos^2\frac{\theta - \alpha}{2}, \tag{5.112}$$

unde $p = \frac{C^2}{Mf}$; așa încît α se determină din ecuațiile (5.97) și (5.98) luînd $-\pi \leqslant \alpha \leqslant +\pi$,

$$\frac{fM}{C^2}\cos\alpha = \frac{1}{r_0} - \frac{M}{C^2} \quad \text{și} \quad -\frac{Mf}{C^2}\sin\alpha = \frac{2}{r_0}\operatorname{ctg}(\bar{r}_0, \bar{v}_0).$$

Timpul în care punctul material se mișcă din poziția $\theta = 0$ pînă în poziția θ pe parabolă este, după (5.94):

$$t = \frac{p^2}{4c}\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^4\frac{\theta - \alpha}{2}}$$

sau, însemnînd cu t_α momentul trecerii prin vîrful parabolei:

$$t - t_\alpha = \frac{p^2}{4c}\int_\alpha^\theta \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta - \alpha}{2}\right) d\operatorname{tg}\frac{\theta - \alpha}{2}$$

deci:

$$\frac{2}{p}\sqrt{\frac{Mf}{p}}(t - t_\alpha) = \operatorname{tg}\frac{\theta - \alpha}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta - \alpha}{2}. \tag{5.113}$$

Pentru $t = 0$, $\theta = 0$; atunci t_α se obține din relația:

$$\frac{2}{p}\sqrt{\frac{Mf}{p}}\,t_\alpha = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}, \tag{5.114}$$

de unde, t_α putînd fi negativ, rezultă că mobilul nu trece prin vîrf, ci se îndepărtează pe ramura parabolei, la infinit.

86. **Aplicație. Mișcarea cometelor.** Cometele descriu, în mișcarea lor împrejurul soarelui, parabole avînd soarele în focar. Această lege se datorește lui N e w t o n, care, prin aceasta, generalizează mișcarea sub acțiunea gravitației universale extinzînd-o și la mișcările parabolice ale cometelor. Legea gravitației universale este deci, pentru comete:

$$\bar{F} = -fMm\frac{\bar{r}}{r^3}$$

iar mişcarea se studiază ca şi în cazul planetelor, după metoda descrisă mai sus. Presupunînd soarele în focar, dacă raportăm mişcarea la soare, atunci mişcarea este parabolică, sub acţiunea forţei:

$$-f(M+m)\,m\,\frac{\bar{r}}{r^3}$$

ca şi cum masa totală $M+m$ a sistemului soare plus cometă, ar fi concentrată în centrul soarelui. Aşadar, în problema tratată mai sus trebuie să punem în loc de M pe $M+m$; obţinem ecuaţia:

$$\frac{2}{p^{\frac{3}{2}}}\sqrt{f(M+m)}\,(t-t_\alpha)=\operatorname{tg}\frac{w}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{w}{2} \qquad (5.115)$$

pentru anomalia adevărată $w=\theta-\alpha$. Ecuaţia este de gradul al treilea în $\operatorname{tg}\frac{w}{2}$ şi are o singură rădăcină reală, pentru o valoare dată a lui t; ea ne permite să determinăm poziţia cometei (w) la o epocă dată $t=t_1$. Observăm că t_α poate să fie negativ:

$$\frac{2}{p^{\frac{3}{2}}}\sqrt{f(M+m)}\,t_\alpha=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\,; \qquad (5.116)$$

în acest caz cometa nu trece prin vîrful parabolei ci se depărtează la infinit pe una din ramurile parabolei, ceea ce este cunoscut din Astronomie.

Elementele mişcării parabolice. Pentru a fixa orbita parabolică a unei comete avem nevoie să cunoaştem *cinci* „elemente" independente, anume θ, φ, ω şi t_α, la care se adaugă $\frac{p}{2}$ adică „distanţa periheliului".

87. **Mişcarea hiperbolică.** În cazul cînd mişcarea punctului material se efectuează după o hiperbolă, în ecuaţia traiectoriei (5.96) avem $\varepsilon>1$ şi $p=a(\varepsilon^2-1)$ unde $a=\frac{Mf}{h}$ $(h>0)$.

Făcînd substituţia:

$$r=a(\varepsilon\operatorname{ch}u-1)$$

ecuaţia timpului:

$$t=\pm\sqrt{\frac{a}{Mf}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{(r+a)^2-a^2\varepsilon^2}}$$

se integrează şi ne dă:

$$\frac{f^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}(t-t_\alpha)=\varepsilon\operatorname{sh}u-u. \qquad (5.117)$$

Pentru anomalia adevărată, obţinem:

$$\operatorname{tg}\frac{w}{2}=\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}\operatorname{th}\frac{u}{2}\,. \qquad (5.118)$$

88. **Aplicaţie. Mişcarea unei particule încărcate electric în vecinătatea unui nucleu atomic.** Presupunem că o particulă cu Z' încărcări electrice pozitive este aruncată în vecinătatea unui nucleu cu încărcarea electrică Ze (o particulă α are două

încărcări pozitive). Între nucleu şi particulă se dezvoltă atunci forţa de repulsie după *legea lui Coulomb*: $fZZ'e^2\frac{r}{r^3}$, care are aceeaşi structură ca şi legea atracţiei universale, însă cu semnul plus (fig. 28). Vom avea deci o mişcare identică cu cea studiată mai sus. Să presupunem $\mu = \frac{ZZ'e^2}{m}$, m fiind masa particulei considerate. Integrala energiei determină constanta energiei $v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0} + h$; dacă vom considera că particula în poziţia iniţială vine de la infinit, rezultă $r_0 \to \infty$, deci $h = v_0^2 > 0$. Avem o mişcare hiperbolică.

Particula va descrie ramura de hiperbolă opusă focarului unde se găseşte centrul forţei, căci avem o forţă repulsivă.

Din ecuaţia energiei rezultă aşadar:

$$v^2 = -\frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} \qquad (5.119)$$

ecuaţia traiectoriei fiind:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon\cos w}{a(1-\varepsilon^2)} \quad (\varepsilon > 1). \qquad (5.120)$$

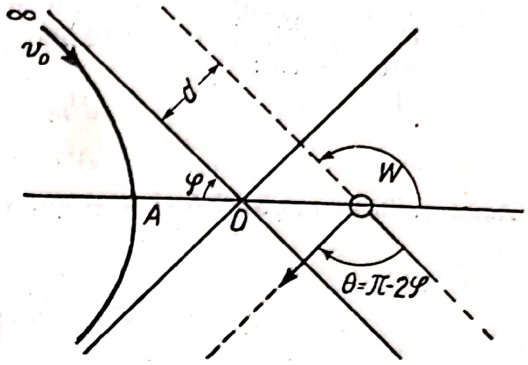

Fig. 28

Particula vine de la infinit (adică de la o distanţă mare faţă de nucleu) pe direcţia asimptotei la hiperbolă, cu viteza iniţială v_0, aşa încît $h = \frac{\mu}{a} = v_0^2$, a fiind semiaxa mare. În punctul A cel mai apropiat de nucleu, particula ajunge cu viteza minimă, dată de:

$$v_A^2 = -\frac{2\mu}{r_A} + \frac{\mu}{a}, \qquad (5.121)$$

unde $r_A = a(1+\varepsilon)$, care se obţine făcînd în ecuaţia hiperbolei $w = \pi$. Deducem aşadar:

$$r_A v_A^2 = \mu(\varepsilon - 1) \text{ şi } r_A v_0^2 = \mu(\varepsilon + 1) \qquad (5.122)$$

Rutherford a studiat teoretic şi experimental trecerea particulelor alfa ($Z = 2$, $m = 4$) în preajma nucleelor [1]). Experienţa înregistrează pe clişee, în *camera Wilson*, direcţiile iniţiale şi finale ale particulelor, care sînt zvîrlite cu viteze iniţiale cunoscute. Prin urmare, spre a putea verifica experimental concluziile teoriei, trebuie să calculăm o mărime măsurabilă experimental şi care să descrie efectul considerat. Pentru aceasta Rutherford măsoară unghiul $\theta = \pi - 2\varphi$ făcut de direcţia iniţială şi cea finală a particulei, unde φ este semiunghiul asimptotelor hiperbolei.

Formula lui Rutherford se deduce astfel. Punem:

$$\sin\varphi = \frac{d}{OP} = \frac{d}{a\varepsilon}.$$

Pentru $r = \infty$, avem $1 + \varepsilon\cos(\pi - \varphi) = 0$, deci $\cos\varphi = \frac{1}{\varepsilon}$.

---

[1]) Se face ipoteza că particula α şi nucleul sînt punctuale, particula putîndu-se apropia oricît de nucleu. În realitate, evident, lucrurile nu se petrec întocmai, dar ipoteza (de lucru) a lui Rutherford conduce la rezultate remarcabile (nucleul se comportă ca o particulă punctuală pînă la distanţa de 10^{-12} cm).

Aşadar:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\varepsilon d}{a\varepsilon} = \frac{1+\varepsilon}{\mu} d = \frac{v_0^2 d}{\mu} = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2};$$

de unde:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{ZZ'e^2}{md \cdot v_0^2}.$$

Fie n numărul de particule care cad normal pe unitatea de suprafaţă şi N numărul de particule care cad pe suprafaţa πd^2.

Putem scrie:

$$N = n\pi d^2 = n\pi \left(\frac{ZZ'e^2}{mv_0^2}\right)^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}.$$

Aşadar, între unghiul θ şi $\theta + d\theta$, vom avea:

$$dN = n\pi \left(\frac{ZZ'e^2}{mv_0^2}\right)^2 \frac{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}} d\theta \qquad (5.123)$$

particule. La distanţa r de nucleu toate aceste particule vor fi aşezate în spaţiu pe zona sferică:

$$dF = 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta.$$

Prin urmare, la distanţa r de nucleu, numărul particulelor deviate din direcţia iniţială, între θ şi $\theta + d\theta$, pe unitatea de suprafaţă, va fi:

$$\frac{dN}{dF} = \frac{n}{2}\left(\frac{ZZ'e^2}{mv_0^2 r}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

iar numărul procentual de particule deviate va fi:

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{dN}{dF} = \frac{1}{2}\left(\frac{ZZ'e^2}{mv_0^2 r}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \qquad (5.124)$$

relaţie care se numeşte *formula lui Rutherford* şi se verifică experimental, avînd cunoscute toate datele din membrul al doilea, prin numărarea particulelor α difuzate (θ fiind măsurabil). Rutherford stabileşte pe cale experimentală exactitatea teoriei de mai sus şi scoate concluzia că atomul material trebuie să fie astfel constituit încît prezintă un nucleu încărcat pozitiv şi anume cu atîtea încărcări pozitive Z cît este numărul de ordine al elementului chimic care se găseşte în camera Wilson şi produce efectul de mai sus. Pentru ca atomul în stare normală să fie neutral electric, rezultă că trebuie să fie constituit dintr-un nucleu pozitiv cu atîtea încărcări electrice pozitive, cît este numărul lui de ordine în tabloul „Sistemului periodic al elementelor" (Mendeleev) şi tot atîţi electroni negativi care gravitează în jurul nucleului mişcîndu-se după legile kepleriene. Această concepţie este originea întregii fizici atomistice moderne.

Concepţia şi teoria lui Rutherford au fost verificate prin numeroase cercetări experimentale datorite, în special, lui H. Geiger şi E. Marsden (1913); Van den Boek (1913) care introduce denumirea de „număr atomic"; J. Chadwick (1920) care determină pe

cale experimentală următoarele numere atomice, în conformitate cu teoria lui Rutherford:

Platină	Argint	Cupru
77,4	46,3	29,3;

ordinea acestor elemente în sistemul periodic fiind

78	47	29

Perfecta concordanță a acestor date confirmă, prin urmare, ipoteza lui Rutherford, a egalității dintre „numărul atomic" și „încărcarea atomică".

Această concepție stă la baza întregii Fizici atomice, dezvoltată în ultimii cincizeci de ani.

89. **Condiții de realizare a sateliților pământești artificiali.** Problema transformării în sateliți pământești a unor corpuri lansate de pe suprafața pământului face obiectul unor întinse cercetări în balistica rachetelor cu reacție și a vehiculelor intraplanetare, problemă în care masa corpului lansat se consideră ca variabilă prin arderea combustibilului de reacție, problemă pe care o vom expune în capitolele speciale asupra corpului de masă variabilă [1]).

În unele lucrări [2,3]) însă se tratează găsirea condițiilor de lansare, după balistica clasică a masei constante, pentru a se realiza un astfel de satelit permanent. În acest paragraf, privim problema masei constante și prezentăm rezultatele găsite, în special, de Caius Iacob [4]).

Fie un punct material de masă m, atras de pământ după legea newtoniană (§ 78): $f\frac{mM}{r^2}$, unde M este masa pământului presupus sferic de rază R, f coeficientul atracției universale și $\bar{r}$ vectorul de poziție al mobilului m față de centrul pământului. Se pune problema: cum trebuie să fie condițiile inițiale pentru ca mobilul să cadă din nou pe pământ, sau să nu cadă. În acest din urmă caz el poate evada din atracția terestră îndepărtîndu-se la infinit (traiectorie parabolică sau iperbolică) sau să rămînă satelit permanent al pământului (traiectorie eliptică care nu intersectează pământul). Facem abstracție de rezistența aerului. Punem $r_0 = R + h$ poziția și v_0 viteza inițială. Traiectoria fiind plană, avem în acest plan legea ariilor:

$$r^2\dot{\theta} = C = r_0 v_0 \sin\theta_0 \tag{5.125}$$

[v. relația (5.92), unde $\theta_0 = \sphericalangle(\bar{r}_0, \bar{v}_0)$] unde C este constanta ariilor, θ unghiul polar și θ_0 valoarea inițială a lui θ. Din formula lui Binet (§ 77) se deduce, integrînd cu condițiile inițiale $\bar{r} = \bar{r}_0$, $\frac{dr}{d\theta} = r_0/\mathrm{tg}\,\theta_0$ pentru $t = 0$, ecuația traiectoriei (§ 77):

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon\cos(\theta - \alpha)}{p} \tag{5.126}$$

unde:

$$p = \frac{C^2}{fM},\quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{C^2}{f^2M^2}\left(v_0^2 - \frac{2fM}{r_0}\right)}. \tag{5.127}$$

---

[1]) În timpul definitivării redactării acestei lucrări s-a produs evenimentul de mare importanță științifică și tehnică al lansării (prin racheta cu reacție) a primului satelit artificial al pământului, de către U.R.S.S. (4 octombrie 1957).

[2]) *E. Esclangon*, C. R. Ac. Sc. Paris, 225, 1947, p. 161 și 513.

[3]) *J. Chazy*, C. R. Ac. Sc. Paris 225, 1947, p. 469.

[4]) *Caius Iacob* Gazeta matematică, nr. 5, 1949, p. 192.

Conica (5.126) este o elipsă dacă $0 \leqslant \varepsilon < 1$; parabolă dacă $\varepsilon = 1$; şi hiperbolă dacă $\varepsilon > 1$, după cum:

$$v_0^2 \leqslant \frac{2fM}{r_0}. \tag{5.128}$$

Condiţia ca traiectoria să taie pământul se obţine căutînd punctele de intersecţie a traiectoriei cu pământul, care se deduc din relaţia:

$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{p}{R} - 1\right) \tag{5.129}$$

deci, facem $r = R$ în (5.126). Pentru ca θ să fie real trebuie să avem:

$$-\varepsilon \leqslant \frac{p}{R} - 1 \leqslant +\varepsilon. \tag{5.130}$$

Dacă $0 < \varepsilon < 1$, traiectoria este eliptică. Prima inegalitate (5.130) exprimă faptul că apogeul este mai mare sau egal cu R, ceea ce este totdeauna verificat căci $r_0 \geqslant R$; a doua inegalitate (5.130) spune că perigeul trebuie să fie mai mic sau egal cu R. În cazul hiperbolei şi parabolei apogeul este la infinit.

Prin urmare, singura condiţie de intersecţie este, după (5.130):

$$\frac{p}{R} - 1 \leqslant \varepsilon \tag{5.131}$$

egalitatea avînd loc pentru traiectoriile tangente pământului.

Dacă $\frac{p}{R} - 1 \leqslant 0$, deci după (5.125), dacă:

$$r_0^2 v_0^2 \sin^2\theta_0 \leqslant fMR \tag{5.132}$$

condiţia (5.131) este satisfăcută. Dacă $\frac{p}{R} - 1 > 0$, ridicînd la pătrat ambii termeni ai inegalităţii (5.131) şi ţinînd seamă de (5.127) şi (5.125), se deduce relaţia echivalentă:

$$v_0^2\left(\frac{r_0^2 \sin^2\theta_0}{R^2} - 1\right) \leqslant 2fM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right). \tag{5.133}$$

Se poate arăta că în fiecare din aceste două cazuri inegalitatea (5.133) este satisfăcută.

Să punem $X = v_0 \cos\theta_0$; $Y = v_0 \sin\theta_0$ şi să considerăm în planul OXY punctul de coordonate (X, Y). Condiţia (5.132) impune punctului să se afle în interiorul bandei:

$$-\frac{\sqrt{fMR}}{r_0} \leqslant Y \leqslant +\frac{\sqrt{fMR}}{r_0}. \tag{5.134}$$

Dacă punctul de coordonate (X, Y) este în exteriorul bandei, el trebuie să satisfacă condiţiile care rezultă din (5.133):

$$\frac{r_0^2}{R^2} Y^2 - (X^2 + Y^2) \leqslant 2fM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right). \tag{5.133'}$$

Ecuaţia:

$$\left(\frac{r_0^2}{R^2} - 1\right) Y^2 - X^2 = 2fM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right) \tag{5.135}$$

Scanned with OKEN Scanner

reprezintă o hiperbolă avînd ca axă transversă pe OY (fig. 29) şi ale cărei semiaxe sînt:

$$\sqrt{\frac{2fMR}{r_0(r_0+R)}} \quad \text{şi} \quad \sqrt{\frac{2fM(r_0-R)}{Rr_0}}.$$

Ramurile hiperbolei sînt exterioare bandei (5.134), (fig. 29). Punctele pentru care (5.133′) este satisfăcută se află în regiunea limitată de ramurile hiperbolei (5.135) şi care conţine originea axelor. Banda (5.134) se află în interiorul acestei regiuni, deci (5.133) sau (5.133′) reprezintă singura condiţie de intersecţie.

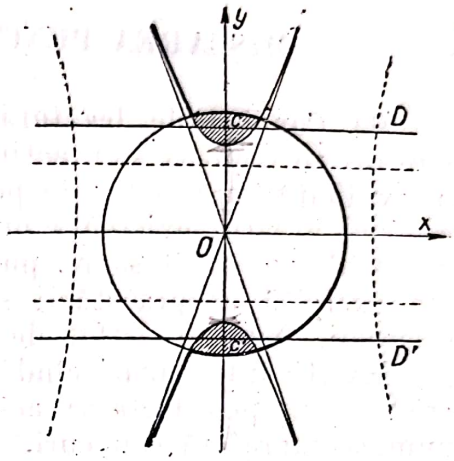

Fig. 29

Condiţia (5.133) este totdeauna satisfăcută dacă:

$$r_0^2 \sin^2\theta_0 - R^2 < 0$$

deci dacă:

$$\operatorname{tg}^2\theta_0 < \frac{R^2}{r_0^2 - R^2}. \qquad (5.136)$$

Fie α unghiul asimptotei hiperbolei (5.135) cu axa (OX); condiţia precedentă revine la $\operatorname{tg}^2\theta_0 < \operatorname{tg}^2\alpha$; deci la situarea punctului (X,Y) în unghiul asimptotelor care nu conţine ramurile curbei; atunci traiectoria taie pămîntul, oricare ar fi viteza iniţială.

Dacă $\varepsilon > 1$, traiectoria este o ramură de hiperbolă. În acest caz, făcînd în (5.126) pe $\theta - \alpha$ să varieze de la 0 la 2π se obţine pentru valorile pozitive ale lui r ramura efectiv descrisă de mobil, iar pentru valorile negative se obţine ramura a doua.

Condiţia ca traiectoria să nu intersecteze pămîntul cere ca θ să fi imaginar; deci după (5.129) trebuie să avem:

$$\left(\frac{p}{R} - 1\right)^2 > \varepsilon^2$$

deci:

$$v_0^2\left(\frac{r_0^2\sin^2\theta^0}{R^2} - 1\right) > 2fM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right). \qquad (5.137)$$

Deci punctul (X,Y) se va găsi în regiunile limitate de ramurile hiperbolei (5.135) care conţin focarele ei. Se vede că este necesar ca:

$$r_0^2\sin^2\theta_0 - R^2 > 0 \qquad (5.138)$$

condiţie care nu este însă suficientă, viteza trebuind să depăşească anumite limite. Viteza minimă de lansare este:

$$v_0 = \frac{2fMR}{r_0(R+r_0)};$$

ea corespunde lui $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ sau $\frac{3\pi}{2}$, traiectoria fiind tangentă pămîntului. Cercul:

$$X^2 + Y^2 = \frac{2fM}{r_0} \qquad (5.139)$$

separă cazurile elipsă (punctul X,Y interior), hiperbolă (X,Y exterior) sau parabolă (X,Y pe cerc).

Cercul (5.139) taie hiperbola (5.133′) în patru puncte reale.

Pentru a avea un satelit permanent al pămîntului, deci o traiectorie eliptică fără a intersecta pămîntul, va trebui ca (X, Y) să fie situat în regiunile haşurate, limitate de cerc şi hiperbolă (fig. 29).

O completare a discuţiei se găseşte în lucrarea citată [pag. 107, nr. 4].

Capitolul VI

MIŞCAREA PUNCTULUI LEGAT, FĂRĂ FRECARE

90. **Condiţii de legătură.** În mişcările studiate pînă acum punctul material se deplasa sub acţiunea unor forţe determinate prin expresiile lor explicite ca funcţii de poziţie şi de timp. Forţele formează un cîmp vectorial a cărui existenţă nu implică prezenţa corpului material. Acesta nu are alt rol decît să ne pună în evidenţă cîmpul forţelor prin acţiunea ce o exercită asupra stării sale de mişcare, după legea fundamentală a Mecanicii. Numim astfel de forţe, *forţe active* sau *forţe de acţiune.*

Există însă cazuri cînd un punct material, pe lîngă mişcarea lui „liberă" în cîmpul forţelor active, este „constrîns" să rămînă mereu pe o anumită suprafaţă sau curbă fixă, or mobilă, dată dinainte, fiind astfel supus unor anumite „legături" care-i condiţionează mişcarea în cîmpul forţelor active. Putem realiza fiziceşte această constrîngere admiţînd că asupra punctului material acţionează, pe lîngă forţele active, şi anumite „*forţe de legătură*" care-l obligă să rămînă pe suprafaţa sau curba dată. Aceste forţe de legătură se supun şi ele principiului reacţiunii, dînd naştere unor „forţe de reacţiune" egale şi de sens contrar din partea suprafeţei sau a curbei date. Trebuie bine distins caracterul forţelor de legătură în comparaţie cu caracterul forţelor de acţiune. Forţele de legătură nu există independent de corpul material, ci iau naştere numai şi din cauza mişcării; ele nu pot forma un cîmp; prin aceasta nu au caracterul unor forţe de acţiune. Ba chiar ele depind de forţele de acţiune care întreţin mişcarea. De aici se vede că forţele de legătură nu pot fi cunoscute dinainte, ci trebuie, dimpotrivă, calculate după natura mişcării.

Fie $\overline{F}$ rezultanta forţelor de acţiune şi $\overline{L}$ rezultanta forţelor de legătură. Ecuaţia mişcării este:

$$m\ddot{\overline{r}} = \overline{F} + \overline{L} \tag{6.1}$$

concepînd punctul material drept „liber", însă supus celor două forţe rezultante: de acţiune $\overline{F}$ şi de legătură $\overline{L}$. Cum însă $\overline{L}$ nu este cunoscut, aşa cum este $\overline{F}$, ecuaţia mişcării (6.1) nu este suficientă să rezolve întreaga problemă, care constă în calcularea mişcării, $\overline{r} = \overline{r}\,(t)$, şi determinarea reacţiunii $\overline{L}$ prin cele trei componenta ale sale. Sînt în total *şase* necunoscute pentru care avem numai *trei* ecuaţii (6.1). Forţele de legătură $\overline{L}$ sînt supuse însă unor anumite restricţii, care derivă din însăşi natura lor şi care micşorează numărul necunoscutelor. *Prima condiţie*: legătura este geometrică, adică fără frecare. *A doua condiţie*: forţele de legătură se *opun* mişcării. *A treia condiţie*: ele nu contribuie la mişcare, ci au numai rolul să împiedice mobilul de a părăsi curba sau suprafaţa. Rezultă din aceste

condiții că *reacțiunea este mereu normală* la curbă sau suprafață. Din punct de vedere analitic forțele de legătură prezintă caractere specifice, care se studiază în „Mecanica analitică".

91. **Mișcarea pe o curbă dată.** a) Să presupunem că mișcarea are loc pe o *curbă fixă*. Ecuația curbei poate fi exprimată, parametric, cu ajutorul unui parametru convenabil ales, de pildă arcul de curbă:

$$\bar{r} = \bar{r}(s). \tag{6.2}$$

În acest caz, condiția de legătură ne spune că forța de legătură a punctului mobil pe curba fixă *nu* are componentă tangențială de-a lungul curbei fixe, care se confundă cu traiectoria. Așadar:

$$\bar{L}\, d\bar{r} = 0 \quad \text{sau} \quad \bar{L}\,\bar{t} = 0. \tag{6.3}$$

b) Dacă mișcarea are loc pe *o curbă mobilă* cu ecuația parametrică:

$$\bar{r} = \bar{r}(s,t) \tag{6.4}$$

observăm că:

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s}\, ds + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\, dt.$$

Condiția care exprimă că $\bar{L}$ nu are componentă tangențială de-a lungul curbei date este:

$$\bar{L}\, \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = 0 \tag{6.5}$$

ceea ce înseamnă că în general:

$$\bar{L}\, d\bar{r} = \bar{L}\, \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\, dt \neq 0. \tag{6.5'}$$

Așadar, pe tangenta la traiectorie, forța de legătură poate avea o componentă diferită de zero; ceea ce este evident, deoarece în cazul curbei mobile tangenta la traiectorie nu se confundă cu tangenta la curba dată (exceptînd doar cazul, cu totul particular, cînd traiectoria este o înfășurătoare a curbei mobile).

Condiția (6.3) ne spune că lucrul mecanic al forțelor de legătură pe curba fixă este nul. Dimpotrivă, condiția (6.5) ne spune că lucrul mecanic al forțelor de legătură pe o curbă mobilă este, în general, diferit de zero.

În lumina principiului energiei acest fapt se explică, în general, astfel: cînd legătura conține timpul în mod explicit, pentru a putea menține această legătură este nevoie de un anumit lucru mecanic, pe care trebuie să-l cheltuim din afară; acest lucru mecanic pare a fi cîștigat de punctul material; de fapt, el provine din munca depusă de noi ca să imprimăm curbei mobile mișcarea impusă.

Observație. Ecuația de mișcare (6.1) (trei ecuații scalare), ecuația curbei fixe (6.2) sau mobile (6.4), ecuații care reprezintă două relații (prin eliminarea parametrului s între trei ecuații scalare) și ecuația de condiție (6.3) sau (6.5), ecuație scalară care ne furnizează încă o condiție, reprezintă un total de șase ecuații scalare pentru cele șase necunoscute. Problema este astfel determinată.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile intrinseci ale mișcării se obțin raportînd mișcarea la normala și tangenta la traiectorie. Însemnînd cu $\bar{t}, \bar{n}$ și $\bar{b}$ vectorii unitari ai tangentei, normalei și binormalei la curba prescrisă, fixă, care se confundă cu traiectoria, ecuațiile mișcării vor fi:

$$m\dot{v} = F_t;\ m\frac{v^2}{\rho} = F_n + L_n;\ 0 = F_b + L_b. \tag{6.6}$$

Integrarea ecuației mișcării. a) *Curbă fixă.* Ecuația curbei, sub forma parametrică, este (6.2):

$$\bar{r} = \bar{r}(s).$$

Ținînd seamă de (6.6) avem:

$$m\ddot{\bar{r}}\, d\bar{r} = \bar{F}_t\, d\bar{r}$$

sau, înlocuind din (6.2):

$$m\ddot{s} = F_t = Q(s, t).$$

Integrînd această ecuație diferențială cu condițiile inițiale $s_{t_0} = s_0$; $\dot{s}_{t_0} = v_0$, se obține:

$$s = s(t)$$

ceea ce reprezintă mișcarea pe curba dată.

În cazul cînd $\bar{F}$ nu depinde de timp, Q este funcție numai de s și ecuația diferențială se integrează, după cum se știe, prin două cuadraturi. Una din cuadraturi duce la integrala primă a energiei. În adevăr, întrucît

$$m\,v\frac{dv}{ds} = Q(s),$$

prin integrare avem:

$$m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s} Q(s)\, ds$$

de unde $v = v(s)$; semnul radicalului se determină prin condiția inițială pentru v. Avînd pe $v = \dot{s}$ putem afla timpul prin o a doua cuadratură:

$$t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v(s)},$$

ceea ce ne va da $s = s(t)$. Introducînd pe $s(t)$ în (6.1), obținem valoarea reacțiunii. Dacă există o funcție de forță:

$$\bar{F}d\bar{r} = Q(s)\, ds = -\, dE_p(s),$$

integrala energiei se scrie ca și în cazul punctului liber:

$$E_c + E_p = h\,(\text{const.})$$

de unde putem calcula viteza.

Scanned with OKEN Scanner

b) *Curbă mobilă.* Ecuația curbei, în acest caz, este:

$$\bar{r} = \bar{r}(s, t).$$

Ecuația de mișcare se obține precum urmează.

Înmulțind în ecuația (6.1) cu $\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = \bar{t}$ și ținînd seama de condiția că forța de legătură $\bar{L}$ este perpendiculară la curba dată (nu la traiectorie), condiție exprimată prin relația (6.5), se obține:

$$m\ddot{\bar{r}}\,\bar{t} = \bar{F}\,\bar{t}$$

sau, cum $\bar{t}\,\dot{\bar{t}} = 0$ și:

$$\dot{\bar{r}} = \bar{t}\,\dot{s} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$$

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{t}\,\ddot{s} + \dot{s}\,\dot{\bar{t}} + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2}$$

urmează ecuația mișcării:

$$m\ddot{s} + m\bar{t}\,\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = F_t$$

ecuație scalară care ne permite să calculăm pe $s = s(t)$. Problema se termină apoi calculînd din ecuația (6.1) reacțiunea (legătura) $\bar{L}$.

92. **Mișcarea pe o suprafață dată.** a) *Suprafața fixă* este dată prin ecuația parametrică:

$$\bar{r} = \bar{r}(s_1, s_2), \tag{6.7}$$

unde s_1 și s_2 sînt doi parametri.

Condițiile ca forțele de legătură să fie tot timpul normale la suprafața dată sînt:

$$\bar{L}\,\frac{\partial \bar{r}}{\partial s_1} = 0, \quad \bar{L}\,\frac{\partial \bar{r}}{\partial s_2} = 0 \tag{6.8}$$

sau:

$$\bar{L}\,d\bar{r} = 0.$$

Astfel, și în cazul suprafeței fixe, ca și la curba fixă, lucrul mecanic al forțelor de legătură este nul.

Ecuația de mișcare se obține printr-un calcul analog celui din cazul curbei fixe.

Să calculăm, mai întîi, pentru suprafața dată:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,ds_\alpha\,ds_\beta.$$

Avem:

$$\dot{\bar{r}} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_i}\,\dot{s}_i, \quad \ddot{\bar{r}} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_i}\,\ddot{s}_i + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial s_\alpha\,\partial s_\beta}\,\dot{s}_\alpha\,\dot{s}_\beta. \qquad (i = 1, 2)$$

După formula lui G a u s s din teoria suprafețelor, avem (Anexa I, § 31)

$$\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial s_\alpha \, \partial s_\beta} = \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ & k \end{matrix} \right\} \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_k} + \bar{p} \, G_{\alpha\beta},$$

$\bar{p}$ fiind vectorul unitar normal suprafeței, iar $\left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ & k \end{matrix} \right\}$ simbolii lui C h r i s t o f f e l de speța a doua (Anexa I, § 30). Ecuația mișcării pe suprafață se obține multiplicînd scalar (6.1) cu $\frac{\partial \bar{r}}{\partial s_j}$ și ținînd seama de (6.8)

$$m g_{ij} \ddot{s}_i + m \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ & k \end{matrix} \right\} g_{kj} \dot{s}_\alpha \dot{s}_\beta = \bar{F} \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_j} = Q_j (s_1, s_2).$$

Înmulțind cu g^{ij} și sumînd, rezultă:

$$m \ddot{s}_i + m \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ & i \end{matrix} \right\} \dot{s}_\alpha \dot{s}_\beta = g^{ij} Q_j (s_1, s_2), \qquad (i = 1, 2). \tag{6.9}$$

Acest sistem de două ecuații diferențiale între s_1, s_2 și t ne dă mișcarea pe suprafață, sub forma $s_1 = s_1 (t)$ și $s_2 = s_2 (t)$.

Dacă forța depinde numai de poziție, exprimînd lucrul mecanic elementar cu ajutorul parametrilor s_1 și s_2, în ipoteza existenței unei funcții potențiale:

$$\bar{F} d\bar{r} = Q_1 (s_1, s_2) \, ds_1 + Q_2 (s_1, s_2) \, ds_2 = - dE_p (s_1, s_2),$$

integrala energiei devine:

$$E_c + E_p = h \, (\text{const.}),$$

ca și în cazul unui punct liber. În sfîrșit ecuația (6.1) ne dă valoarea reacțiunii.

b) *Suprafața mobilă* este reprezentată prin ecuația:

$$\bar{r} = \bar{r} (s_1, s_2, t) \tag{6.10}$$

la care se adaugă condițiile de legătură (6.6). Înmulțind ecuația (6.1) cu $\frac{\partial \bar{r}}{\partial s_1}$ și $\frac{\partial \bar{r}}{\partial s_2}$ obținem, ca și în cazul curbei mobile, ecuațiile:

$$m \ddot{\bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_1} = \bar{F} \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_1} \quad \text{și} \quad m \ddot{\bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_2} = \bar{F} \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_2}, \tag{6.11}$$

ecuații care ne dau valorile $s_1 = s_1 (t)$ și $s_2 = s_2 (t)$, după care ecuația (6.11) ne dă reacțiunea.

Și în cazul suprafeței mobile lucrul mecanic

$$\bar{L} d\bar{r} = \bar{L} \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} dt \neq 0$$

este cîștigat de punctul material în mișcare, din cauza lucrului mecanic depus pentru executarea mișcării suprafeței mobile. Așadar, și la supra-

față ca și la curbă, dacă este fixă, lucrul mecanic al legăturilor este nul, iar dacă este mobilă, este diferit de zero.

93. **Linii geodezice** (Anexa I, § 32). Cînd $\bar{F} \equiv 0$, ecuația mișcării se reduce la $m\ddot{\bar{r}} = \bar{L}$, ceea ce înseamnă că accelerația are aceeași direcție și sens ca forța de legătură, adică normală la suprafață. Cum însă accelerația se află în planul osculator al curbei traiectorie, rezultă că traiectoria mobilului va fi în acest caz o curbă al cărei plan osculator este normal, în fiecare punct al ei, la suprafață. Aceste curbe sînt curbele geodezice ale suprafeței. Mișcarea este uniformă. În adevăr, ecuația energiei (unde $E_p = 0$) ne arată că v este constant. Aceste rezultate pot fi considerate ca generalizarea principiului inerției pentru mișcarea pe o suprafață.

De altfel, punînd în (6.9) $Q = 0$ și înlocuind t cu s (observînd că t poate fi luat proporțional cu s), se obține ecuația cunoscută a geodezicelor.

94. **Echilibrul pe o suprafață sau o curbă fixă.** Punctul mobil se deplasează pe suprafața (sau curba) fixă astfel încît lucrul mecanic al forțelor de acțiune $\bar{F}\,d\bar{r}$ rămîne pozitiv. În adevăr, dacă la începutul mișcării mobilul era în repaos pe suprafață (sau curbă), el începe să se miște sub acțiunea forțelor $\bar{F}$, astfel încît $\bar{F}\,d\bar{r} + \bar{L}\,d\bar{r} > 0$, adică $\bar{F}\,d\bar{r} > 0$, căci $\bar{L}\,d\bar{r} = 0$. În poziția de echilibru lucrul mecanic va fi nul, $\bar{F}\,d\bar{r} = 0$; ceea ce ne dă, înlocuind $\bar{r} = \bar{r}(s)$ pentru curba fixă și $\bar{r} = \bar{r}(s_1, s_2)$ pentru suprafața fixă, condițiile de echilibru:

$$\bar{F}\frac{d\bar{r}}{ds} = 0, \quad \text{respectiv} \quad \bar{F}\frac{\partial \bar{r}}{\partial s_1} = 0 \quad \text{și} \quad \bar{F}\frac{\partial \bar{r}}{\partial s_2} = 0.$$

Aceste condiții ne determină valorile lui s, respectiv s_1 și s_2 pentru poziția de echilibru, prin calcule similare celor precedente.

95. **Teoremă asupra stabilității echilibrului** (vezi § 53). Dacă există un sistem de valori $s_1 = s_1^0, s_2 = s_2^0$ pentru care $E_p(s_1, s_2)$ este un minimum efectiv, atunci această poziție este o poziție de echilibru stabil, pe suprafața dată.

În adevăr, adăugînd o constantă convenabil aleasă valorii minime $E_p(s_1^0, s_2^0)$, putem presupune că această valoare minimă este egală cu zero. Așadar, în vecinătatea minimului,

$$E_p(s_1, s_2) > 0.$$

Echilibrul *stabil* înseamnă: fiind dat $0 < \varepsilon \ll 1$, există un $\varepsilon' > 0$, astfel încît, dacă îndepărtăm mobilul în regiunea:

$$|s_1 - s_1^0| \leqslant \varepsilon', \qquad |s_2 - s_2^0| \leqslant \varepsilon'$$

și-i imprimăm o viteză inițială destul de mică, el să rămînă în regiunea

$$|s_1 - s_1^0| < \varepsilon, \qquad |s_2 - s_2^0| < \varepsilon.$$

Să alegem pe ε astfel încît în regiunea aceasta $E_p \geqslant 0$ și pe frontiera ei $E_p > 0$.

Fie μ cea mai mică valoare pe care o ia potențialul E_p pe frontieră. Cum $E_p(s_1, s_2)$ este o funcție continuă și pozitivă în regiunea considerată, avînd valoarea zero în (s_1^0, s_2^0), rezultă că vom putea găsi un domeniu (ε') interior regiunii considerate:

$$|s_1 - s_1^0| < \varepsilon' < \varepsilon; \quad |s_2 - s_2^0| < \varepsilon' < \varepsilon,$$

astfel încît $E_p(s_1, s_2) < \frac{\mu}{2}$ în acest domeniu. Să imprimăm mobilului, în domeniul (ε'), o deplasare cu o viteză astfel aleasă încît:

$$\frac{mv^2}{2} < \frac{\mu}{2},$$

ceea ce revine la a spune că dăm lui $\dot{s}_1$ și $\dot{s}_2$ valori suficient de mici, astfel încît condiția precedentă să fie satisfăcută.

În aceste condiții, ecuația energiei ne dă pentru mișcarea mobilului:

$$E_c + E_p = \text{const.} < \mu.$$

De aici rezultă că mobilul nu va ieși din regiunea (ε), căci în caz contrar, ajungînd într-un moment dat pe frontiera acestei regiuni, unde $E_p \geqslant \mu$, condiția precedentă nu ar mai fi satisfăcută. Avem deci echilibru stabil.

Observație. Mobilul se mișcă pe suprafața sau curba fixă, astfel încît lucrul mecanic rămîne mereu pozitiv.

În cazul cînd există o funcție potențială, această condiție se exprimă prin relația:

$$dE_p < 0.$$

Așadar, dacă punctul s-ar afla într-o poziție unde E_p este maximă, el se va depărta de această poziție, care devine poziție de echilibru nestabil; dacă există o regiune unde E_p este constantă, fiecare punct al acestei regiuni va fi poziție de echilibru pentru punct; avem o regiune de echilibru indiferent. Pozițiile de echilibru stabil sînt acelea unde E_p are un minim efectiv.

96. **Punct „greu" pe o suprafață sau curbă fixă.** Menținînd ipoteza că $\bar{F} = -\operatorname{grad} E_p$, condițiile de echilibru sînt:

$$\operatorname{grad} E_p \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_1} = 0, \qquad \operatorname{grad} E_p \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_2} = 0$$

ceea ce înseamnă că planul tangent la suprafață $\left(\text{determinat de } \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_1} \text{ și } \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_2}\right)$ trebuie să fie perpendicular pe grad E_p. Dar grad E_p este perpendicular pe suprafețele potențiale; deci, în general, punctele de echilibru sînt puncte de contact cu suprafețele potențiale.

În cazul cîmpului gravitațional suprafețele potențiale sînt planele orizontale $z = \text{const.}$ Așadar, în pozițiile de echilibru pe suprafața dată, planele tangente la suprafața fixă vor fi orizontale. Pozițiile de echilibru

BIBLIOTECA CENTRALĂ REGIONALĂ IAȘI

stabil vor fi punctele cele mai de „jos" de pe suprafață, căci pentru orice alte puncte vecine potențialul $E_p = mgz$ este mai mare decît potențialul în acele puncte.

97. **Ecuațiile normale în mișcarea pe o suprafață.** Fie curba (C) traiectoria mobilului pe suprafață și M poziția mobilului într-un moment dat, măsurată de la o origine O pe curbă (fig. 30). Raza de curbură ρ a traiectoriei va fi în direcția și sensul normalei principale $\bar{n}$ a traiectoriei. Fie $\bar{p}$ vectorul unitar al direcției normalei în M la suprafață, în același sens cu $\bar{n}$, și:

$$\bar{n}\,\bar{p} = \cos\alpha. \tag{6.12}$$

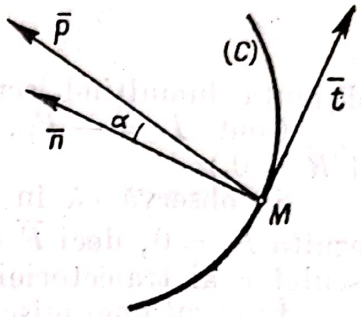

Fig. 30

Fie R raza de curbură a secțiunii normale la suprafață în M. După *teorema lui Meusnier* (Anexa I, § 29)

$$\rho = R\cos\alpha. \tag{6.13}$$

Ecuațiile mișcării în coordonate normale (relative la curbă) vor fi deduse din ecuația vectorială:

$$m\dot{v}\,\bar{t} + \frac{mv^2}{\rho}\,\bar{n} = \bar{F} + L\,\bar{p}, \tag{6.14}$$

căci $\bar{L}$ are numai componenta în direcția normalei la suprafață.

Înmulțind scalar respectiv cu $\bar{n}$, $\bar{t}$ și $\bar{b}$ și ținînd seamă de (6.12), obținem:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{\rho} &= F_n + L\cos\alpha, \\ m\dot{v} &= F_t, \\ 0 &= F_b + L\sin\alpha. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Eliminînd pe L între prima și ultima ecuație, se obține:

$$\frac{mv^2}{\rho}\sin\alpha = F_n\sin\alpha - F_b\cos\alpha. \tag{6.16}$$

Membrul al doilea se poate scrie (Anexa I, § 16)

$$(\bar{F}\,\bar{n})(\bar{p}\,\bar{b}) - (\bar{F}\,\bar{b})(\bar{n}\,\bar{p}) = (\bar{F}\times\bar{p})\,(\bar{n}\times\bar{b}).$$

Dar:

$$\bar{n}\times\bar{b} = \bar{t}$$

după Anexa I, § 30. Rezultă că membrul al doilea al ecuației (6.16) devine:

$$(\bar{F}\times\bar{p})\,\bar{t} = \bar{F}\,(\bar{p}\times\bar{t}) = F_\nu,$$

ceea ce reprezintă proiecția forței $\bar{F}$ pe direcția normală la traiectorie și tangentă la suprafață.

Scanned with OKEN Scanner

Mărimea ρ_g definită prin relația $\rho_g \sin \alpha = \rho$, se numește *raza de curbură geodezică*. În aceste notații, ecuația de mișcare pe curbă devine:

$$\frac{mv^2}{\rho_g} = F_\nu.$$

Forța de legătură L se poate calcula din ecuația:

$$\frac{mv^2}{R} = F_p + L$$

obținută înmulțind ecuația (6.14) scalar cu $\bar{p}$ și ținînd seamă de (6.13).

Cînd $L = -F_p$, mișcarea se efectuează pe o linie asimptotică $(1/R = 0.)$

Se observă că în cazul cînd traiectoria este o geodezică $(1/\rho_g = 0)$, rezultă $F_\nu = 0$, deci $\bar{F}$ este în planul format de $\bar{p}$ și $\bar{t}$, care este planul osculator al traiectoriei.

În cazul unei mișcări uniforme pe un *cerc geodezic* (în sensul lui D a r b o u x), $(1/\rho_g = \text{const.})$, avem $F_t = 0$; $F_\nu = \text{const.}$ Deci, forța este normală la traiectorie și proiecția ei pe planul tangent este constantă, și reciproc.

98. **Pendulul matematic.** Să ne închipuim un punct material *greu* care se poate mișca pe o sferă fixă, fără frecare. Legăturile necesare mișcării le putem realiza fizic, dacă legăm punctul greu cu un fir flexibil și inextensibil, de un punct fix O, pe care-l luăm în centrul sferei fixe. Mobilul nu se poate depărta de O, din cauza reacțiunii firului. Numim forța de legătură dezvoltată prin reacțiunea firului, „tensiunea" firului $\bar{T}$, socotită ca pozitivă de la mobilul M spre O pe rază (fir).

Ecuația de mișcare este:

$$m\ddot{\bar{r}} = mg\bar{k} + \bar{T}, \tag{6.17}$$

dacă luăm axa z verticală în sensul greutății.

Momentul forței totale $mg\bar{k} + \bar{T}$ în raport cu verticala ce trece prin O este:

$$\bar{k}(\bar{r} \times mg\bar{k}) + \bar{k}(\bar{r} \times \bar{T}) = mg\bar{r}(\bar{k} \times \bar{k}) = 0,$$

căci $\bar{T}$ are aceiași direcție ca $\bar{r}$.

Așadar, momentul cinetic în raport cu axa $\bar{k}$ este constant:

$$\bar{k}(\bar{r}\dot{\bar{r}}) = \text{const.} = \bar{k}(\bar{r}_0 \bar{v}_0).$$

Rezultă, deci, că viteza areolară a proiecției punctului greu pe un plan orizontal este constantă:

Putem deosebi două cazuri:

a) Constanta care ne dă valoarea vitezei areolare în planul orizontal este nulă; ceea ce înseamnă că $\bar{v}_0$ este în același plan vertical cu $\bar{k}$. În acest caz, mișcarea se proiectează în planul orizontal după o linie dreaptă. Rezultă că traiectoria se află într-un plan vertical, și anume, ea va fi intersecția planului vertical inițial cu sfera pe care este obligat să rămînă mobilul. Mișcarea se va efectua așadar pe un cerc mare vertical al sferei.

Scanned with OKEN Scanner

b) Cînd constanta ariilor este diferită de zero, adică $\bar{v}_0$ nu este în același plan vertical cu $\bar{k}$, mobilul se va mișca pe o traiectorie strîmbă în spațiu, traiectorie așezată pe sferă (v. § 101).

99. **Pendulul simplu.** Un punct material greu care se mișcă pe un cerc vertical [cazul precedent (a)] cu centrul în O se numește pendul simplu (fig. 31). Legătura va fi realizată fizicește, dacă legăm mobilul cu un fir de lungime l (egală cu raza cercului), inextensibil și de masă neglijabilă, și dacă imprimăm punctului o viteză inițială conținută în planul cercului. Funcția potențială este:

$$E_p = -mgz.$$

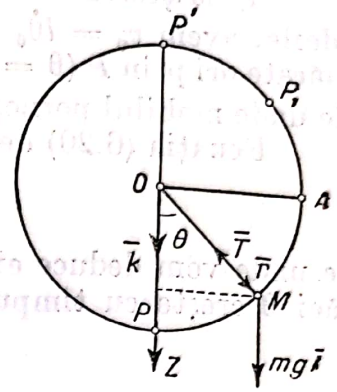

Fig. 31

Ecuația energiei ne dă (h_1 fiind o constantă de integrare):

$$\frac{mv^2}{2} - mgz = h_1.$$

Să introducem unghiul θ făcut de poziția momentană a firului OM cu direcția verticalei în sensul greutății. Avem:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}\cos\theta + h \tag{6.18}$$

ținînd seamă că $v = l\dot{\theta}$ și punînd $z = l\cos\theta$.

Să însemnăm $\nu = \sqrt{\frac{g}{l}}$ și să determinăm constanta h prin *condițiile inițiale*: $t = 0$; $\theta = \theta_0$ și $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$. Ecuația (6.18) devine atunci:

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + 2\nu^2\cos\theta - 2\nu^2\cos\theta_0 \tag{6.19}$$

sau:

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + 4\nu^2\sin^2\frac{\theta_0}{2} - 4\nu^2\sin^2\frac{\theta_0}{2}. \tag{6.20}$$

Din relația (6.20) rezultă că viteza $v = l\dot{\theta}$ se poate anula cînd θ are valoarea θ_1 dată de ecuația:

$$\sin^2\frac{\theta_1}{2} = \frac{\dot{\theta}_0^2}{4\nu^2} + \sin^2\frac{\theta_0}{2}. \tag{6.21}$$

a) Dacă $\dot{\theta}_0^2 > 4\nu^2$ condiția (6.21) nu poate fi satisfăcută pentru nici o valoare θ_0; ceea ce înseamnă că în acest caz viteza mobilului nu se anulează și chiar își păstrează semnul.

Avem o mișcare circulară continuă.

b) $\dot{\theta}_0^2 < 4\nu^2$; pentru ca ecuația (6.21) să ne dea o valoare reală pentru θ este necesar și suficient să alegem valoarea inițială θ_0 astfel ca membrul al doilea din (6.21) să fie $\leqslant 1$.

Avem atunci o mişcare oscilantă, θ variind între două valori extreme date de condiţia (6.21), care anulează viteza.

c) $\dot{\theta}_0^2 = 4\nu^2$; ecuaţia (6.21) ne dă o valoare reală pentru θ_1, numai dacă alegem $\theta_0 = 0$.

Să discutăm pe rînd aceste trei cazuri.

a) *Mişcarea circulară continuă*, $\dot{\theta}_0^2 > 4\nu^2$. Luînd $v_0 > 0$ pentru a fixa ideile, avem $v_0 = l\dot{\theta}_0 > 2\sqrt{gl}$. Avînd în vedere că mobilul trece de nenumărate ori prin P ($\theta = 0$), putem alege ca poziţie iniţială acest punct ($\theta_0 = 0$) de unde mobilul porneşte cu viteza iniţială $v_0 > 2\sqrt{gl}$.

Ecuaţia (6.20) devine în acest caz:

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 - 4\nu^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \tag{6.22}$$

de unde vom deduce expresia timpului, alegînd semnul pozitiv al rădăcinii, căci θ creşte cu timpul; obţinem:

$$t = \frac{1}{\dot{\theta}_0} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}, \tag{6.23}$$

unde am pus $k^2 = \frac{4\nu^2}{\dot{\theta}_0^2} < 1$. Integrala (6.23) este forma normală a integralei lui Legendre (cuadratură eliptică). Efectuarea acestei integrale se face prin funcţii eliptice [1]). Ea se poate efectua şi prin calcul aproximativ, dezvoltînd integrandul în serie şi ţinînd seamă de $k^2 < 1$.

Avem:

$$\left(1 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} k^{2n} \cdot \sin^{2n} \frac{\theta}{2} + \ldots \tag{6.24}$$

Această serie este uniform convergentă (deci convergentă pentru toate valorile lui θ) deoarece $k^2 < 1$. Putem integra prin urmare termen cu termen, iar seria obţinută va reprezenta integrala funcţiei (6.24). Observăm că, în calculul lui (6.23) după dezvoltarea (6.24), avem de efectuat integrale de forma:

$$I_n = \int_0^{\theta} \sin^{2n} \frac{\theta}{2} d\frac{\theta}{2}.$$

Integrînd prin părţi obţinem imediat *formula de recurenţă*:

$$I_n\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{2n} \cos \frac{\theta}{2} \sin^{2n-1} \frac{\theta}{2}; \tag{6.25}$$

care ne permite să calculăm termen cu termen integrala (6.24). Cercul va fi

[1]) Punînd $\sin \theta/2 = x$, relaţia (6.23) se scrie:

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{4} \dot{\theta}_0^2 (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$, integrată prin funcţia eliptică:

$$x = k \cdot \mathrm{sn}\left\{\frac{k}{2} \dot{\theta}_0 (t - t_0)\right\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

parcurs în întregime în timpul:

$$T = \frac{1}{\dot{\theta}_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}.$$

Putem calcula pe T, observînd că, după (6.23),

$$I_n(2\pi) = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}(2\pi)$$

deci:

$$I_n(2\pi) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} \pi.$$

Rezultă, aşadar:

$$T = \frac{2}{\dot{\theta}_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \tag{6.26}$$

$$= \frac{2\pi}{\dot{\theta}_0} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} \right)^2 k^{2n} + \ldots . \right]$$

seria din membrul al doilea fiind convergentă. Mobilul porneşte din P ($\theta_0 = 0$) cu viteza iniţială maximă $l\dot{\theta}_0$; cu cît θ creşte, viteza scade, conform ecuaţiei (6.20), pînă la punctul P' unde $\theta = \pi$, iar viteza ia valoarea minimă $l\dot{\theta} = l\sqrt{\dot{\theta}_0^2 - 4\nu^2}$. Mobilul parcurge apoi semicercul $P'P$ cu viteză crescîndă pînă ajunge iarăşi în P cu viteza $l\dot{\theta}_0$, mişcarea repetîndu-se.

Pentru $k^2 \ll 1$, adică viteza iniţială $l\dot{\theta}_0 \gg 2\sqrt{gl}$, termenii în k^2, k^4 etc. sînt neglijabili faţă de primul; avem mişcarea circulară cu perioada mişcării armonice $T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}_0}$, deci de frecvenţă $\dot{\theta}_0$.

b) *Mişcarea pendulară.* $\dot{\theta}_0^2 < 4\nu^2$, deci $v_0 < 2\sqrt{gl}$; am văzut că ecuaţia (5.21) este satisfăcută dacă luăm condiţiile iniţiale astfel încît $\sin^2 \frac{\theta_1}{2} < 1$.

În acest caz, introducînd o variabilă nouă φ prin substituţia:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \varphi \tag{6.27}$$

ecuaţia (6.20) devine:

$$\dot{\theta}^2 = 4\nu^2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \cos^2 \varphi. \tag{6.28}$$

Din (6.27) rezultă că: $-\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$, unde θ_1 este elongaţia maximă; ceea ce înseamnă $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant +\frac{\pi}{2}$, sau, începînd a măsura timpul din momen-

Scanned with OKEN Scanner

tul cînd mobilul trece prin punctul P, unghiul φ va fi socotit de la $\varphi = 0$. Din relaţiile (6.27) şi (6.28), punînd $\sin^2 \frac{\theta_1}{2} = k^2 < 1$, obţinem, luînd pe φ crescător cu timpul:

$$t = \frac{1}{\nu} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

integrală tot de forma (6.22). Printr-o dezvoltare analogă seriei (6.24) obţinem pentru perioada T a unei oscilaţii complete (de la $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$ pentru φ şi înapoi, adică pentru θ de la $-\theta_1$ la $+\theta_1$ şi înapoi, ceea ce revine de la 0 la 2π pentru φ) o serie analogă cu seria (6.26):

$$T = \frac{2\pi}{\nu}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}\right)^2 k^{2n} + \ldots\right\}. \quad (6.29)$$

Mobilul porneşte din P ($\theta_0 = 0$) cu viteza $v_0 = l\dot{\theta}_0$ pînă ajunge în θ_1 ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) unde se anulează viteza; apoi revine în sens contrar şi se apropie iar de P cu viteza maximă $v_m = l\dot{\theta}_m = 2\sqrt{gl} \cdot \sin\frac{\theta_1}{2}$, de unde ajunge pînă în $-\theta_1$ cînd viteza se anulează ($\varphi = \frac{\pi}{2}$); mişcarea continuă astfel, reprezentînd o oscilaţie între $-\theta_1$ şi $+\theta_1$.

Numim această mişcare, o mişcare pendulară.

Pentru valori extrem de mici ale lui θ_0, $k^2 \ll 1$, din (6.29) rezultă $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, formulă ce reprezintă perioada de oscilaţie a unui pendul care efectuează oscilaţii *extrem de mici*. Aceste oscilaţii sînt *tautocrone*, adică independente de θ_1.

Se poate vedea că termenii seriei (6.29) descresc extrem de repede. De exemplu, pentru $\theta_1 = 12°$, $k^2 = \sin^2 6° = 0{,}01095$. Neglijînd termenul în k^2 comitem o eroare de 0,00284, deci mai puţin ca 3 la mie; neglijînd termenii de la k^4, comitem o eroare de ordinul lui 10^{-4}.

c) *Mişcarea asimptotică*. În cazul limită $\dot{\theta}_0^2 = 4\nu^2$, ecuaţia (6.20) ne dă, pentru $\theta_0 = 0$:

$$\dot{\theta}^2 = 4\nu^2\left(1 - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 4\nu^2 \cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Aşadar: $\dot{\theta} = \pm 2\nu \cos\frac{\theta}{2}$. De aici urmează, pentru timp:

$$t = \pm\frac{1}{2\nu}\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} = \pm\frac{1}{\nu}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{4}\right),$$

căci pentru $t = 0$, $\theta_0 = 0$. Punctul mobil porneşte din P ($\theta_0 = 0$) cu viteza iniţială $l\dot{\theta}_0 = 2\sqrt{gl}$ şi se apropie de punctul P' ($\theta = \pi$) într-un timp foarte

lung, căci $t \to \infty$ cînd $\theta \to \pi$. P' este deci un punct limită. Mobilul ajunge în P' cu viteza nulă, iar mişcarea se termină în P' după un timp extrem de lung.

Calculul tensiunii firului. Expresia tensiunii se obţine din ecuaţia mişcării, ţinînd seamă că:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\, l\dot{\theta}^2 \text{ (căci } r = l \text{ şi } \ddot{r} = 0).$$

Avem:

$$-\, ml\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$$

căci am considerat tensiunea ca pozitivă în sensul $\overrightarrow{MO}$. Rezultă aşadar:

$$T = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2. \tag{6.30}$$

a) *Oscilaţiile pendulare.* În acest caz, după (6.20) şi (6.21) putem scrie:

$$l\dot{\theta}^2 = 2g\,(\cos\theta - \cos\theta_1)$$

căci :

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_0 - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2\nu^2},$$

deci:

$$T = mg\,(3\cos\theta - 2\cos\theta_1), \text{ unde: } -\theta_1 \leqslant \theta \leqslant +\theta_1.$$

Dacă mobilul nu părăseşte cercul, tensiunea trebuie să fie mereu pozitivă. În special, pentru $\theta = \theta_1$, $T \geqslant 0$, ceea ce dă:

$$T_0 = mg\cos\theta_1 \geqslant 0; \text{ deci, } \theta_1 < \frac{\pi}{2}.$$

Tensiunea este nulă cînd $\cos\theta = \frac{2}{3}\cos\theta_1$, adică $\cos\theta < \cos\theta_1$ şi deci $\theta > \theta_1$, ceea ce este exclus căci mişcarea se efectuează astfel încît $|\theta| \leqslant |\theta_1|$. Aşadar, în cazul oscilaţiilor pendulare, tensiunea nu se anulează, căci mobilul nu părăseşte cercul.

Cum $\cos\theta_1 = \cos\theta_0 - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2\nu^2}$, condiţia $\theta_1 < \frac{\pi}{2}$ revine la condiţia admisă: $\dot{\theta}_0^2 < 2\nu^2$, adică $v^2 < 2gl$.

b) *Mişcarea circulară.* În acest caz $v_0 = l\dot{\theta}_0 > 2\sqrt{gl}$. În expresia (6.30) a tensiunii trebuie să înlocuim $\dot{\theta}$ cu valoarea lui din relaţia (6.19) unde facem $\theta_0 = 0$; rezultă:

$$l^2\dot{\theta}^2 = l^2\,\dot{\theta}_0^2 + 2gl\cos\theta - 2gl; \tag{6.31}$$

aşa încît:

$$T = ml\,\dot{\theta}_0^2 + 3mg\cos\theta - 2mg = \frac{m}{l}\,v_0^2 + 3mg\cos\theta - 2mg.$$

Pentru $\theta_0 = 0$,

$$T_{max} = \frac{mv_0^2}{l} + mg;$$

tensiunea scade apoi pînă la $\theta = \pi$ unde:

$$T_{min} = \frac{mv_0^2}{l} - 5mg.$$

Pentru ca mobilul să nu părăsească cercul, $(T > 0)$, este necesar să alegem condiţiile iniţiale astfel încît $v_0^2 \geqslant 5gl$. Aşadar, dacă dimpotrivă $v_0^2 < 5gl$, ceea ce include cazul $v_0^2 = 4gl$ (al mişcării asimptotice), tensiunea devine negativă, iar mobilul părăseşte cercul în momentul cînd T se anulează, firul fiind flexibil. Aceasta are loc pentru o valoare $\theta = \theta'$ dată de ecuaţia:

$$3mg \cos \theta' - 2mg + \frac{m}{l} v_0^2 = 0$$

adică:

$$\cos \theta' = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{v_0^2}{2gl}\right).$$

1) Dacă $v_0^2 > 2gl$, $\cos \theta' < 0$ şi $\theta' > \frac{\pi}{2}$; punctul părăseşte cercul cu o viteză egală cu valoarea dată de (6.31), aşa încît

$$v_1^2 = \frac{1}{3}(v_0^2 - 2gl) > 0, \tag{6.32}$$

în momentul cînd mobilul a ajuns în P_1 $\left(\theta' > \frac{\pi}{2}\right)$. Din acest punct, mobilul, părăsind cercul, se va mişca pe parabola:

$$x = l \sin \theta' + v_1 \cos \theta' \cdot t; \quad z = l \cos \theta' - v_1 \sin \theta' \cdot t + \frac{g}{2} t^2.$$

În P_1 raza de curbură a parabolei va fi dată de relaţia

$$\frac{v_1^2}{\rho} = -g \cos \theta';$$

de unde:

$$\rho = -\frac{\frac{1}{3}(v_0^2 - 2gl)}{g\frac{2}{3}\left(1 - \frac{v_0^2}{2gl}\right)} = l.$$

Aşadar, în P_1 cele două curbe sînt osculatoare, deci parabola se racordează cu cercul. Mobilul părăsind cercul în P_1 se îndreaptă, pe parabolă, spre centrul cercului, iar firul se îndoaie. În adevăr, ţinînd seama de ultimele trei relaţii, obţinem:

$$x^2 + z^2 = l^2 - gv_1 \sin \theta' \cdot t^3 + \frac{g^2}{4} t^4;$$

ceea ce pentru $0 < t < \frac{4v_1 \sin \theta'}{g}$, ne dă $x^2 + z^2 < l^2$. Cînd $t = \frac{4 v_1 \sin \theta'}{g}$, mobilul ajunge în vîrful parabolei şi începe apoi a se depărta din nou de centru, rămînînd pe ramura parabolei pînă în punctul unde parabola întîlneşte din nou cercul. În acest moment firul s-a întins din nou la lungimea

Scanned with OKEN Scanner

lui l. Din acest moment nu mai putem studia mişcarea prin mijloacele ce avem pînă acum la îndemînă, căci în momentul considerat mobilul suferă o „impulsie".

2) Dacă $v_0^2 < 2gl$ şi $\theta' < \frac{\pi}{2}$, viteza cu care ar urma să părăsească mobilul cercul ar fi dată de relaţia (6.32) unde $v_1^2 = \frac{1}{3}(v_0^2 - 2gl) < 0$; deci v_1 este imaginar. Aşadar mobilul nu poate părăsi cercul.

În rezumat, avem pentru diverse posibilităţi în alegerea vitezei iniţiale:

α) $v_0^2 < 2gl$, cu $\theta_1 \geqslant \frac{\pi}{2}$; mişcarea este pendulară cu elongaţia maximă θ_1. Mobilul nu poate părăsi cercul.

β) $2gl < v_0^2 < 5gl$; mobilul pornind din poziţia de echilibru P cu viteza v_0 va descrie cercul pînă în punctul P_1, după care, părăsind cercul, îşi continuă drumul pe parabolă.

γ) $v_0^2 \geqslant 5\,gl$; mişcarea este mereu circulară şi continuă, efectuîndu-se în acelaşi sens. Mobilul nu poate părăsi cercul.

100. **Problema scrînciobului.** Din punct de vedere mecanic, scrînciobul este asimilat unui pendul de lungime variabilă (în mişcare fără frecare), cu proprietatea de a-şi mări amplitudinea de oscilaţie prin manevra persoanei din interior; avem astfel un exemplu de auto-oscilaţie. Fie A punctul cel mai de jos în poziţie verticală (fig. 32); fie l lungimea OA, unde O este punctul fix de atîrnare prin care trece axa de oscilaţie; fie α unghiul făcut de poziţia iniţială OB cu OA şi h nivelul lui B deasupra lui A.

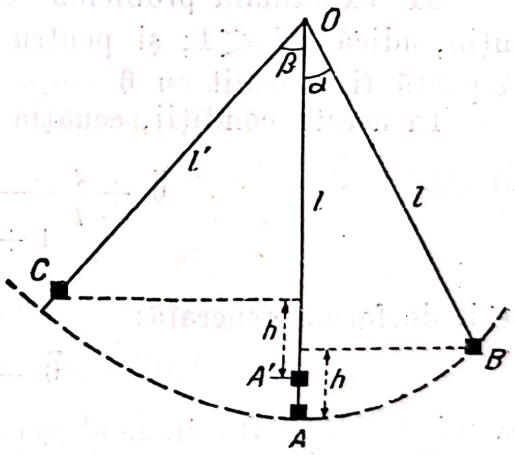

Fig. 32

În poziţia iniţială OB mobilul posedă energia potenţială mgh. Pornind din B fără viteză iniţială ajunge în OA cu energia cinetică egală cu valoarea energiei potenţiale, mgh, prin transformarea energiei potenţiale iniţială în energia cinetică. În acest moment, persoana din scrînciob se ridică deplasînd centrul de greutate spre O, deci scurtînd lungimea pendulului la valoarea $OA' = l' < l$. Oscilaţia continuînd, în virtutea energiei cinetice căpătate, pendulul ajunge într-o poziţie OC (de repaus nestabil), astfel încît punctul C are faţă de A' acelaşi nivel h; fie β unghiul de amplitudine în această poziţie. Avem: $h = l(1 - \cos\alpha)$ în poziţia iniţială OB; $h = l'(1 - \cos\beta)$ în poziţia OC. Din eliminarea lui h între aceste două relaţii rezultă:

$$\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{l}{l'}\,; \quad \text{deci } \beta > \alpha.$$

În poziția de repaus momentan OC, persoana coboară iarăși în scrînciob pînă duce centrul de greutate la distanța inițială l de O. În această poziție, mobilul posedă iarăși energia potențială mgh, unghiul de amplitudine fiind însă $\beta > \alpha$. Manevra repetîndu-se în oscilația inversă precedentei, scrînciobul ajunge într-o nouă poziție OB_1, unghiul de amplitudine fiind, după cele de mai sus, $\alpha_1 > \beta$ și așa mai departe. Se poate ajunge la „darea peste cap" a scrînciobului. Observăm că pendulul își mărește energia prin munca depusă de persoana din scrînciob pentru micșorarea și mărirea lungimii pendulului. Avem deci o auto-oscilație cu „rezistență negativă" care mărește amplitudinile de oscilație.

Matematic, problema se pune precum urmează. Acțiunea persoanei din scrînciob, de coborîre și ridicare ritmică, conduce la a admite că lungimea pendulului l variază după o lege periodică, punctul A (de masă m) executînd oscilații de frecvență ω și amplitudine a.

Ecuația mișcării pendulului în jurul axei din O este:

$$\frac{d}{dt}(ml'^2\dot{\theta}) + mgl' \sin\theta = 0$$

sau:

$$ml'^2\ddot{\theta} + 2ml'\dot{\theta}\frac{dl'}{dt} + mgl' \sin\theta = 0, \qquad (6.33)$$

unde θ este unghiul de oscilație momentană.

Variația lungimii pendulului fie dată de legea:

$$l' = l\left(1 + \frac{a}{l}\cos\omega t\right). \qquad (6.34)$$

Să examinăm problema oscilațiilor cînd lungimea variază foarte puțin, adică $a/l \ll 1$; și pentru cazul oscilațiilor foarte mici, adică $\sin\theta$ să poată fi înlocuit cu θ.

În aceste condiții, ecuația (6.33) se scrie:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\frac{1}{1 + \frac{a}{l}\cos\omega t}\theta = 0 \qquad (6.35)$$

deci, de forma generală:

$$\ddot{\theta} + \varphi(t)\cdot\theta = 0$$

examinată la § 70, în mod general.

Fără a intra în problema integrării ecuației (6.35) se pot regăsi rezultatele schematice de la începutul acestui paragraf, prin considerații mai amănunțite asupra procesului mecanic al pendulului cu lungime, deci frecvență, variabilă în timp.

Observăm că lucrul mecanic produs de persoana din scrînciob în timpul urcării masei m (persoana însăși) este într-un moment dat (înainte de atingerea amplitudinii maxime cînd viteza se anulează):

$$\left(mg + \frac{mv^2}{l}\right)\delta l \qquad (6.36)$$

căci mg este forța greutății, mv^2/l este forța centrifugă, corespunzătoare accelerației centripete $l\omega^2$, δl este variația momentană a lungimii pendu-

lului egală sensibil cu ridicarea masei, cînd oscilațiile sînt suficient de mici; iar $v^2 = 2gl(1 - \cos\theta)$ este viteza momentană a masei m, amplitudinea momentană fiind θ.

Lucrul mecanic restituit de pendul cînd acesta ocupă pozițiile extreme este:

$$mg \cdot \delta l \cdot \cos\theta. \tag{6.37}$$

Energia cîștigată de pendul în timpul unei perioade T se află scăzînd din energia primită (6.36) pe cea cedată (6.37); se obține:

$$\delta E = 2\left[\left(mg + \frac{mv^2}{l}\right)\delta l - mg \cdot \delta l \cos\theta\right]$$

sau:

$$\delta E = 6\,mg\,\delta l(1 - \cos\theta) = 6\frac{\delta l}{l}\cdot\frac{mv^2}{2} = 6\frac{\delta l}{l}\cdot E_c.$$

Avem deci ecuația variației energiei pentru o perioadă:

$$\delta E = 6\frac{\delta l}{l}E_c \tag{6.38}$$

prin urmare un excedent de energie care determină o creștere progresivă a amplitudinii oscilațiilor pendulului.

Cum în punctul A (cel mai de jos) energia potențială este transformată în energie cinetică, aceasta va reprezenta energia totală; urmează că pentru această poziție ecuația (6.38) se poate scrie:

$$\delta E = 6\frac{\delta l}{l}E,$$

unde E este energia totală.

Această ecuație arată că creșterea energiei este exponențială. În adevăr, după n perioade, vom avea într-un moment dat t:

$$E = E_0\, e^{n\alpha t}, \tag{6.39}$$

unde:

$$\alpha = \frac{1}{T}\ln\left(1 + \frac{6\,\delta l}{l}\right). \tag{6.40}$$

101. **Pendulul sferic.** Am văzut că, în cazul cînd viteza inițială nu este în același plan cu verticala $\overline{k}$, traiectoria poate fi o curbă strîmbă în spațiu, așezată pe o sferă. Să luăm coordonatele cilindrice: $OM' = \rho$, $M'M = z$ și $\widehat{xOM'} = \varphi$, planul ecuatorial (orizontal) fiind considerat ca plan $(x\ y)$ iar axa z fiind verticală în sensul greutății deci $+\overline{k}$ în sensul descendent (fig. 33). Raza sferei fiind l, legătura este realizată fizicește cu ajutorul firului inextensibil OM de lungime l invariabilă.

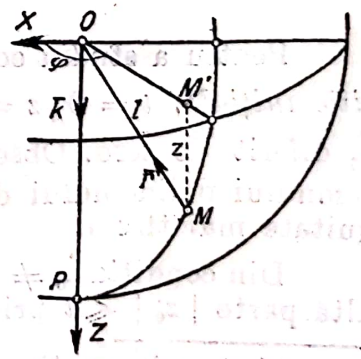

Fig. 33.

Ecuația sferei este:

$$\rho^2 + z^2 = l^2. \tag{6.41}$$

Suprafața fiind fixă, vom aplica teorema energiei. Avem deci $v^2 = 2gz + h$, în care trebuie să înlocuim viteza în coordonatele cilindrice; obținem:

$$\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 = 2gz + h. \tag{6.42}$$

Această ecuație poate fi transformată astfel ca să căpătăm o ecuație numai în z și t. Ținînd seamă că din (6.41) rezultă, derivînd

$$\rho\dot{\rho} + z\dot{z} = 0$$

înlocuind în (6.42), obținem:

$$\frac{l^2}{l^2 - z^2}\dot{z}^2 + (l^2 - z^2)\dot{\varphi}^2 = 2gz + h. \tag{6.43}$$

Pe de altă parte, viteza areolară fiind constantă, se aplică integrala ariilor în proiecție pe planul ecuatorial ($c \neq 0$):

$$\rho^2\dot{\varphi} = c. \tag{6.44}$$

Astfel, ecuația (6.43) devine:

$$l^2\dot{z}^2 = (2gz + h)(l^2 - z^2) - c^2 \tag{6.45}$$

de unde, punînd

$$f(z) = (2gz+h)(l^2-z^2) - c^2 = -2gz^3 - hz^2 - 2gl^2z + hl^2 - c^2 \tag{6.46}$$

rezultă ecuația care ne dă timpul, considerînd pe $z = z(t)$ cunoscută din ecuația diferențială (6.45):

$$t = \pm l\int_{t_0}^{t} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}. \tag{6.47}$$

Unghiul φ va fi dat de teorema ariilor (6.44), prin integrala:

$$\varphi = \pm cl\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{f(z)}}. \tag{6.48}$$

Pentru a studia ecuația diferențială (6.45)[1]) să fixăm mai întîi *condițiile inițiale*: $t = 0$; $z = z_0$ și $\dot{z} = \dot{z}_0 \neq 0$; așadar să admitem mai întîi $\dot{z}_0$ diferit de zero. Observăm că $\dot{z}_0 = 0$ ne-ar da o ambiguitate asupra semnului polinomului din membrul al doilea. Vom ridica această ambiguitate mai tîrziu.

Din condiția $\dot{z}_0 \neq 0$, rezultă imediat $l^2\dot{z}_0^2 > 0$, adică $f(z_0) > 0$. Pe de altă parte $|z_0| \leqslant l$ prin natura problemei dinamice.

[1]) Integrala exactă a ecuației diferențiale (6.45) se exprimă cu ajutorul funcției eliptice a lui Weierstrass $\wp(t)$.

Să scriem următorul tablou:

z	$-\infty$	α	$-l$	β	z_0	γ	$+l$	$+\infty$
$f(z)$	$+\infty$	$++0$	$--c^2$	$-0+$	$+f(z_0)+$	$++0$	$---c^2---$	∞
		↑ rădăcină		↑ rădăcină		↑ rădăcină		

Deoarece $f(z)$ nu poate fi negativ, după ecuația (6.45), z nu va putea ieși din intervalul (β, γ) în care este conținut z_0.

Așadar:

$$\beta \leqslant z \leqslant \gamma.$$

Pendulul oscilează în regiunea cuprinsă între cei doi paraleli de pe sferă, tăiați de planele $z = \beta$ și $z = \gamma$.

Acești doi paraleli extremi sînt astfel așezați (fig. 34) încît paralelul median $z = \frac{\beta + \gamma}{2}$ rămîne totdeauna sub ecuator, căci $\beta + \gamma > 0$. În adevăr, din ecuația (6.46) rezultă:

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{2gl^2}{-2g} = -l^2$$

sau

$$\beta + \gamma = \frac{-l^2 - \beta\gamma}{\alpha};$$

dar din tabloul precedent rezultă:

$$\alpha < 0 \text{ și } |\beta\gamma| < l^2$$

deci:

$$\beta + \gamma > 0.$$

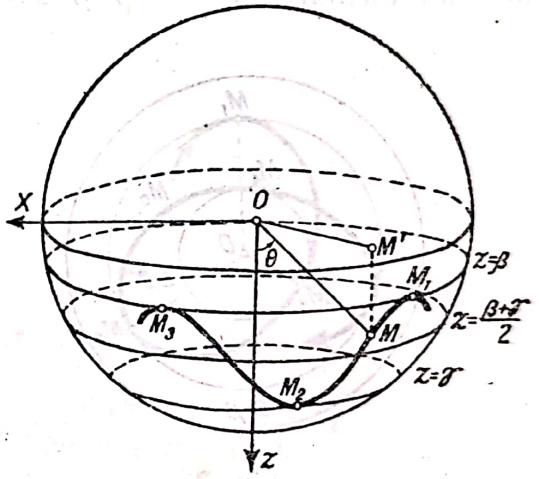

Fig. 34

Cu aceste elemente putem proceda la descrierea mișcării. Observăm încă relația $z = l\cos\theta$, deci $\dot{z} = -l\sin\theta \cdot \dot{\theta}$.

Descrierea mișcării. a) *Traiectoria pe sferă.* Presupunem, pentru a fixa ideile, $c < 0$. Rezultă $\dot{\varphi} < 0$, deci φ descrescător; luăm de asemenea $\dot{z}_0 < 0$, deci z descrescător în momentul inițial (ipotezele contrarii nu pot schimba decît sensul mișcării pe traiectorie). Tabloul următor rezumă mișcarea

z	$z_0\ (t = 0)$	descrește	β	crește	γ
$l\dot{z}$	$\dot{z}_0 < 0$	$-\sqrt{f(z)}$	0	$+\sqrt{f(z)}$	0

Așadar, traiectoria va fi tangentă în punctele M_1 M_2 M_3 la paralelii extremi, unde $\dot{lz}$ se anulează. Mobilul se rotește în jurul axei z pendulînd între cei doi paraleli.

Cazul de ambiguitate $\dot{z}_0 = 0$. Din tabloul precedent rezultă, în acest caz, că mobilul este lansat de pe unul din paralelii extremi, astfel încît, dacă este lansat de pe β, z trebuind să crească, luăm semnul $(+)$ înaintea radicalului $+\sqrt{f(z)} = l\dot{z}$; și invers dacă mobilul este lansat de pe paralelul $z = \gamma$. Mobilul se mișcă astfel încît descrie arcele $M_1 M_2$, $M_2 M_3$ între doi paraleli, în același timp dat de integrala (6.47), anume:

$$T = \int_{\beta}^{\gamma} \frac{l\,dz}{\sqrt{f(z)}}.$$

b) *Proiecția traiectoriei pe planul ecuatorial (orizontal).*

1. Ambii paraleli extremi să fie în emisfera australă. Aceasta înseamnă că $\beta > 0$. În acest caz ambii paraleli extremi se proiectează pe ecuator în interiorul cercului $z = 0$ (fig. 35). Mobilul se mișcă în interiorul coroanei formată de $z = \beta$ și $z = \gamma$, traiectoria fiind tangentă alternativ

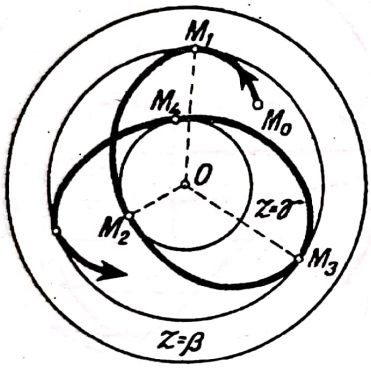

Fig. 35

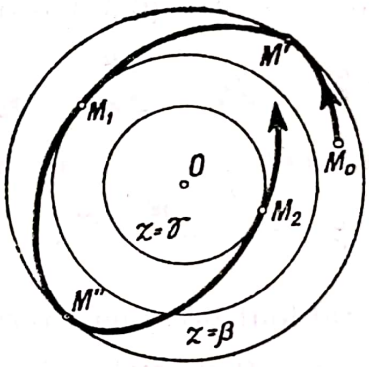

Fig. 36

cînd la un cerc cînd la celălalt în M_1, M_2, M_3, M_4 etc. Vom arăta mai tîrziu că această curbă are concavitatea îndreptată mereu spre O, deci nu are puncte de inflexie. Pentru un observator așezat pe axa z, mobilul va descrie un oval în jurul axei z, oval care se deplasează mereu în sensul mișcării. Pe acest oval mobilul se mișcă astfel încît unghiul $\widehat{M_1 O M_2}$ este constant și mai mare ca $\frac{\pi}{2}$, iar toate unghiurile $\widehat{M_1 O M_2}$, $\widehat{M_2 O M_3}$ etc. sînt egale. Rămîne să stabilim mai jos această proprietate.

2. Cercul $z = \beta$ este în emisfera boreală ($\beta < 0$); cercul $z = \gamma$ în emisfera australă (fig. 36), fiind mereu satisfăcută relația $\beta + \gamma > 0$. Cele două cercuri se vor proiecta tot în interiorul ecuatorului, dar traiectoria, pentru a trece de la un cerc la celălalt, va trebui să atingă cercul ecuatorului, căci trece dintr-un emisfer în celălalt, la fiecare oscilație.

Observație. Ne rămîne să mai demonstrăm afirmațiile de mai sus, anume că toate unghiurile $\widehat{M_1OM_2}$, $\widehat{M_2OM_3}$ etc., sînt egale și că fiecare unghi $\widehat{M_1OM_2}$ este mai mare ca un unghi drept. Pentru aceasta observăm că acest unghi este egal cu valoarea lor comună:

$$\varphi_c = cl\int_{\beta}^{\gamma} \frac{dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{f(z)}} \tag{6.49}$$

unde:

$$f(z) = -2g(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma). \tag{6.50}$$

Cum z nu poate varia decît între β și γ, astfel încît $\beta \leqslant z \leqslant \gamma$, rezultă că:

$$\beta - \alpha < z - \alpha < \gamma - \alpha. \tag{6.51}$$

Între rădăcinile și coeficienții ecuației $f(z) = 0$ există, după (6.50), următoarele relații:

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{h}{2g}\ ;\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -l^2;\ \alpha\beta\gamma = \frac{hl^2 - c^2}{2g}.$$

Înlocuind în (6.51) pe $\alpha = -\dfrac{l^2 + \beta\gamma}{\beta + \gamma}$, obținem:

$$\frac{l^2 + 2\beta\gamma + \beta^2}{\beta + \gamma} < z - \alpha < \frac{l^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2}{\beta + \gamma}. \tag{6.52}$$

$$c^2 = \frac{2g}{\beta + \gamma}(l^2 - \beta^2)(l^2 - \gamma^2).$$

De aici rezultă că valoarea lui φ_c satisface condițiile:

$$\frac{c\sqrt{\beta + \gamma}}{\sqrt{2g(l^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2)}} \cdot I < \varphi_c < \frac{c\sqrt{\beta + \gamma}}{\sqrt{2g(l^2 + 2\beta\gamma + \beta^2)}} \cdot I \tag{6.53}$$

unde am pus:

$$I = \int_{\beta}^{\gamma} \frac{l\,dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{(z-\beta)(\gamma - z)}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{(l-\beta)(l-\gamma)}} + \frac{1}{\sqrt{(l+\beta)(l+\gamma)}}\right).$$

Ținînd seamă de valoarea lui c^2, avem:

$$\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{(l+\beta)(l+\gamma)} + \sqrt{(l-\beta)(l-\gamma)}}{\sqrt{l^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2}} < \varphi_c < \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{(l+\beta)(l+\gamma)} + \sqrt{(l-\beta)(l-\gamma)}}{\sqrt{l^2 + 2\beta\gamma + \beta^2}}. \tag{6.54}$$

Dar cum: $$\frac{(l+\beta)(l+\gamma)}{l^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2} = 1 + \frac{(\beta + \gamma)(l - \gamma)}{l^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2} > 1$$

rezultă în adevăr $\varphi_c > \dfrac{\pi}{2}$, căci $\beta + \gamma > 0$.

Formula (6.54) ne arată că φ_c este cuprins între două valori limite care diferă între ele numai prin aceea că cele două rădăcini β şi γ sînt diferite. În adevăr, cele două limite stau între ele în raportul:

$$\sqrt{\left(1+\frac{\beta^2}{l^2+2\beta\gamma}\right):\left(1+\frac{\gamma^2}{l^2+2\beta\gamma}\right)},$$

raport care devine egal cu unitatea pentru $\beta=\gamma$. Deci, cînd cei doi paraleli sînt infinit vecini:

$$\lim_{\beta=\gamma}\varphi_c=\frac{\pi}{2}\frac{2l}{\sqrt{3\beta^2+l^2}}.$$

Calculul tensiunii firului. Ecuaţia mişcării raportată la normală, însemnînd cu $\overline{p}$ vectorul unitate al normalei interioare la sferă, este (v. § 97):

$$\frac{mv^2}{l}=T+F_p,$$

unde $\overline{F}=mg\overline{k}$ şi deci $F_p=-mg\cos\theta=-mg\frac{z}{l}$.

Din ecuaţia precedentă şi ecuaţia energiei $v^2=2gz+h$, rezultă:

$$T=\frac{m}{l}(3gz+h). \tag{6.55}$$

Pe de altă parte, ecuaţia mişcării raportată la coordonate polare, ne dă în planul ecuatorial ($r=l\sin\theta$);

$$m\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)=-T\frac{r}{l}; \tag{6.56}$$

sau, după (6.55):

$$m\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)=-\frac{mr}{l^2}(3gz+h) \tag{6.57}$$

care unită cu integrala ariilor în planul ecuatorial:

$$r^2\dot{\varphi}=c \tag{6.58}$$

permite următoarea concluzie.

Dacă mobilul este legat cu un fir flexibil, cu masă neglijabilă, de centrul sferei, el nu va putea părăsi suprafaţa sferei decît în momentul cînd reacţiunea T se va anula, spre a deveni apoi negativă. Cît timp $T>0$, mobilul rămîne mereu pe sferă, ceea ce se întîmplă în orice caz atunci cînd mobilul rămîne în emisfera australă [$z>0$ în (6.55) dă $T>0$]. Dacă trece în emisfera boreală, este suficient ca $2gz+h\leqslant 0$ pentru ca mobilul să părăsească sfera şi să cadă spre centrul sferei, pe o parabolă osculatoare interioară sferei.

Punctul unde T se anulează se proiectează pe planul orizontal ca un punct de inflexie. În adevăr, planul osculator la curbă conţinînd acceleraţia, va conţine şi rezultanta forţelor $mg\overline{k}+\overline{T}$; dar cum $T=0$, rezultă că planul osculator va fi vertical; dar atunci, în punctul unde $T=0$, curba schimbă concavitatea [după cum rezultă din (6.55)] faţă de tangenta în acest punct, care devine astfel un punct de inflexie.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile (6.56) și (6.58) dovedesc că mișcarea în planul ecuatorial este similară mișcării sub acțiunea unei forțe centrale $-T\frac{r}{l}$. Dacă $-T\frac{r}{l}$ este negativ, proiecția orizontală a traiectoriei are concavitatea îndreptată spre centru, așa cum sînt arătate în fig. 35 și fig. 36. Pentru aceasta, după (6.55) este necesar și suficient ca $v^2 + gz > 0$, ceea ce se întîmplă în cazul $\beta > 0$, căci atunci și $z > 0$. Cînd $v^2 + gz \leqslant 0$ se prezintă posibilitatea discutată ca mobilul să părăsească sfera.

Cazul cînd mișcarea este plană. În discuția precedentă a mișcării, am presupus că $f(z_0) \neq 0$. Cînd $f(z_0) = 0$, avem $\dot{z}_0 = 0$. Dacă $f'(z_0) \neq 0$, am văzut că avem aceeași mișcare, dar că mobilul este lansat de pe unul din paralelii extremi.

Dacă însă și $f'(z_0) = 0$, atunci ecuația $f(z) = 0$ admite rădăcina dublă $-l < z_0 < l$. În acest caz putem scrie:

$$l^2\dot{z}^2 = -2g(z-\alpha)(z-z_0)^2. \tag{6.59}$$

De aici rezultă că $(z-\alpha)$ ar trebui să fie mereu negativ, ceea ce nu se poate deoarece $\alpha < -l < z$. Așadar (6.59) nu poate fi satisfăcută decît pentru $z = z_0 = \text{const}$. Traiectoria se reduce la paralelul sferei $z = z_0$, pe care mobilul îl descrie cu viteza constantă $v = \pm\sqrt{2gz_0 + h}$. Acest paralel este așezat în emisferul austral, căci $z_0 > 0$. În adevăr, din (6.40) rezultă:

$$\frac{1}{2}f'(z) = g(l^2 - z^2) - z(2gz + h);$$

iar $f'(z_0) = 0$ ne dă

$$g(l^2 - z_0^2) = z_0(2gz_0 + h)$$

sau $z_0 = g\frac{r_0^2}{v_0^2} > 0$. Fiecare poziție a mobilului pe acest cerc este o poziție de echilibru, căci energia potențială este constantă $E_p = -2gz_0$. Așadar, ne găsim într-un caz de echilibru indiferent.

Este interesant de observat că proiecția orizontală a tensiunii firului

$$-T\frac{r_0}{l} = -\frac{mr_0}{l^2}(v_0^2 + gz_0) = -\frac{mr_0}{l^2}\left(gz_0 + \frac{gr_0^2}{z_0}\right) = -m\frac{v_0^2}{r_0},$$

este egală cu forța centripetă.

102. **Oscilații foarte mici ale pendulului sferic în jurul poziției de echilibru stabil.** Am văzut mai înainte că într-un cîmp de forțe derivînd dintr-un potențial poziția de echilibru este punctul cel mai de jos al sferei.

Luăm acest punct P ca origine a axelor de coordonate (fig. 33). Ecuația sferei cu centrul în punctul $(0, 0, -l)$ va fi:

$$\rho^2 + z^2 + 2zl = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

sau:

$$\frac{z}{l} = -1 + \left(1 - \frac{\rho^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{\rho^2}{2l^2} + \ldots \tag{6.60}$$

Să considerăm o mișcare în jurul poziției de echilibru P, cu $r < \varepsilon$ foarte mic. Din relația precedentă se vede însă că $\frac{z}{l}$ este de ordinul al doilea. Așadar, mișcarea se efectuează astfel încît ea se identifică, pînă la cantități de ordinul al doilea, cu mișcarea proiecției mobilului pe planul tangent $z = 0$.

Or, în acest plan, ecuațiile de mișcare (6.56), (6.57) se scriu, observînd că:

$$\ddot{\bar{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\frac{\bar{r}}{r}$$

sub forma vectorială:

$$m\ddot{\bar{r}} = -T\frac{\bar{r}}{l} \tag{6.61}$$

căci componenta normală este nulă (teorema ariilor).

Avînd în vedere că din (6.55) rezultă $T = \frac{m}{l}h$, obținem, ca ecuație a mișcării:

$$\ddot{\bar{r}} + \frac{h}{l^2}\bar{r} = 0 \tag{6.62}$$

ecuație care este identică cu ecuația mișcării pendulare, dacă se pune $h = gl$. Or, observăm că constanta h se deduce din ecuația energiei $v^2 = 2gz + h$, $h = v_0^2$, unde v_0 este viteza inițială, finită, dacă $z = 0$.

Așadar, este suficient să pornim mobilul cu viteza inițială $v_0 = \sqrt{gl}$ pentru ca ecuația (6.62) să reprezinte o mișcare oscilantă, foarte mică, în jurul punctului P. Ea ne va da, precum știm, o oscilație eliptică, rezultată din suprapunerea celor două oscilații armonice lineare perpendiculare care se deduc din (6.61) proiectînd această ecuație pe două axe rectangulare (v. § 61).

Din (6.62) deducem:

$$\frac{v_e^2}{gl} + \frac{r^2}{l^2} = \frac{v_{e0}^2}{gl} + \frac{r_0^2}{l^2};$$

cum $\frac{r^2}{l^2}$ și $\frac{r_0^2}{l^2}$ sînt de ordinul al doilea de micime față de unitate, condiția necesară și suficientă ca mișcarea să rămînă infinit de mică este ca tot timpul $\frac{v_e}{\sqrt{gl}}$ să fie de ordinul întîi; ea este satisfăcută dacă $\frac{v_{e_0}}{\sqrt{gl}}$ este de ordinul întîi.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VII

MIȘCAREA CU FRECARE

103. **Frecarea de alunecare.** În mișcarea punctului material, constrîns să rămînă pe o curbă sau suprafață dată, am admis pînă acum că „legătura" este de așa natură încît are ca singur efect să împiedice punctul de a părăsi curba sau suprafața. Această legătură avea deci un caracter *geometric*; ea nu intervenea în înseși condițiile de mișcare ale mobilului, condiții cu caracter mecanic. Din această pricină, legătura era asimilată unei forțe de reacțiune, normală la curba sau suprafața dată, fără componentă tangențială la curbă, suprafață sau la traiectoria mobilului. Această condiție caracterizează o mișcare fără „frecare".

Efectul „frecării" în mișcarea unui mobil pe o curbă sau suprafață dată este un efect mecanic. El influențează starea de repaus sau de mișcare a mobilului. De aceea este nevoie să asimilăm acest efect cu acțiunea unei forțe de reacțiune, care are însă și o componentă în direcția mișcării — așadar tangențială la traiectorie și opusă vitezei, — întrucît, ca orice legătură, acest efect este menit să împiedice mișcarea existentă sau să producă o stare de mișcare prin antrenare (o curea alunecînd cu frecare pe o roată imobilă o antrenează, punînd-o în mișcare). Fizicește, „frecarea" se datorește coeziunii dintre suprafețele materiale de contact ale celor două corpuri, coeziune menită să împiedice mișcarea liberă a corpurilor, unul față de celălalt. Frecarea se dezvoltă numai cînd regiunea de contact este extinsă. Totuși, noi generalizăm fenomenul și pentru *puncte* mărginite, prin definiție, de suprafețe cu dimensiuni neglijabile.

Un punct material, care se mișcă pe o curbă sau o suprafață, execută în mișcarea lui o *alunecare* pe curba sau suprafața dată; punctul material *nu* posedă mișcări de *rostogolire* (mișcări de rotație în jurul unei axe, paralelă cu planul tangent la suprafață, sau cu binormala la curbă); punctul material nu posedă nici mișcări de *pivotare* (rotații în jurul unei axe normale la suprafața sau la curba dată).

Prin urmare, pentru un punct material nu există decît o *frecare de alunecare*, efect care, în general, se opune mișcării. Putem distinge însă o *frecare de repaus* (statică) sau *aderență*, care ține mobilul pe suprafață sau curbă, și o *frecare de mișcare* (dinamică) care se opune mișcării. Mobilul, stînd pe suprafața sau curba dată, exercită asupra acesteia o „presiune" și anume, în direcția normală; iar curba, sau suprafața, reacționează, dezvoltînd o forță de reacțiune, conform principiului reacțiunii, tinzînd să oprească mobilul ca să nu deformeze și să nu străbată suprafața de sprijin, considerată, prin ipoteză, drept o suprafață materială inpenetrabilă care limitează un corp material, rigid.

Reacțiunea normală $\overline{N}$ (fig. 37) este reacțiunea pe care o exercită o suprafață sau o curbă asupra unui corp greu care se sprijină pe ea, în virtutea principiului acțiunii și reacțiunii. Direcția lui $\overline{N}$ este normala la suprafață în punctul

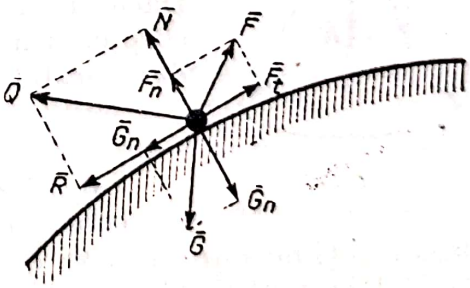

Fig. 37

de contact și sensul pozitiv este al normalei la suprafață, $\overline{p}$, spre exterior.

a) *Frecarea statică* sau de repaus (sau *aderență*), tinde să anihileze forțele care ar solicita mobilul spre a-l deplasa pe suprafață (curbă) din starea lui inițială de repaus. Să presupunem că există o astfel de forță $\overline{F}$, tinzînd să imprime mobilului o mișcare pe suprafață (curbă). Evident că numai componenta tangențială F_t va contribui la această tendință.

Pe de altă parte, greutatea se exercită în așa chip asupra suprafeței (curbei), încît numai componenta normală $\overline{G_n}$ este eficace. În contra acestor două acțiuni reacționează „asprimea" suprafeței, producînd efectul de frecare. Fie $\overline{Q}$ reacțiunea suprafeței. Această forță se va descompune în două: componenta normală care este „reacțiunea normală" $\overline{N}$, și componenta tangențială, însemnată cu $\overline{R}$, care constituie ceea ce am numit „frecare". Dacă forța $\overline{F}$ este suficient de mică, mobilul rămîne în poziția lui inițială, de repaus. Mărind forța $\overline{F}$ cu încetul, ajungem la o valoare, într-un moment dat, *cînd mobilul se pune în mișcare*. Însemnăm cu $\overline{R}$ valoarea componentei tangențiale a reacțiunii corespunzătoare valorii lui $\overline{F_t}$ din momentul cînd *începe* mișcarea. $\overline{R}$ se numește „frecarea de repaus" sau aderență. Însemnînd cu φ unghiul lui $\overline{Q}$ cu $\overline{N}$ (normala) în momentul cînd începe mișcarea, avem evident:

$$R = N \operatorname{tg} \varphi = f_0 N; \tag{7.1}$$

f_0 se numește *coeficient de frecare statică*; el are o valoare constantă, determinată prin experiență pentru fiecare pereche de materiale în contact. Iată cîteva valori pentru f_0. Oțel pe oțel (0,1—0,2); oțel pe fier (0,2—0,3); piatră pe piatră (0,4—0,75). Acest coeficient măsoară gradul de *asprime* relativă a celor două corpuri în contact.

Construcția unghiului și conului de frecare se vede în fig. 38.

Condiția de echilibru este, așadar:

$$F_t \leqslant f_0 N. \tag{7.2}$$

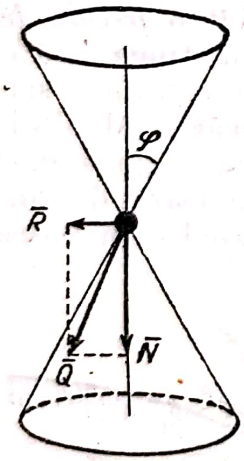

Fig. 38

Dacă $f_0 = 0$, suprafața este *absolut lucioasă*; dacă $f_0 = \infty$ ea este *absolut aspră* (cazuri ideale).

În definiția precedentă a frecării statice am considerat corpul, care este așezat pe o suprafață (curbă), drept un punct material; de aceea „suprafața de contact" între punct și suprafața fixă se reduce la un punct. Dacă, însă, în loc de un punct material am considera un corp cu dimensiuni finite, frecarea statică este funcție și de suprafața de contact σ

$$R = f_0 \sigma N.$$

b) *Frecarea dinamică* sau de mișcare. Dacă mobilul considerat este în mișcare pe suprafață (curbă), atunci acțiunea frecării se exercită ca o tendință de împiedicare a mișcării. Din multe măsurători experimentale Coulomb și Morin au putut stabili legea:

1) frecarea dinamică $\overline{R}$ are direcția, dar sensul opus vitezei mobilului;
2) ea este, în valoare absolută, egală cu $R = f \cdot N$, unde f este „coeficientul de frecare dinamică" și este o constantă depinzînd de materiale. Așadar [1]):

$$\overline{R} = -\operatorname{sgn} v \cdot fN\overline{\mathbf{t}}\ ; \tag{7.3}$$

3) după date experimentale, coeficientul de frecare dinamică este puțin mai mic decît coeficientul de frecare statică, $f < f_0$. Punînd $f = \operatorname{tg}\varphi$, φ se numește unghiul de frecare dinamică.

Legea lui Coulomb-Morin este valabilă numai pentru mișcări tangențiale cu viteze mici și pentru presiuni normale mici. Experiența dovedește că frecarea de alunecare variază puternic cu viteza. În general f scade cu viteza.

104. **Mișcarea cu frecare pe o suprafață fixă.** Să admitem legea (7.3). Fie $\overline{\mathbf{t}}, \overline{\mathbf{n}}, \overline{\mathbf{b}}$, vectorii unitari ai tangentei, normalei la traiectorie și binormalei, $\overline{\mathbf{t}}$ fiind orientat în sensul mișcării. Fie $\overline{\mathbf{p}}$ vectorul unitar al normalei exterioare la suprafață; el va fi definit prin condițiile (Anexa I, § 28):

$$\overline{\mathbf{p}}\,\frac{\partial \overline{r}}{\partial s_1} = 0 \quad \text{și} \quad \overline{\mathbf{p}}\,\frac{\partial \overline{r}}{\partial s_2} = 0 \tag{7.4}$$

dacă ecuația suprafeței este:

$$\overline{r} = \overline{\varphi}(s_1, s_2). \tag{7.5}$$

În acest caz, ecuația mișcării va fi, însemnînd cu $\overline{F}$ forțele de acțiune:

$$m\ddot{\overline{r}} = \overline{F} + N\overline{\mathbf{p}} - fN\overline{\mathbf{t}}, \tag{7.6}$$

sau, în coordonate intrinseci:

$$m\dot{v}\overline{\mathbf{t}} + m\frac{v^2}{\rho}\overline{\mathbf{n}} = \overline{F} + N\overline{\mathbf{p}} - fN\overline{\mathbf{t}} \tag{7.7}$$

ceea ce se mai poate scrie sub forma următorului sistem scalar, însemnînd $\cos\alpha = \overline{\mathbf{n}}\,\overline{\mathbf{p}}$, deci $\sin\alpha = \overline{\mathbf{b}}\,\overline{\mathbf{p}}$

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{\rho} &= F_n + N\cos\alpha \\ m\dot{v} &= F_t - fN \\ 0 &= F_b + N\sin\alpha \end{aligned} \tag{7.8}$$

Eliminînd pe N între aceste trei relații obținem două ecuații pentru cele două necunoscute $s_1 = s_1(t)$ și $s_2 = s_2(t)$, după ce am înlocuit toate mărimile din aceste două ecuații, cu ajutorul ecuațiilor (7.4) și (7.5), în funcție de parametrii s_1 și s_2.

O a treia ecuație ne va da pe N. Pentru aceasta observăm că numai într-una din ecuații figurează f. Deci, celelalte două ecuații sînt valabile și pentru mișcarea fără frecare. Dacă traiectoria este plană, $\cos\alpha = 0$.

[1]) Simbolul „sgn" înseamnă: semnul lui...

Proprietate. Înmulțind ecuația (7.7) scalar cu $\bar{p}$, obținem

$$N + \bar{F}\bar{p} - \frac{mv^2}{\rho}\bar{n}\bar{p} = 0, \tag{7.9}$$

ceea ce exprimă legea: reacțiunea normală trebuie să facă echilibru componentei normale a forței de acțiune și „presiunii dinamice" a punctului material, $-\frac{mv^2}{\rho}\cos\alpha$, adică tendinței punctului material de a părăsi suprafața.

105. **Aplicație. Planul înclinat.** Să luăm un plan înclinat de un unghi dat α față de planul orizontal (fig. 39). Să alegem pe planul înclinat ca axe de coordonate sistemul următor, cu originea în poziția O inițială a mobilului. Ox să fie linia de cea mai mare pantă, dirijată în jos; Oz perpendiculara pe planul înclinat, în față; Oy să completeze triedrul tridreptunghi drept; ea va fi deci o orizontală.

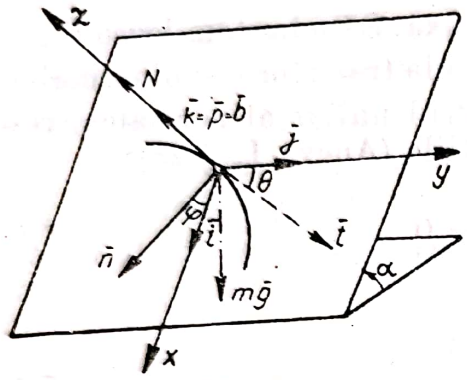

Fig. 39

Singura forță de acțiune care solicită punctul să fie greutatea $\bar{F} = m\bar{g}$. Normala la suprafață $\bar{p}$ se va confunda cu axa z. Traiectoria va fi evident plană. În acest caz, normala principală la traiectorie va fi perpendiculară pe normala la suprafață (planul înclinat). Ecuațiile mișcării, vor fi, după (7.8):

$$m\frac{v^2}{\rho} = F_n; \quad m\dot{v} = F_t - fN; \quad F_b + N = 0. \tag{7.10}$$

În primul rînd rezultă că $F_n > 0$, deci, proiecția forței $m\bar{g}$ pe normala principală este pozitivă: așadar normala principală face un unghi ascuțit cu verticala (direcția greutății) descendentă. Curba are deci concavitatea îndreptată în jos.

Pe de altă parte, din ecuația a treia (7.10) rezultă:

$$\bar{F}\bar{p} + N = 0.$$

deci N, care este componenta normală a reacției, este îndreptată în sens contrar lui $\bar{F}$, prin urmare în sus, pe Oz.

Vectorul $\bar{F} \times \bar{p}$ este perpendicular pe verticală și pe normala la plan; el are direcția și sensul lui $\bar{j}$ în planul înclinat, pentru că triedrul $\bar{F}$, $\bar{p}$, $\bar{j}$ este orientat pozitiv ca și $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Urmează:

$$\bar{F} \times \bar{p} = mg \sin\alpha \cdot \bar{j}.$$

Așadar:

$$F_n = \bar{F}\bar{n} = (\bar{F}, \bar{b}, \bar{t}) = \bar{t}(\bar{F} \times \bar{b}) = mg \sin\alpha (\bar{t}\bar{j}).$$

Dacă însemnăm cu θ unghiul vitezei cu Oy, avem:

$$F_n = mg \sin\alpha \cos\theta.$$

În mod analog: $\bar{F}\bar{t} = mg \sin\alpha (\bar{t}\bar{i})$, deci:

$$F_t = mg \sin\alpha \sin\theta.$$

Apoi, evident:

$$F_b = -mg \cos\theta.$$

Dacă luăm ca parametru variabil unghiul θ, ecuațiile mișcării (7.10) se scriu:

$$m\frac{v^2}{\rho} = mg\sin\alpha\cos\theta;\ m\dot{v} = mg\sin\alpha\sin\theta - fN;\ N = mg\cos\theta. \tag{7.11}$$

Cum traiectoria are concavitatea îndreptată în jos, $\dot{\theta} > 0$, rezultă:

$$\frac{1}{\rho} = +\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{v}\dot{\theta}. \tag{7.12}$$

Calculul vitezei

Înlocuind pe ρ din (7.12) în (7.11) obținem ecuațiile:

$$v\dot{\theta} = g\sin\alpha\cos\theta;\ \dot{v} = g\sin\alpha\sin\theta - gf\cos\alpha. \tag{7.13}$$

Împărțind cele două ecuații (7.13) obținem:

$$\frac{dv}{v} = \frac{-f\cos\alpha + \sin\alpha\sin\theta}{\sin\alpha\cos\theta}d\theta$$

și integrînd cu condițiile inițiale $t = 0$, $\theta_0 = 0$, $v = v_0$,

$$\ln v - \ln v_0 = f\operatorname{ctg}\alpha\ln\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) - \ln\cos\theta$$

sau, punînd $\lambda = f\operatorname{ctg}\alpha$, unde $f = \operatorname{tg}\varphi$, rezultă (v. § 105):

$$v = \frac{v_0}{\cos\theta}\operatorname{ctg}^{\lambda}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right), \tag{7.14}$$

expresie care ne dă valoarea vitezei în funcție de unghiul θ.

Cînd $\theta \to \frac{\pi}{2}$, v capătă forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, iar $\lim v$ se calculează prin regula lui H ô p i t a l. Vom distinge următoarele cazuri:

1) $\lambda < 1$; deci $\varphi < \alpha$, deci unghiul de frecare mai mic decît unghiul de înclinare. Avem:

$$\lim v = \infty$$

2) $\lambda > 1$; deci $\varphi > \alpha$, atunci:

$$\lim v = 0$$

3) $\lambda = 1$; deci $\varphi = \alpha$, vom avea:

$$\lim v = \frac{v_0}{2}.$$

Calculul coordonatelor x și y. Avem $dy = ds\cdot\cos\theta$, de unde:

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{v}{\dot{\theta}}\cos\theta = \frac{v^2}{g\sin\alpha},$$

și înlocuind pe v din (7.11):

$$y = \frac{1}{g\sin\alpha}\int_0^{\theta} v^2\,d\theta = \frac{v_0^2}{g\sin\alpha}\int_0^{\theta}\frac{\operatorname{ctg}^{2\lambda}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\theta}d\theta.$$

Efectuăm această integrală prin substituția $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = z$.

Deoarece

$$dz = -\frac{1}{2}\frac{d\theta}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} = -\frac{1}{2}d\theta\,(1+z^2)$$

și

$$\cos^2\theta = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{4z^2}{(1+z^2)^2},$$

obținem:

$$y = -\frac{v_0^2}{2g\sin\alpha}\int_1^z z^{2\lambda-2}(1+z^2)\,dz$$

și deci:

$$y = -\frac{v_0^2}{2g\sin\alpha}\left(\frac{1}{2\lambda-1}z^{2\lambda-1} + \frac{1}{2\lambda+1}z^{2\lambda+1}\right) + y_0,$$

cu excepția cazului $\lambda = \frac{1}{2}$. În acest caz, valoarea lui y va fi:

$$y = -\frac{v_0^2}{2g\sin\alpha}\left\{\ln z + \frac{z^2}{2}\right\} + y_0.$$

În celelalte cazuri avem, la limită, pentru $\theta \to \pi/2$:

1) $\lambda < \frac{1}{2}$ adică $2\operatorname{tg}\varphi < \operatorname{tg}\alpha$ $\qquad \lim y = \infty$

2) $\lambda > \frac{1}{2}$ „ $2\operatorname{tg}\varphi > \operatorname{tg}\alpha$ $\qquad \lim y = \frac{2\lambda v_0^2}{g\sin\alpha\,(4\lambda^2-1)}$

3) $\lambda = \frac{1}{2}$ „ $2\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha$ $\qquad \lim y = \infty$

Apoi, $dx = ds\cdot\sin\theta$; deci:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{v}{\dot\theta}\sin\theta = \frac{v^2}{g\sin\alpha}\operatorname{tg}\theta$$

și înlocuind pe v din (7.14) obținem:

$$x = \frac{1}{g\sin\alpha}\int_0^\theta v^2\operatorname{tg}\theta\cdot d\theta = \frac{v_0^2}{g\sin\alpha}\int_0^\theta \operatorname{ctg}^{2\lambda}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta.$$

Pentru integrare facem iar substituția:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = z; \quad dz = -\frac{1}{2}d\theta\,(1+z^2)$$

$$\cos\theta = \frac{2z}{(1+z^2)}\,;\ \sin\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}\,;$$

rezultă:

$$x = -\frac{v_0^2}{4g \sin \alpha} \int_1^z z^{2\lambda-3}(1-z^4)\,dz =$$

$$= -\frac{v_0^2}{4g \sin \alpha}\left[\frac{z^{2\lambda-2}}{2\lambda-2} - \frac{z^{2\lambda+2}}{2\lambda+2}\right] + x_0,$$

cu excepția cazului $\lambda = 1$. În acest caz:

$$x = -\frac{v_0^2}{4g \sin \alpha}\left\{\ln z - \frac{z^4}{4}\right\} + x_0.$$

În cazurile limită, pentru $\theta \to \pi/2$, avem:

1) $\lambda > 1$; $\varphi > \alpha$ ..... $\lim x = \dfrac{v_0^2}{4g \sin \alpha} \dfrac{1}{\lambda^2 - 1}$

2) $\lambda < 1$; $\varphi < \alpha$ ..... $\lim x = \infty$

3) $\lambda = 1$; $\varphi = \alpha$ ..... $\lim x = \infty$

Calculul timpului. Timpul va fi dat de relația:

$$t = \frac{1}{g \sin \alpha} \int_0^\theta v \frac{d\theta}{\cos \theta} = \frac{v_0}{g \sin \alpha} \int_0^\theta \frac{\operatorname{ctg}^\lambda\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2 \theta} d\theta.$$

Prin aceeași substituție, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = z$, obținem:

$$t = -\frac{v_0}{2g \sin \alpha}\left[\frac{z^{\lambda-1}}{\lambda-1} + \frac{z^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right] + t_0,$$

cu excepția cazului $\lambda = 1$. În acest caz obținem:

$$t = -\frac{v_0}{2g \sin \alpha}\left[\ln z + \frac{z^2}{2}\right] + t_0.$$

Deci, pentru $\theta \to \pi/2$:

1) $\lambda < 1$ ..... $\lim t = \infty$

2) $\lambda > 1$ ..... $\lim t = \dfrac{v_0}{g \sin \alpha} \dfrac{1}{\lambda^2 - 1}$

3) $\lambda = 1$ ..... $\lim t = \infty$

Scanned with OKEN Scanner

Următorul tablou rezumă concluziile de mai sus:

$\lim \theta = \frac{\pi}{2}$	$0 < \lambda \leqslant \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < \lambda < 1$	$\lambda = 1$	$\lambda > 1$
$\lim v$	∞	∞	$\frac{v_0}{2}$	0
$\lim y$	∞	$y_a = \frac{2\lambda v_0^2}{g \sin \alpha (4\lambda^2 - 1)}$	y_a	y_a
$\lim x$	∞	∞	∞	$x_a = \frac{v_0^2}{4g \sin \alpha (\lambda^2 - 1)}$
$\lim t$	∞	∞	∞	$t_a = \frac{v_0}{g \sin \alpha} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}$

Concluzii asupra mişcării

1. Planul foarte înclinat; $\operatorname{tg} \alpha \geqslant 2 \operatorname{tg} \varphi$; viteza creşte la infinit, o dată cu x şi y cînd timpul creşte.

2. Planul are o înclinare potrivită; $\operatorname{tg} \theta < \operatorname{tg} \alpha < 2 \operatorname{tg} \theta$; viteza şi y cresc cu timpul la infinit, dar y are o limită fixă. Traiectoria are o asimptotă paralelă cu Ox la distanţa y_a.

3. Înclinarea planului este dată de $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \theta$; mişcarea este uniformă şi se apropie asimptotic de mişcarea de-a lungul „liniei de cea mai mare pantă" Ox $\left(\text{cu viteza constantă } \frac{v_0}{2}\right)$.

4. Planul foarte puţin înclinat; $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \theta$; după un timp finit t mobilul se opreşte la distanţa (x_a, y_a), astfel încît în acest punct tangenta la traiectorie este o linie de cea mai mare pantă îndreptată în jos.

Cazuri particulare

1) $\lambda = 0$. Mobilul se mişcă fără frecare; notăm $\frac{v_0^2}{2g \sin \alpha} = a$; avem:

$$v = \frac{v_0}{\cos \alpha}; \quad y = -a \frac{z^2 - 1}{z}; \quad x = \frac{a}{4} \frac{z^4 + 1}{z^2} + \frac{a}{2}.$$

Deci, mobilul descrie parabola $y^2 = 4a(x - a)$.

2) Mişcarea pe Ox cu viteza iniţială nulă (sau dirijată spre Ox). Atunci $\theta = \frac{\pi}{2}$ iar ecuaţia (7.13) ne dă:

$$\dot{v} = \ddot{x} = g_1 = g \sin \alpha - gf \cos \alpha = \text{const.}$$

Pentru ca punctul să se pună în mişcare trebuie ca $F_t > fN$, deci $g \sin \alpha - gf \cos \alpha > 0$, adică $\operatorname{tg} \alpha > f$. Legea mişcării este atunci

$$x = \frac{1}{2} g_1 t^2 + v_0 t,$$

adică legea căderii corpurilor grele în vid.

106. **Mişcarea cu frecare pe o curbă fixă.** Reacţiunea are direcţia $\bar{p}$, normală la curba fixă, iar frecarea este $-\operatorname{sgn} v \, fN\bar{t}$, unde $\bar{t}$ este vectorul unitate al tangentei. Ecuaţia mişcării va fi, prin urmare:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F} + N\bar{p} - \operatorname{sgn} v \cdot fN\bar{t}. \qquad (7.15)$$

Scanned with OKEN Scanner

Putem pune ecuația (7.15) sub forma normală

$$m\dot{v}\bar{\mathbf{t}} + \frac{mv^2}{\rho}\bar{\mathbf{n}} = \bar{F} + N\bar{\mathbf{p}} - \operatorname{sgn} vfN\bar{\mathbf{t}}; \tag{7.16}$$

de unde deducem:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{\rho} &= F_n + N\cos\alpha \\ 0 &= F_b + N\sin\alpha \\ m\dot{v} &= F_t - \operatorname{sgn} vfN. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Ecuațiile (7.17) împreună cu ecuația curbei determină mișcarea și necunoscutele N și α. Ecuația mișcării se obține prin eliminarea lui N și α din relațiile (7.17). Vom avea:

$$m\dot{v} = F_t - \operatorname{sgn} vf\sqrt{F_b^2 + \left(\frac{mv^2}{\rho} - F_n\right)^2}.$$

În cazul curbei plane, $\bar{\mathbf{b}}\,\bar{\mathbf{p}} = 0$, iar forța este situată în planul curbei, N fiind o mărime esențial pozitivă, $\sin\alpha = 0$, iar $\cos\alpha = \pm 1$, după cum $\frac{mv^2}{\rho} - F_n$ este pozitiv sau negativ. Atunci $F_b = 0$, iar ecuația mișcării se scrie:

$$mv\frac{dv}{ds} = F_t \mp f\left(m\frac{v^2}{\rho} - F_n\right); \tag{7.18}$$

semnul minus se ia cînd $\frac{mv^2}{\rho} - F_n$ are sensul mișcării, semnul plus în caz contrar.

Din ecuația (7.18) deducem:

$$\frac{dv^2}{ds} \pm \frac{2f}{\rho}v^2 = \frac{2}{m}F_t(s) \mp \frac{2f}{m}F_n(s).$$

Însemnînd cu $\psi(s) = \int\frac{ds}{\rho}$ și cu C o constantă de integrare și integrînd după formula clasică de integrare a unei ecuații diferențiale ordinare lineare de ordinul întîi, de forma $y' + P(x)\,y = Q(x)$, anume $y = e^{-\int P\,dx}\left\{\int Qe^{\int P\,dx} + C\right\}$, obținem:

$$v^2 = Ce^{\mp 2f\psi} + \frac{2}{m}e^{\mp 2f\psi}\int_0^s e^{2f\psi}\left[F_t(s) + fF_n(s)\right]ds. \tag{7.19}$$

Membrul al doilea va fi o funcție cunoscută de s. Să o notăm cu $\Phi(s)$. Atunci, din ecuația (7.17) rezultă:

$$v^2 = \Phi(s),$$

ceea ce ne permite să obținem timpul:

$$t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}. \tag{7.20}$$

Avînd timpul și $s = s(t)$ problema se termină de rezolvat prin calculul lui N din ecuația mișcării.

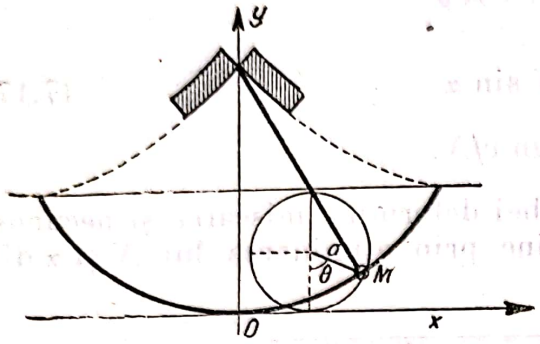

Fig. 40

107. Aplicație. Mișcarea cu frecare a unui punct greu pe o cicloidă fixă așezată într-un plan vertical (x, y), (fig. 40).

Ecuațiile curbei sînt:

$$x = a(\theta + \sin\theta);\quad y = a(1 - \cos\theta). \tag{7.21}$$

Rezultă:

$$ds = 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta;$$

deci $\dfrac{dx}{ds} = \cos\dfrac{\theta}{2}$; $\dfrac{dy}{ds} = \sin\dfrac{\theta}{2}$

iar raza de curbură:

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = 4a\cos\frac{\theta}{2};$$

$\dfrac{\theta}{2}$ fiind unghiul făcut de tangenta la cicloidă cu axa x (orizontală) și limitat prin condiția $-\pi \leqslant \theta \leqslant +\pi$.

Proiecțiile forței sînt:

$$F_t = -mg\sin\frac{\theta}{2} \quad \text{și} \quad F_n = -mg\cos\frac{\theta}{2}. \tag{7.22}$$

Ecuația (7.19) ne dă [1]):

$$v^2 = Ce^{-\theta\,\mathrm{tg}\varphi} - 4ag\sin^2\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) \tag{7.23}$$

căci:

$$\psi = \int\frac{ds}{\rho} = \int_0^{\theta}\frac{2a\cos\dfrac{\theta}{2}\,d\theta}{4a\cos\dfrac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\theta} d\theta = \frac{\theta}{2}.$$

În cazul mișcării fără frecare $\varphi = 0$, iar ecuația (7.23) se transformă în ecuația energiei:

$$v^2 = C - 2gy = -2g(y - y_0). \tag{7.24}$$

Integrînd, spre a afla timpul, obținem perioada:

$$\sqrt{2g}\,T = \int_0^{y_0}\frac{ds}{\sqrt{y_0 - y}} = \sqrt{2a}\int_0^{\pi} d\theta;$$

[1]) Integrala care figurează în (7.19) se efectuează după regulile cunoscute de integrare pentru formele $\int e^{at}\sin t\,dt$ etc.

Scanned with OKEN Scanner

deci:

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}},$$

rezultat remarcabil, care ne arată că perioada este independentă de amplitudinea mișcării y_0. Constatăm că perioada este aceeași cu a unui pendul simplu cu oscilații foarte mici, de lungime $4a$. Curbele care se bucură de proprietatea ca perioada să fie independentă de amplitudine se numesc curbe *tautocrone*. Cicloida este o astfel de curbă. Pentru pendulul simplu această proprietate este satisfăcută numai cînd oscilațiile sînt extrem de mici:

$$k = \sin \frac{\theta_1}{2} \ll 1.$$

Se poate rezolva și problema inversă: care sînt curbele plane verticale pe care oscilațiile finite, fără frecare, ale unui punct greu se efectuează tautocron?

Însemnînd cu v_0 viteza inițială și y_0 înălțimea maximă la care se ridică pe curba căutată punctul greu, ecuația energiei ne dă:

$$v^2 = -2g\,(y - y_0).$$

Condiția de tautocronism cere ca timpul:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_0} \frac{ds}{\sqrt{y_0 - y}}$$

să fie independent de y_0. Prin substituția $y = y_0 u$ evităm discontinuitatea supărătoare care are loc pentru limita superioară, iar integrala precedentă se transformă în:

$$\int_0^1 \frac{s'(y_0 u)\sqrt{yu}\,du}{\sqrt{u\,(1-u)}}$$

care, pentru a fi independentă de y_0, este necesar și suficient ca:

$$\frac{d}{dy_0}\left[s'\,(y_0 u)\sqrt{y_0 u}\right] = 0.$$

Dar cum:

$$\frac{d}{dy_0} = u\frac{d}{dy}$$

rezultă:

$$\frac{d}{dy}\left(\sqrt{y} \cdot \frac{ds}{dy}\right) = 0;$$

așadar:

$$\sqrt{y}\,\frac{ds}{dy} = \text{const.}\,(= \sqrt{2a}).$$

Această condiție ne conduce la ecuațiile cicloidei:

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{\frac{2a}{y}}$$

deci:

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}$$

de unde rezultă:

$$y = a\,(1 - \cos\theta); \qquad x = a\,(\theta + \sin\theta).$$

În cazul cînd pendulul este lansat din punctul de întoarcere ($\theta = \pi$) fără viteză inițială și fără frecare, se poate calcula ușor reacțiunea normală din ecuația (7.17)

$$F_n + N = \frac{mv^2}{\rho},$$

unde, după (7.24) și (7.23), pentru $\varphi = 0$,

$$v^2 = 4ag\left(1 - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 4ag\cos^2\frac{\theta}{2},$$

ne dă, cu valoarea (7.22):

$$N = 2mg\cos\frac{\theta}{2} = -2F_n.$$

Studiul oscilațiilor tautocrone de amplitudine *finită* se datorește lui Chr. Huygens, care în *Horologium oscillatorium* (1673) caută să rezolve problema stabilității oscilațiilor pendulare.

Pendulul cicloidal nu are, însă, o aplicație practică remarcabilă.

Capitolul VIII

MIȘCAREA RELATIVĂ

108. **Ecuația mișcării.** Legea fundamentală a Mecanicii este invariantă numai pentru sisteme inerțiale. Deci, un observator legat de sistemul fix $O'x'y'z'$ aplică fenomenelor mecanice ecuația fundamentală:

$$m\bar{a} = \bar{F}, \tag{8.1}$$

pe cînd un observator legat de sistemul mobil $Oxyz$ care are față de O' o mișcare *oarecare* (*nu* rectilinie și uniformă) va trebui să aplice fenomenelor mecanice o ecuație diferită de (8.1), dacă raportează mișcarea la sistemul O' fix. Presupunem că observatorul O își dă seamă, printr-o experiență convenabil aranjată, că sistemul $Oxyz$ este mobil față de $O'x'y'z'$. Astfel de experiențe vor fi descrise mai jos: căderea corpurilor grele la suprafața pămîntului; pendulul lui Foucault.

Pentru observatorul legat de sistemul O, forța care produce mișcarea va fi definită prin relația care exprimă legea fundamentală a Mecanicii valabilă pentru O considerat de el ca fix (mișcare relativă):

$$\bar{F}_r = m\bar{a}_r. \tag{8.2}$$

Dacă însă, acest observator, dîndu-și seamă că sistemul său O este în realitate mobil, se transpune în situația observatorului legat de sistemul fix O', cîtimile $\bar{a}_r$ și $\bar{F}_r$ îi apar drept expresiile accelerației și forței „relative". Dar:

$$\bar{a}_r = \bar{a} - \bar{a}_{tr} - \bar{a}_c.$$

Deci, forța relativă apare drept rezultanta a trei forțe:

$$m\bar{a}_r = \bar{F}_r = \bar{F} - m\bar{a}_{tr} - m\bar{a}_c. \tag{8.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\overline{F}$ este forța reală de acțiune. Celelalte două forțe, anume $-m\overline{a}_{tr}$ și $-m\overline{a}_c$ vor avea, pentru observatorul din O care raportează mișcarea la sistemul fix O' (despre care am presupus că poate lua cunoștință), aspectul unor forțe *aparente*, ivite din cauză că sistemul O nu este un sistem de inerție; forțe, care ar obliga deci mobilul să efectueze o mișcare față de sistemul absolut O' chiar cînd forțele adevărate $\overline{F}$ ar fi nule. Din cauză că aceste forțe aparente caracterizează abaterea sistemului de referință de la calitatea de „sistem inerțial", li se dă numele de *forțe de inerție*[1]). Mărimea:

$$-m\overline{a}_{tr} = -m\overline{a}_0 - m\dot{\overline{\omega}} \times \overline{r} - m\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r})$$

se numește *forța de transport*, iar cîtimea:

$$-m\overline{a}_c = -2m\overline{\omega} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial t}$$

este *forța lui C o r i o l i s*; $\overline{a}_0$ este accelerația punctului O al sistemului mobil (deci accelerația observatorului din O) față de sistemul fix; $\overline{\omega}$ este viteza unghiulară a mișcării circulare a punctelor solidar legate de O, iar $\partial \overline{r}/\partial t$ este viteza relativă.

Așadar, observatorul O din sistemul mobil poate studia mișcarea considerînd sistemul de referință în care se găsește el $Oxyz$ drept fix, cu condiția ca pe lîngă *forțele reale* să adauge și *forțele de inerție*, așa încît pentru un astfel de observator ecuația de mișcare este, după (8.3):

$$m\overline{a}_r = \overline{F} - m\overline{a}_{tr} - m\overline{a}_c. \tag{8.4}$$

Este ușor de remarcat că astfel de mișcări există în natură. Înseși mișcările studiate de noi în laborator sau, în general, pe suprafața pămîntului, sînt mișcări de această categorie, dacă ținem seamă și de mișcarea proprie a pămîntului (sistemul mobil O) față de sistemul absolut, astronomic (sistemul fix O'). Este clar că pentru aceasta este nevoie ca observatorul O de pe pămînt să poată pune în evidență starea de mișcare (nerectilinie și neuniformă) a pămîntului față de sistemul astronomic. Această observație a condus la una din însemnatele probleme ale Astronomiei clasice: evidențierea rotației pămîntului.

Cel dintîi care a semnalat influența mișcării proprii (de rotație) a pămîntului asupra mișcărilor mecanice de pe suprafața lui a fost N e w t o n. Prima experiență menită să pună în evidență această rotație (rezultată din mișcarea circulară a tuturor punctelor materiale, ce constituie masa pămîntului, în jurul axei polilor) este devierea, în cădere, a unui mobil greu la suprafața pămîntului, spre est (adică în sensul rotației pămîntului). Acest efect își avea explicația simplă în observația următoare, rezultată din regula adunării vectoriale a forțelor: din vîrful unui turn lăsăm să cadă o piatră; vîrful turnului se rotește mai repde decît baza lui, deci piatra, transportînd cu ea în timpul căderii viteza de rotație a vîrfului, va cădea la baza

[1]) Spre distincție de forțele *reale*, capabile să transmită și să întrețină mișcarea, atribuim forțelor *inerțiale* caracterul de forțe *fictive*: ele apar numai în timpul și *din cauza* mișcării, — cînd aceasta este raportată la un sistem de referință fix, în spațiul newtonian absolut. O forță reală este datorită corpului material care o produce și care este distinct de corpul solicitat.

turnului mai spre est. În 1831, R e i c h a făcut experienţe în minele de la *Freiberg*. Mişcarea de rotaţie a pămîntului a fost pusă în evidenţă, în mod indiscutabil de către L é o n F o u c a u l t, prin celebra experienţă de la *Panthéon* (Paris). Vom expune mai jos teoria acestor experienţe.

109. **Echilibrul relativ.** Dacă punctul material este solidar legat cu sistemul mobil *Oxyz*, atunci el va fi în repaus faţă de acest sistem. Aceasta înseamnă că forţa care-l acţionează $\bar{F}_r$ va fi nulă şi că $\frac{\bar{\partial r}}{\partial t} = 0$; deci şi $\bar{a}_c = 0$. Ecuaţia (8.3) ne dă, pentru $\bar{F}_r = 0$, condiţia:

$$\bar{F} - m\bar{a}_{tr} = 0 \text{ sau } \bar{F} + (-m\bar{a}_{tr}) = 0; \tag{8.5}$$

deci, forţa reală de acţiune trebuie să facă echilibru forţei inerţiale de transport. Ţinînd seamă de (8.5) rezultă că $\bar{a} = \bar{a}_{tr}$; aşadar, forţa aplicată mobilului trebuie să-i imprime o acceleraţie absolută egală cu acceleraţia de transport.

Dacă punctul O are faţă de sistemul O' o mişcare rectilinie şi uniformă, atunci $\bar{a}_0 = 0$. Dacă sistemul O are o mişcare de rotaţie uniformă în jurul axului momentan, atunci $\dot{\bar{\omega}} = 0$. În acest caz:

$$-m\bar{a}_{tr} = -m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\Phi}.$$

Această mărime se numeşte *forţa centrifugă* $\bar{\Phi}$.

Mărimea $-m\bar{a}_c$ se numeşte şi *forţa centrifugă compusă* $\bar{C}$ sau *forţa lui* C o r i o l i s.

110. **Principiul echivalenţei.** Să presupunem că în cîmpul greutăţii (care este uniform) $m\bar{g}$, raportăm mişcarea unui punct la un sistem *Oxyz* animat de o translaţie rectilinie şi uniform acceleratăă, deci cu acceleraţie constantă $\bar{a} = \bar{g}$. Forţa de inerţie fiind $-m\bar{a} = -m\bar{g}$, ecuaţia mişcării devine:

$$m\bar{a}_r = -m\bar{a} + m\bar{g} = 0.$$

Aşadar, pentru un observator de masă m aşezat într-un ascensor care se mişcă în sensul greutăţii sub acţiunea unei forţe egală cu $m\bar{g}$ şi care nu ar putea lua contact cu lumea din afara ascensorului, *nu ar* exista cîmpul gravific. Această observaţie l-a condus pe E i n s t e i n la formularea „principiului echivalenţei". În identitatea $m\bar{a} = m\bar{g}$, masa joacă două roluri diferite: în primul membru ea apare sub aspectul ei de masă de inerţie, producătoare a unei forţe de inerţie $-m\bar{a}$; în membrul al doilea masa apare sub aspectul de masă gravifică producătoare a forţei gravifice $m\bar{g}$. E i n s t e i n formulează, în *Teoria relativităţii generalizată* pentru mişcări oarecari (nu numai pentru mişcări inerţiale) echivalenţa dintre masa gravifică şi cea inerţială, considerînd aceste două proprietăţi ale masei, ca două aspecte deosebite ale aceleiaşi entităţi materiale.

Această prevedere teoretică a fost verificată experimental de către E ö t v ö s (§ 118).

Scanned with OKEN Scanner

111. Energia cinetică relativă. Înmulțind scalar în ecuația (8.3) cu $\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$ și apoi integrînd-o găsim:

$$d\frac{m}{2}v_r^2 = \bar{F}\,d\bar{r} - m\bar{a}_{tr}\cdot d\bar{r},$$

căci $\bar{a}_c \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \equiv 0$; cîtimea $\frac{m}{2}v_r^2$ este energia cinetică relativă (pentru observatorul din O). Ecuația precedentă exprimă teorema:

Diferențiala energiei cinetice relative este egală cu lucrul mecanic elementar al forțelor de acțiune și al forței inerțiale de transport.

112. Echilibru relativ, la suprafața pămîntului. Să considerăm sistemul mobil O legat solidar de pămînt.

Accelerația de transport:

$$\bar{a}_{tr} = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \qquad (8.6)$$

se compune din următorii trei termeni:

a) *Accelerația de translație* $\bar{a}_0$ a centrului pămîntului C în care considerăm fixată originea sistemului mobil O. Această accelerație a pămîntului în jurul soarelui se datorește, precum știm, în primul rînd forței de gravitație a soarelui și, în al doilea rînd, celorlalte astre. Dacă însă alegem (ceea ce se întîmplă în realitate) originea sistemului mobil, solidar legat de pămînt, într-un punct de pe *suprafața* pămîntului (unde facem observația) accelerația lui O nu va fi exact egală cu aceea a lui C, din cauza distanței dintre C și O, egală cu raza pămîntului. Această deosebire produce, în dezvoltarea analitică a problemei celor două corpuri, o corecție de ordinul lui $\frac{R}{r}$ unde R este raza pămîntului și r distanța astrului care influențează mișcarea pămîntului, la centrul pămîntului. Această corecție este neglijabilă pentru experiențele mecanice asupra corpurilor solide, dar produce efecte importante asupra mișcării maselor mari, fluide. Se știe din Astronomie că acestei perturbații i se datorește fenomenul *mareelor*. Valoarea raportului $\frac{R}{r}$ ne arată că influența lunii ($r \approx 60R$) este cu mult mai mare decît influența soarelui ($r \approx 23\,000R$) asupra fenomenelor de flux și reflux de la suprafața pămîntului.

b) *Accelerația* $\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}$ datorită variației în timp a axei polilor (axa de rotație diurnă). Observațiile astronomice conclud că această variație este neglijabilă, fiind extrem de mică, așa încît $\bar{\omega}$ poate fi considerat constant și deci $\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} = 0$.

c) *Accelerația centripetă* $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$ datorită rotației uniforme $\bar{\omega} = \text{const.}$ a pămîntului în jurul axei polilor. Această accelerație produce forța centrifugă.

În mișcarea relativă la suprafața pămîntului rămîn deci: forțele aplicate, forța de atracție, forța centrifugă și forța centrifugă compusă (C o r i o l i s). În condițiile de *echilibru* va trebui să ținem seamă, în afara forțelor reale și eventualelor forțe de legătură (aplicate), numai de forța de atracție

Scanned with OKEN Scanner

a pămîntului și de forța centrifugă, așa încît condiția de echilibru se scrie după (8.5):

$$\bar{F} = m\bar{a}_0 + m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \tag{8.7}$$

113. Influența forței centrifuge asupra cîmpului gravitațional. În fig. 41 reprezentăm pămîntul; PP' fiind axa polilor și EE' ecuatorul. Într-un punct solidar legat de suprafața pămîntului atîrnăm de un fir un corp material greu M. Căutăm poziția de echilibru a firului. Direcția acestei poziții de echilibru este *verticala* locului; ea face cu ecuatorul unghiul φ, latitudinea locului.

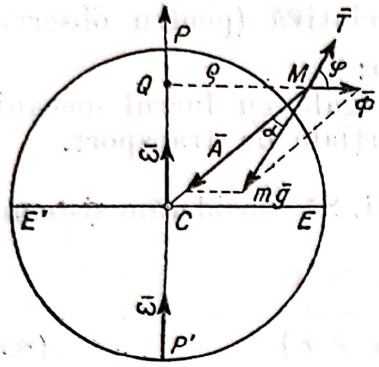

Fig. 41

Distanța $MQ = \rho$ a punctului M la axa polilor este dată, ca și φ, de observație.

Asupra punctului M acționează următoarele forțe reale: atracția pămîntului $\bar{A}$ și tensiunea firului $\bar{T}$, forțe care nu-și fac echilibru, căci pămîntul (sistemul mobil) posedă față de un sistem absolut, fix, o mișcare diferită de mișcarea rectilinie și uniformă. Unghiul α făcut de $\bar{T}$ cu $\bar{A}$ se numește *deviația verticalei din cauza rotirii pămîntului.*

În aceste condiții, relația de echilibru (8.7) se scrie:

$$\bar{F} = \bar{A} + \bar{T} = m\bar{a}_0 + m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \tag{8.8}$$

În primul rînd trebuie să ținem seamă că în această relație putem neglija forța inerțială de translație — $m\bar{a}_0$. În adevăr, această forță este forța gravitației newtoniene, datorită corpurilor cerești înconjurătoare.

Accelerația pămîntului $\bar{a}_0$ datorită acestor corpuri este dată de $\frac{fM}{r^2}$, unde M este masa corpului ceresc atractiv și r distanța de la pămînt la corpul ceresc. Dintre toate corpurile cerești, din cauza mărimii lui r, singurele care influențează sensibil mișcarea pămîntului sînt, precum știm, soarele și eventual luna.

Contribuția soarelui. În expresia:

$$a_0 = f\frac{M}{r^2}$$

înlocuind: $f = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$, $\mathrm{cm^3\,g^{-1}\,s^{-2}}$, $M_{soare} = 1{,}94 \cdot 10^{33}$ g, $(m_{pam.} = 6 \cdot 10^{27}\mathrm{g})$, $r = 149{,}5 \cdot 10^6$ km; rezultă:

$$a_0 = 5{,}79 \text{ mm/s}^2.$$

Deci, asupra unui gram se exercită forța 0,579 dyne.

Contribuția lunii. $m_{luna} = 39 \cdot 10^{-9}\, M_{soare}$; $r_{luna} = \frac{1}{387}\, r_{soare}$;

deci $a_{0\,luna} = 39 \cdot 10^{-9} \cdot (387)^2 a_{0\,soare} = 0{,}0058 a_{0\,soare}$.

Aceste două acțiuni asupra punctului material la suprafața pămîntului sînt deci neglijabile. Prin urmare — $ma_0 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația (8.8) se reduce la:

$$\overline{A} + \overline{T} - m\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) = 0. \tag{8.9}$$

Viteza unghiulară, constantă, de rotație a pământului în jurul axei polilor, luînd ca unitate de timp secunda sexagesimală de timp sideral, ste $\omega = \frac{2\pi}{86\,164}\ s^{-1}$ sau, în radiani, $\omega \sin 1''$. Interpretarea ecuației (8.9) conduce la rezultatul următor. Firul cu greutate atîrnat la suprafața pământului, prin definiție, ia direcția verticalei locului, astfel încît tensiunea firului, conform principiului reacțiunii, face echilibru *greutății* $m\overline{g}$. Prin urmare $\overline{T} = -m\overline{g}$ [semnul $(-)$ deoarece $\overline{T}$ este dirijat în sens contrar greutății]. Dacă nu ar exista forța centrifugă $\overline{\Phi}$ atunci $\overline{A}$ și $\overline{T}$ ar fi egale și de sens contrar, prin urmare tensiunea ar face echilibru forței reale de atracție ($\alpha = 0$), care ar fi atunci egală cu greutatea. Forța centrifugă $\overline{\Phi}$ este dirijată de la Q spre M și are valoarea absolută $\Phi = m\omega^2\rho$. Ecuația (8.9) reprezintă condiția ca forța $\overline{T}$ să facă echilibru forțelor $\overline{A} + \overline{\Phi}$. Cum $\overline{T}$ este reacțiunea firului asupra greutății, rezultă că greutatea punctului material va fi componenta celor două forțe care-l solicită și anume, atracția pământului și forța inerțială centrifugă. Vom avea deci greutatea $\overline{G}$, definită prin relația:

$$\overline{G} = \overline{A} + \overline{\Phi} = m\overline{g}. \tag{8.10}$$

Așadar, ceea ce numim noi la suprafața pământului *greutate* $\overline{G}$ este în realitate rezultanta acțiunii de atracție a pământului asupra punctului material și a forței centrifuge datorită rotației pământului. De aceea $\overline{g}$ poartă numele de *accelerația greutății*.

Să proiectăm ecuația (8.9) pe direcția lui $\overline{T}$ (verticală) și pe orizontală. Obținem:

$$A\cos\alpha - mg - m\omega^2\rho\cos\varphi = 0 \quad \text{și} \quad A\sin\alpha - m\omega^2\rho\sin\varphi = 0. \tag{8.11}$$

La ecuator: $\varphi = 0$, $\alpha = 0$. Prima relație (8.11) ne dă, însemnînd cu A_0, g_0, ρ_0 valorile respective la ecuator:

$$mg_0 = A_0\left(1 - \frac{m\omega^2\rho_0}{A_0}\right). \tag{8.12}$$

Cum $\rho_0 = 63\,782 \cdot 10^4$ cm; $m_p = 6 \cdot 10^{27}$ g și $g_0 = 978{,}04\ \frac{cm}{s^2}$ dedus prin observație, rezultă că:

$$\frac{m\omega^2\rho_0}{A_0} \approx \frac{1}{289} = \frac{1}{17^2}.$$

Așadar avem:

$$mg_0 = A_0\left(1 - \frac{1}{17^2}\right)$$

de unde rezultă că dacă pământul s-ar roti de 17 ori mai repede în jurul axei sale, deci cu viteza unghiulară 17ω, la ecuator toate corpurile ar fi lipsite de greutate.

Scanned with OKEN Scanner

La pol. $\rho = 0$, $\varphi = 90°$. Din a doua ecuație (8.11) rezultă $\alpha = 0$, iar prima ecuație (8.11) ne dă $mg = A$; deci ca și cum pămîntul nu s-ar roti în jurul axei sale; rezultat evident, căci observatorul se găsește pe axa de rotație.

La o latitudine oarecare. Să presupunem pămîntul sferic și omogen, deci $A = A_0$. Din triunghiul CMQ rezultă, însemnînd cu ρ_0 raza pămîntului, că $\rho = \rho_0 \cos(\varphi - \alpha)$. A doua formulă (8.11) ne dă:

$$\sin\alpha = \frac{m\omega^2\rho_0}{A_0}\cos(\varphi-\alpha)\sin\varphi = \frac{1}{289}\cos(\varphi-\alpha)\sin\varphi$$

unde α este un unghi foarte mic față de φ. Putem dezvolta membrul al doilea după puterile lui α și să neglijăm termenii în α^2 și $\frac{\alpha}{289}$. Obținem relația aproximativă:

$$\sin\alpha = \frac{1}{578}\sin 2\varphi$$

care ne arată că deviația maximă de la verticală are loc la latitudinea $\varphi = 45°$, și anume:

$$\alpha_{max} = \frac{180\cdot 60}{578\pi} = 6'.$$

Prima formulă (8.11) ne dă:

$$mg = A_0\left[\cos\alpha - \frac{1}{289}\cos(\varphi-\alpha)\cos\varphi\right]$$

sau, făcînd aceleași aproximații și ținînd seamă de (8.12):

$$mg = A_0\left(1 - \frac{1}{289}\cos^2\varphi\right) = A_0\left(1 - \frac{1}{289} + \frac{1}{289}\sin^2\varphi\right) = mg_0 + \frac{A_0}{289}\sin^2\varphi.$$

Rezultă că:

$$g_\varphi = g_0\left(1 + \frac{1}{289}\sin^2\varphi\right)$$

este accelerația greutății la latidutinea φ.

Această relație exprimă variația accelerației greutății cu latitudinea locului pe suprafața pămîntului. Se vede că g *crește spre pol*. Trebuie să reamintim și faptul că în calculele de geodezie se ține seamă de turtirea pămîntului și de reducerea la nivelul mării. O valoare, mai exactă decît precedenta, datorită lui H e l m e r t, este următoarea:

$$g_\varphi = g_0\,(1 + 0{,}005302\,\sin^2\varphi - 0{,}000007\,\sin^2 2\varphi).$$

Trebuie de adăugat că g *descrește*, în general, cu altitudinea locului h, după relația $g = g_m\,(1 - 2h:\rho)$, unde g_m și ρ sînt valorile respective la nivelul mării. Se mai folosește și formula:

$$g_{\varphi,h} = g_\varphi\,(1 - 314\cdot 10^{-11}\,h).$$

114. Mișcarea relativă a unui punct greu la suprafața pămîntului. Să considerăm axele mobile, cu originea într-un punct O solidar legat

Scanned with OKEN Scanner

de pământ, *la suprafața pământului*. Acest lucru este permis după observația ce am făcut-o asupra faptului, că luînd punctul O de pe suprafața pământului ca origine a axelor de coordonate și nu punctul C în centrul pământului, rezultă o eroare neglijabilă, regiunea în care facem observația fiind restrînsă în jurul lui O. Alegem ca axă x tangenta la meridianul lui O către polul sud; ca axă y tangenta la paralelul ce trece prin O către est; și ca axă z, direcția care completează triedrul tridreptunghic drept (direcția verticalei locului). Acest sistem de coordonate este solidar legat de pământ (fig. 42).

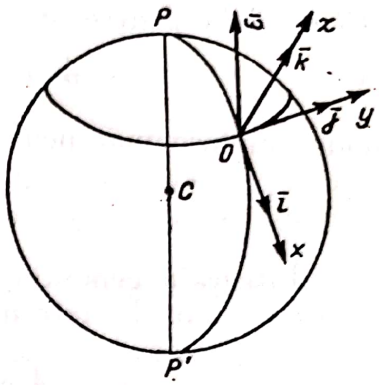

Fig. 42

Forțele reale care solicită un punct material m, care se mișcă față de sistemul cu originea în punctul O, sînt: forța de atracție $\overline{A}$ a pământului și eventualele forțe $\overline{F}$ aplicate punctului din afară. Forțele de inerție sînt: forța centrifugă:

$$\overline{\Phi} = -m\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r})$$

și forța lui Coriolis:

$$\overline{C} = -2m\overline{\omega} \times \overline{v},$$

însemnînd cu $\overline{v}$ viteza relativă la suprafața pământului (față de sistemul $Oxyz$), și cu $\overline{\omega}$ axul rotației diurne, paralel cu axa polilor. Mărimea:

$$\overline{A} + \overline{\Phi} = \overline{C} = -mg\overline{k}$$

reprezintă greutatea punctului material. Fie λ latitudinea locului;

$$\sphericalangle(\overline{\omega}, \overline{k}) = \frac{\pi}{2} - \varphi, \text{ iar } \sphericalangle(\overline{\omega}, \overline{i}) = \pi - \varphi.$$

Valoarea absolută a vitezei de rotație:

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} \text{ s}^{-1}$$

este constantă și cunoscută. Avem apoi:

$$\overline{\omega} = -\omega \cos\varphi \cdot \overline{i} + 0 \cdot \overline{j} + \omega \sin\varphi \cdot \overline{k}, \tag{8.13}$$

și deci

$$\frac{1}{2m}\overline{C} = \omega\dot{y} \sin\varphi\, \overline{i} - (\omega\dot{x} \sin\varphi + \omega\dot{z} \cos\varphi)\, \overline{j} + \omega\dot{y} \cos\varphi\, \overline{k}.$$

Ecuația vectorială a mișcării este:

$$m\ddot{\overline{r}} = -mg\overline{k} + \overline{C}. \tag{8.14}$$

Proiectată pe cele trei axe de coordonate, această ecuație ne dă sistemul:

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} \sin\varphi; \quad \ddot{y} = -2\omega(\dot{x} \sin\varphi + \dot{z} \cos\varphi); \quad \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{y} \cos\varphi. \tag{8.15}$$

Condițiile inițiale. Pentru $t = 0, v = v_0, x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Din (8.15) obținem:

$$\dot{x} = 2\omega y \sin \varphi + \dot{x}_0; \; \dot{z} = -gt + 2\omega y \cos \varphi + \dot{z}_0. \tag{8.16}$$

Substituind aceste valori în expresia (8.15) a lui $\ddot{y}$, obținem ecuația diferențială pentru y, anume:

$$\ddot{y} + 4\omega^2 y = -2a\omega + 2\omega \cos \varphi \cdot gt, \tag{8.17}$$

unde am însemnat pentru prescurtare:

$$\dot{x}_0 \sin \varphi + \dot{z}_0 \cos \varphi = a \text{ (const.)}.$$

Integrala generală a ecuației liniare de ordinul al doilea (8.17), cu condițiile inițiale date mai sus, este:

$$y = A \cos 2\omega t + B \sin 2\omega t - \frac{a}{2\omega} + \frac{g \cos \varphi}{2\omega} t$$

sau:

$$y = \frac{\dot{y}_0}{2\omega} \sin 2\omega t + \frac{g \cos \varphi}{2\omega} \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right) - \frac{a}{2\omega} (1 - \cos 2\omega t). \tag{8.18}$$

Înlocuind această valoare a lui y în ecuațiile (8.17) deducem, prin integrare, pe x și z. Dezvoltarea calculului complet este inutilă deoarece $\omega = \frac{2\pi}{86\,164}$ este foarte mic și ne putem opri la o aproximație convenabilă neglijînd puterile lui ω^2, ω^3 etc. în dezvoltările sinusului și cosinusului. Din (8.18) deducem valoarea aproximativă:

$$y = \dot{y}_0 t - a\omega t^2 + \frac{1}{3} \omega g \cos \varphi \cdot t^3 \tag{8.19}$$

valoare pe care introducînd-o în (8.18) obținem, neglijînd puterile mai mari ca ω:

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + 2\omega \dot{y}_0 \sin \varphi \cdot t; \; \dot{z} = \dot{z}_0 - (g - 2\omega \dot{y}_0 \cos \varphi) t.$$

Integrînd, avem, în definitiv:

$$x = \dot{x}_0 t + \omega \dot{y}_0 \sin \varphi \cdot t^2; \; y = \dot{y}_0 t - a\omega t^2 + \frac{1}{3} \omega g \cos \varphi \cdot t^3;$$

$$z = \dot{z}_0 t - \left(\frac{g}{2} - \omega \dot{y}_0 \cos \varphi \right) t^2. \tag{8.20}$$

Termenii în ω din aceste ecuații reprezintă devierea de la mișcarea parabolică, din cauza rotației pămîntului.

115. **Aplicații.** a) *Căderea liberă a punctului material greu.* Viteza inițială este nulă, deci $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$; $a = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuațiile (8.16), urmează:

$$x = 0;\ y = \frac{1}{3} g\omega \cos\varphi \cdot t^3;\ z = -\frac{g}{2} t^2.$$

Mobilul rămîne deci mereu în planul yz, dar în loc să cadă pe verticala z, el este deviat *spre est* (căci y este pozitiv) cu o cantitate foarte mică. Mobilul descrie în planul yz parabola semicubică, tangentă la verticala punctului de plecare:

$$y^2 + \frac{8}{9g} \omega^2 \cos^2\varphi \cdot z^3 = 0.$$

Experiența confirmă în totul această teorie. În minele de la *Freiberg*, latitudinea φ fiind de 51°, s-au lăsat să cadă corpuri grele de la înălțimi diferite; de ex. pentru $z = 158{,}5$ m s-a găsit o deviație medie de 2,8 cm, valoarea calculată teoretic fiind 2,76, ceea ce este perfect satisfăcător, ținînd în seamă erorile de experimentare.

b) *Devierea proiectilelor din planul vertical* (*meridian*). În relațiile (8.20) făcînd $\dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$, obținem pentru deviația de la direcția primitivă de lansare a unui proiectil, cu viteza inițială $\dot{x}_0$,

$$y = -\dot{x}_0 \omega \sin\varphi \cdot t^2 + \frac{1}{3} g\omega \cos\varphi \cdot t^3.$$

În emisfera boreală, $\sin\varphi$ este pozitiv. Deci, dacă proiectilul este zvîrlit spre nord, adică $\dot{x}_0 < 0$, deviația va fi estică ($y > 0$).

Acest rezultat este confirmat de cunoscuta tendință a fluviilor din Europa și Asia, care curg spre nord, de a roade malul estic, împingîndu-și albiile spre est.

Aerul cald de la ecuator, în tendința lui de expansiune spre regiunile de temperatură scăzută ale emisferei nordice, dă naștere vînturilor alizee, care deviază de asemenea spre est.

116. **Pendulul lui Foucault.** Ecuația de mișcare a punctului greu liber devine ecuația de mișcare a punctului legat printr-un fir flexibil de lungime l de un punct fix, dacă-i adăugăm reacțiunea firului, adică tensiunea $\bar{T} = T\frac{\bar{r}}{l}$. Se obține astfel:

$$m\ddot{\bar{r}} = -mg\bar{k} - 2m\bar{\omega} \times \dot{\bar{r}} - T\frac{\bar{r}}{l}, \tag{8.21}$$

dacă ținem seamă și de ecuația curbei fixe pe care se mișcă mobilul $r^2 = l^2$. Rezultă condiția:

$$\bar{r}\,\dot{\bar{r}} = 0. \tag{8.22}$$

Ecuația vectorială (8.21) se descompune în trei ecuații scalare. O ecuație scalară se obține înmulțind (8.21) scalar cu $\dot{\bar{r}}$; găsim ținînd seama de (8.22) ecuația energiei:

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\bar{r}})^2 = -mg(\bar{k}\,\dot{\bar{r}}) \tag{8.23}$$

sau:

$$v^2 = -2gz + h.$$

Alte ecuații scalare se obțin din (8.21) eliminînd mai întîi tensiunea T. Pentru aceasta înmulțim (8.21) vectorial cu $\bar{r}$. Obținem astfel ecuația vectorială a momentului cinetic:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times \dot{\bar{r}}) = g\bar{k} \times \bar{r} + 2\dot{\bar{r}}\,(\bar{\omega}\,\bar{r}). \tag{8.24}$$

Această ecuație proiectată pe axa z, adică înmulțită scalar cu $\bar{k}$, ne dă următoatea ecuație scalară:

$$\frac{d}{dt}(\bar{k}\,\bar{r}\,\dot{\bar{r}}) = 2(\bar{\omega}\,\bar{r})(\bar{k}\,\dot{\bar{r}}). \tag{8.25}$$

A treia ecuație scalară s-ar obține proiectînd (8.21) pe direcția firului $\bar{r}$. Înmulțind scalar cu $\bar{r}$ căpătăm însă o identitate. De fapt, ne rămîn numai două ecuații scalare: (8.25) și (8.19) la care se adaugă ecuația curbei (8.18). Reamintim că:

$$\bar{\omega} = -\omega \cos\varphi\ \bar{i} + \omega \sin\varphi\ \bar{k}.$$

Introducem coordonate cilindrice în care să transcriem ecuațiile (8.22), (8.25) și (8.23). Pendulul oscilează, într-un moment dat, într-un plan vertical care face azimutul α cu direcția axei x dirijată spre est. Coordonatele cilindrice sînt deci $\rho\,(l \sin\theta)$, α și $z\,(l\cos\theta)$. Obținem ($x=\rho\cos\alpha$; $y=\rho\sin\alpha$),

$$\begin{aligned} &\rho^2 + z^2 = l^2, \\ &\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\alpha}) = 2\omega\sin\varphi\cdot z\dot{z} - 2\omega\cos\varphi\cdot\rho\cos\alpha\cdot\dot{z} \\ &\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\alpha}^2 + \dot{z}^2 + 2gz = h. \end{aligned} \tag{8.26}$$

Să eliminăm pe z, scoțîndu-l din prima ecuație (8.26) și înlocuindu-l în celelalte două. Luăm $z = -\sqrt{l^2-\rho^2}$, căci axa z este îndreptată în sus, iar pendulul atîrnă în jos, spre z negativ.

A doua ecuație (8.26) ne dă:

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\alpha}) = -2\omega\rho\,\dot{\rho}\sin\varphi - \frac{2\omega\rho^2\dot{\rho}}{\sqrt{l^2-\rho^2}}\cos\alpha\cos\varphi$$

sau:

$$\frac{d}{dt}\left[\rho^2(\dot{\alpha} + \omega\sin\varphi)\right] = -\frac{2\omega\rho^2\dot{\rho}}{\sqrt{l^2-\rho^2}}\cos\alpha\cos\varphi. \tag{8.27}$$

A treia ecuație (8.26) se scrie:

$$\frac{l^2}{l^2-\rho^2}\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\alpha}^2 = 2g\sqrt{l^2-\rho^2} + h. \tag{8.28}$$

Sistemul de ecuații (8.27), (8.28) nu permite obținerea unei integrale generale. El poate fi integrat prin metoda aproximațiilor succesive. Ne mulțumim însă să studiem oscilațiile foarte mici în jurul poziției de echilibru, caz suficient ca să se pună în evidență rotația pămîntului prin experiența lui F o u c a u l t.

Scanned with OKEN Scanner

Vom neglija toți termenii cari conțin rapoartele $\frac{\rho}{l}$ și $\frac{\dot{\rho}}{l}$ la putere mai mare ca puterea a doua.

Ecuația (8.28) scrisă sub forma:

$$\frac{\dot{\rho}^2}{l^2}\left(1+\frac{\rho^2}{l^2}+\ldots.\right)+\frac{\rho^2}{l^2}\dot{\alpha}^2=\frac{2g}{l}\left(1-\frac{\rho^2}{2l^2}+\ldots.\right)+h_1$$

ne dă, neglijînd termenii mai mari ca cei pătratici,

$$\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\alpha}^2+\frac{g}{l}\rho^2=C_1. \tag{8.29}$$

Ecuația (8.27) se poate scrie, punînd $\psi=\alpha+\omega\sin\varphi\cdot t$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho^2}{l^2}\dot{\psi}\right)=-2\omega\frac{\rho^2}{l^2}\cdot\frac{\dot{\rho}}{l}\cos\alpha\cos\varphi\left(1+\frac{\rho^2}{2l^2}+\ldots.\right).$$

Membrul al doilea fiind foarte mic față de primul membru, căci conține rapoartele $\frac{\rho}{l}$, $\frac{\dot{\rho}}{l}$ la puteri mai mari ca puterea a doua, se poate neglija. Aceasta înseamnă că avem:

$$\rho^2\dot{\psi}=C_2 \tag{8.30}$$

Ecuația (8.29) devine în acest caz:

$$\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\psi}^2+\left(\frac{g}{l}+\omega^2\sin^2\varphi\right)\rho^2=C \tag{8.31}$$

unde

$$C=C_1+C_2\,\omega\sin\varphi.$$

Ecuațiile (8.30) și (8.31) reprezintă integrala primă a ariilor și a energiei, într-un sistem de coordonate polare plane ρ, ψ, cînd mobilul se mișcă sub acțiunea forței centrale elastice:

$$m\left(\frac{g}{l}+\omega^2\sin^2\varphi\right)\rho \tag{8.32}$$

coeficientul constant fiind esențial pozitiv.

Să considerăm un sistem de coordonate (Ox_1y_1) în planul orizontal, care să fie astfel așezat încît Ox_1, să facă cu Ox unghiul $-\omega\sin\varphi\cdot t$; ceea ce înseamnă că Ox_1y_1 să se rotească în jurul lui O cu o viteză unghiulară $\Omega=\omega\sin\varphi$, în sensul de la est → sud → vest → nord. Numim acest sens, sensul *retrograd*.

Am studiat oscilațiile infinit de mici în jurul poziției de echilibru sub acțiunea forței elastice (§ 62). Știm că mobilul va descrie, în proiecție orizontală, o elipsă raportată la (Ox_1y_1). Axele acestei elipse sînt animate față de (Oxy) de o mișcare de rotație uniformă, retrogradă, cu viteza unghiulară $\Omega=\omega\sin\varphi$ în jurul centrului (care este proiecția orizontală a punctului de suspensiune a pendulului).

117. **Experiența lui Foucault.** În momentul inițial îndepărtăm puțin pendulul din poziția de echilibru și-l lăsăm liber.

Deci, $t = 0, \rho = \rho_0, \rho_0 \neq 0, \dot{\varphi}_0 = 0$; adică $\dot{\psi}_0 = \omega \sin \varphi$.

În sistemul mobil Ox_1y_1, viteza inițială este $\rho_0\dot{\psi}_0 = \rho_0\omega \sin \varphi$, adică numai componenta perpendiculară pe vectorul de poziție $\bar{\rho}_0$. Aceasta înseamnă că direcția inițială $\bar{\rho}_0$ este o direcție de simetrie (tangenta perpendiculară pe diametru). A doua axă de simetrie este perpendiculară pe $\bar{\rho}_0$, deci direcția vitezei inițiale $\bar{v}_0$. Aceste direcții determină axele elipsei. Mărimile semiaxelor sînt:

$$\rho_0 \text{ și } \rho_0\omega \sin \varphi \Big/ \sqrt{\frac{g}{l} + \omega^2 \sin^2 \varphi} \approx \rho_0 \omega \sin \varphi \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{8.33}$$

dacă neglijăm pe ω^2.

Raportul axelor: $\omega \sqrt{\frac{l}{g}} \sin \varphi$

fiind foarte mic, elipsa este foarte turtită. Perioada unei oscilații complete a axelor elipsei este:

$$\Theta = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi},$$

iar durata unei oscilații a pendulului este:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Deci: $$\frac{T}{\Theta} = \omega \sqrt{\frac{l}{g}} \sin \varphi \tag{8.34}$$

exprimă raportul dintre axele elipsei; mărime ce se poate calcula din măsurarea perioadelor de oscilație a axelor elipsei Θ și a pendulului T. Experiența permite această determinare.

Datele experienței făcută de F o u c a u l t la P a n t h é o n (1851) erau: $\sin \varphi = 0{,}75$; $\Theta = \frac{4}{3}\ 24\ h = 32\ h$; $l = 6\,700$ cm; $\frac{T}{\Theta} = 0{,}00014$. Deci $T = 16$ s.

Amplitudinea oscilațiilor fiind de 5° și poziția inițială $\rho_0 = 292$ cm, rezultă semiaxa mică de 0,05 cm.

Rezultatul experimental confirmă, așadar, întrutotul teoria. Această constatare ne permite să tragem concluzia inversă, concluzie capitală pentru întreaga teorie newtoniană a gravitației universale, anume, că pămîntul efectuează cu adevărat o mișcare de rotație în jurul axei polilor.

Implicit, teoria de mai sus consfințește, prin verificare experimentală, exactitatea legii gravitației universale, extinzîndu-i valabilitatea și asupra fenomenelor care se petrec pe suprafața pămîntului. Acest fapt prezintă deosebită importanță, deoarece legea gravitației newtoniene fusese enunțată, în primul rînd, pentru fenomenele cosmice.

Întrucît metoda de calcul este aceea preconizată de Mecanica newtoniană, rezultatul experienței lui F o u c a u l t întărește valabilitatea

Scanned with OKEN Scanner

principiilor așezate la baza Mecanicii newtoniene, inclusiv posibilitatea raportării mișcărilor la un sistem absolut de coordonate.

S-a crezut, chiar, că experiența lui F o u c a u l t *demonstrează* existența *fizică* a spațiului *absolut*, ceea ce este desigur eronat.

118. **Experiența lui Eötvös - Zeeman.** Primul tip al balanței de torsiune este menit să stabilească, pe cale experimentală, „principiul echivalenței" formulat de E i n s t e i n, — după care masa gravifică și masa inertă sînt egale în valoare, ele constituind deci, cel mult, două aspecte ale aceleiași entități mecanice. Două puncte materiale M_1 și M_2 sînt legate de o bară rigidă (a cărei masă este neglijabilă) atîrnată de firul inextensibil OQ fixat în O ca în fig. 43 și fig. 44.

Punctele materiale se vor mișca sub influența forței de greutate care acționează asupra maselor lor gravifice, $m^{(1)}g$ și $m^{(2)}g$, precum și sub influența forței centrifuge datorită mișcării pămîntului, care va solicita masele de inerție. Însemnăm cu α_1 și α_2 raportul celor două feluri de mase:

$$\frac{m_g^{(1)}}{m_i^{(1)}} = \alpha_1 \quad \text{și} \quad \frac{m_g^{(2)}}{m_i^{(2)}} = \alpha_2. \tag{8.35}$$

Asupra punctelor considerate vor acționa forțele datorite atracției masei m:

$$\overline{F}_g^{(1)} = -fm\, m_g^{(1)} \frac{\overline{r}}{r^3}; \quad \overline{F}_c^{(1)} = m_i^{(1)} a\omega^2 \cos\varphi \cdot \overline{\rho}; \tag{8.36}$$

prima este gravitatea, în care intră masa gravifică, iar a doua este forța centrifugă, în care intră masa inertă.

De asemenea:

$$\overline{F}_g^{(2)} = -fmm_g^{(2)} \frac{\overline{r}}{r^3}; \quad \overline{F}_c^{(2)} = m_i^{(2)} a\omega^2 \cos\varphi \cdot \overline{\rho}; \tag{8.37}$$

a este raza pămîntului; ω viteza unghiulară, foarte mică, de rotație a pămîntului; φ latitudinea locului și $\overline{\rho}$ versorul perpendicularei pe axa polilor în sensul pozitiv

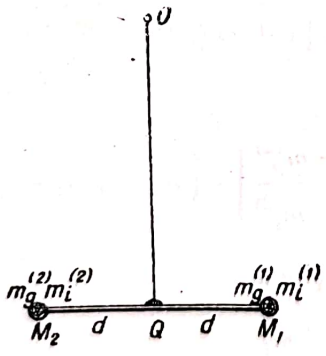

Fig. 43

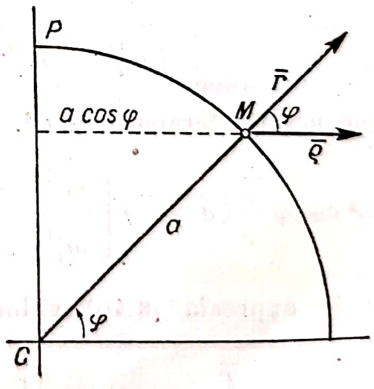

Fig. 44

al forței centrifuge. Masele gravifice, ca și cele inerte, ale celor două corpuri, sînt foarte puțin diferite între ele.

Fie d distanța punctelor materiale la punctul de suspensie Q de fir. Momentul forțelor aplicate punctelor, în raport cu axul OQ, se obține înmulțind scalar momentul forțelor în raport cu punctul Q cu vectorul unitate al lui $\overrightarrow{OQ}$. Dar direcția și sensul pe fir sînt cele ale tensiunii $\overline{T}$ a firului. Din teoria echilibrului la suprafața pămîntului (§ 114) se știe că tensiunea $\overline{T}$ este egală cu suma

atracției și a forței centrifuge, $\overline{T} = \overline{A} + \overline{\Phi}$. Așadar, vectorul unitate pe direcția lui $\overline{T}$ este:

$$\frac{\overline{T}}{T} = \frac{-fm\left(m_g^{(1)} + m_g^{(2)}\right)\frac{\overline{r}}{r^3} + a\omega^2\cos\varphi\left(m_i^{(1)} + m_i^{(2)}\right)\overline{\rho}}{\sqrt{\left[-fm\left(m_g^{(1)} + m_g^{(2)}\right)\frac{1}{r^2}\right]^2 + \left[a\omega^2\cos\varphi\left(m_i^{(1)} + m_i^{(2)}\right)\right]^2 - \ldots}}$$

$$\ldots - \frac{2fma\omega^2\cos^2\varphi}{r^2}\left(m_g^{(1)} + m_g^{(2)}\right)\left(m_i^{(1)} + m_i^{(2)}\right)$$

sau, avînd în vedere micimea vitezei de rotație a pămîntului, ω, dezvoltăm numitorul pînă la puterile în ω^2. Putem scrie:

$$\frac{\overline{T}}{T} = \left[\frac{\overline{r}}{r} - \frac{a\omega^2\cos\varphi}{f\frac{m}{r^2}}\cdot\frac{m_i^{(1)} + m_i^{(2)}}{m_g^{(1)} + m_g^{(2)}}\overline{\rho}\right]\cdot\left[1 + \frac{fm}{r^2}a\omega^2\cos^2\varphi\frac{m_i^{(1)} + m_i^{(2)}}{m_g^{(1)} + m_g^{(2)}} + O(\omega^4)\right] \quad (8.38)$$

unde $O(\omega^4)$ înseamnă termeni în ω^4 sau de ordin superior.

Momentul forțelor în raport cu O este

$$\overline{M} = \overline{d}\times\left(\overline{F}_g^{(1)} - \overline{F}_g^{(2)}\right) + \overline{d}\times\left(\overline{F}_c^{(1)} - \overline{F}_c^{(2)}\right) = -\frac{fm}{r^2}\left(m_g^{(1)} - m_g^{(2)}\right)\left(\overline{d}\times\frac{\overline{r}}{r}\right) +$$

$$+ a\omega^2\cos\varphi\left(m_i^{(1)} - m_i^{(2)}\right)\left(\overline{d}\times\overline{\rho}\right). \quad (8.39)$$

Proiectăm acest moment pe direcția firului, înmulțind scalar valorile precedente ale lui $\overline{M}$ și $\overline{T}/T$:

$$\overline{M}\frac{\overline{T}}{T} = a\omega^2\cos\varphi\frac{\overline{r}}{r}\left(\overline{d}\times\overline{\rho}\right)\left[\frac{m_i^{(1)} - m_i^{(2)}}{m_i^{(1)} + m_i^{(2)}} - \frac{m_g^{(1)} - m_g^{(2)}}{m_g^{(1)} + m_g^{(2)}}\right]\times$$

$$\times\left(m_i^{(1)} + m_i^{(2)}\right)\left(m_g^{(1)} + m_g^{(2)}\right)\left[1 + O(\omega^4)\right]$$

unde putem neglija termenii în ω^4. Rezultă:

$$\overline{M}\frac{\overline{T}}{T} = a\omega^2\cos\varphi\frac{\overline{r}}{r}\left(\overline{d}\times\overline{\rho}\right)\left[\frac{m_i^{(1)} - m_i^{(2)}}{m_i^{(1)} + m_i^{(2)}} - \frac{m_g^{(1)} - m_g^{(2)}}{m_g^{(1)} + m_g^{(2)}}\right]\cdot\left(m_i^{(1)} + m_i^{(2)}\right). \quad (8.40)$$

Înlocuind în expresia (8.40) valorile (8.35), obținem:

$$\overline{M}\frac{\overline{T}}{T} = a\omega^2\cos\varphi\frac{\overline{r}}{r}\left(\overline{d}\times\overline{\rho}\right)\frac{2m_i^{(1)}m_i^{(2)}}{\alpha_1 m_g^{(1)} + \alpha_2 m_g^{(2)}}(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (8.41)$$

Observăm că această expresie (8.41) se anulează pentru $\alpha_2 = \alpha_1$. O putem deci considera ca o primă aproximație din dezvoltarea după puterile lui $(\alpha_2 - \alpha_1)$. În această aproximație, luăm la numitorul lui (8.41) pe $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Pe de altă parte, observăm că putem scrie:

$$2m_i^{(1)}m_i^{(2)} \approx \frac{\left(m_i^{(1)} + m_i^{(2)}\right)^2}{2}. \quad (8.42)$$

Scanned with OKEN Scanner

În definitiv, ținînd seama de (8.42), expresia (8.41) se scrie:

$$\overline{M}\,\frac{\overline{T}}{T} = \frac{m_i^{(1)} + m_i^{(2)}}{2}\, a \cos\varphi\,\omega^2 \overline{d}\cdot \left(\overline{\rho} \times \frac{\overline{r}}{r}\right) \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha} \qquad (8.43)$$

care ne exprimă componenta momentului forțelor în raport cu axul de suspensie $\overrightarrow{OQ}$. Acest moment este maxim cînd $\overline{d}$ este paralel cu $\left(\overline{\rho} \times \frac{\overline{r}}{r}\right)$, deci cînd bara suspendată ocupă poziția răsărit - apus, căci $\overline{\rho}$ și $\frac{\overline{r}}{r}$ determină planul meridian al locului unde se face observația. În acest caz $\overline{d}\left(\overline{\rho} \times \frac{\overline{r}}{r}\right) = \pm d \sin\varphi$ iar relația precedentă devine:

$$\overline{M}\,\frac{\overline{T}}{T} = \frac{m_i^{(1)} + m_i^{(2)}}{2}\, da\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi\,\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha} \qquad (8.44)$$

unde toate mărimile sînt cunoscute sau măsurabile, afară de diferența $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha}$ care reprezintă variația relativă a raportului celor două mase. Această diferență, dacă există o deosebire între masa gravifică și cea inertă, va putea fi pusă în evidență prin măsurarea torsiunii firului QO, datorită momentului $\overline{M}\,\frac{\overline{T}}{T}$. În adevăr, așezăm pendulul în poziția de echilibru est-vest și citim pe o scară legată de cutia pendulului (cutie care se poate roti în jurul axului OQ, independent de acesta) poziția momentană; rotim apoi cutia cu 180°; pendulul trebuie să prezinte o deviație egală cu dublul expresiei precedente, care ne dă pe $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha}$, căci cele două corpuri și-au schimbat acum rolurile. E ö t v ö s calculează că se poate aprecia experimental o deviație relativă de la valoarea medie α, care poate să ajungă pînă la cel mult $5 \cdot 10^{-8}$. Toate măsurătorile făcute de E ö t v ö s și Z e e m a n dovedesc însă inexistența unui astfel de efect prevăzut de teorie. Ceea ce înseamnă că, pentru toate corpurile, α este același. Putem alege unitățile de măsură astfel, încît acest raport să fie egal cu unitatea.

Prin urmare putem exprima principiul echivalenței: *masa gravifică este egală în valoare cu masa inertă, pentru toate corpurile.*

Acest principiu stă la baza teoriei relativității generalizate a lui A. E i n s t e i n.

Partea a doua

SISTEME DE PUNCTE MATERIALE

Capitolul IX

ECUAȚIILE MIȘCĂRII

119. **Mulțime de puncte materiale.** Aceasta este totalitatea formată dintr-un număr oarecare n de puncte materiale M_1, M_2,... M_n, număr care poate fi finit sau infinit, mulțimea totală fiind *mărginită* și *închisă*. Punctele care formează mulțimea se mișcă *liber*, dacă între ele nu există nici un fel de legătură, avînd libertatea de a se deplasa oricum în spațiu, putînd descrie, nestingherite și independente, traiectoriile ce li se impun fiecăruia prin legile de mișcare ale punctului material liber, sub acțiunea forțelor active exterioare. Mulțimea devine un „*sistem de puncte materiale*" atunci cînd punctele care o formează *nu* sînt independente, ci sînt supuse la legături reciproce.

Din punct de vedere fizic, *legăturile* într-un sistem de puncte materiale sînt caracterizate, așadar, prin proprietatea ce au de a transforma o mulțime de puncte libere, independente, într-un sistem de puncte materiale cu caractere *comune* în mișcare, formînd un „*tot*", în general deformabil și, în cazuri speciale, rigid.

Sistemele de puncte materiale, solicitate de forțe, determină un „cîmp" de *forțe localizate*. În adevăr, fiecare punct material, care compune sistemul, devine un punct geometric de aplicare a forțelor active.

120. **Forțe interne.** Forțele active, exterioare, își au originea în afara sistemului și se aplică tuturor punctelor sistemului în același moment; în schimb, legăturile de interacțiuni dintre punctele care formează sistemul se dezvoltă în „interiorul" sistemului de puncte materiale.

Aceste „legături de interacțiune" mai poartă numele de *forțe interne*. Ele sînt caracterizate prin proprietatea mecanică de a satisface *principiul reacțiunii*. Așadar, fiecare punct M_s al sistemului este solicitat de o forță internă $\bar{\Phi}_{sk}$ datorită fiecărui alt punct M_k ($s \neq k$), astfel încît:

$$\bar{\Phi}_{sk} + \bar{\Phi}_{ks} = 0. \tag{9.1}$$

Dacă $\bar{r}_s$ este vectorul de poziție al punctului M_s, cum $\bar{\Phi}_{sk}$ are direcția $\overline{M_s M_k}$, obținem prin înmulțire vectorială:

$$\bar{r}_s \times \bar{\Phi}_{sk} + \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_{ks} = (\bar{r}_s - \bar{r}_k) \times \bar{\Phi}_{sk} = \overrightarrow{M_k M_s} \times \bar{\Phi}_{sk} = 0. \tag{9.2}$$

Fie $\bar{\Phi}_s$ rezultanta forțelor interne care solicită punctul M_s de masă m_s. Pentru *toate* punctele sistemului vom avea, din (9.1)

$$\sum_{s=1}^{n} \bar{\Phi}_s = 0; \tag{9.3}$$

deci, rezultanta forțelor interne este egală cu zero.

De asemenea, $\bar{r}_s$ fiind vectorul de poziție al punctului M_s, momentul rezultant al forțelor interioare va fi nul:

$$\sum_{s=1}^{n} \bar{r}_s \times \bar{\Phi}_s = 0. \tag{9.4}$$

Dimpotrivă, lucrul mecanic datorit acestor forțe este, în general, diferit de zero. În adevăr, fie $d\bar{r}_s$ deplasările elementare într-o mișcare oarecare a sistemului. Lucrul mecanic elementar datorit forțelor interne este:

$$\sum_{sk} \bar{\Phi}_{sk}\, d\bar{r}_s = \sum_{s} \bar{\Phi}_s\, d\bar{r}_s.$$

Termenii proveniți de la o pereche de forțe interne $\bar{\Phi}_{sk}$, $\bar{\Phi}_{ks}$ nu se distrug, în general, așa încît:

$$\bar{\Phi}_{sk} d\bar{r}_s + \bar{\Phi}_{ks} d\bar{r}_k = \bar{\Phi}_{sk}\,(d\bar{r}_s - d\bar{r}_k) = \bar{\Phi}_{sk} d\bar{r}_{ks} \tag{9.5}$$

se anulează în cazurile particulare $\bar{\Phi}_{sk} = 0$ sau $\bar{r}_{sk} = \text{const.}$, ceea ce formulează condiția de „rigiditate" a corpului.

Vedem așadar, că aceste forțe interioare au caracter de forțe efective și nu caracter de forțe de reacțiune în sensul legăturilor exterioare aplicate punctelor materiale prin constrîngerea ce li s-ar imprima de a se mișca numai într-un anumit fel, căci relația (9.5) ne arată că ele produc un lucru mecanic.

Putem să reprezentăm fizicește aceste forțe prin forțele de coeziune moleculară sau electrică, intramoleculare sau intraatomice; deci, niște forțe de interacțiune interioare sistemului de puncte materiale, care sînt totuși forțe reale.

Un sistem de puncte materiale supus numai forțelor interne se numește *sistem izolat.*

121. **Forțe de legătură exterioare.** Dacă impunem sistemului anumite restricții, după exemplul mișcării punctului izolat pe o suprafață sau o curbă, se dezvoltă, din exterior, *forțele de reacțiune* (§ 32). Ele apar numai în timpul și din cauza mișcării sau a tendinței de mișcare.

Cînd legăturile depind de timp (legături *reonome*) aceste forțe produc lucru mecanic (exemplu: în mișcarea pe o curbă sau suprafață mobilă).

Cînd legăturile nu depind de timp (legături *scleronome*), mișcarea efectuîndu-se *fără frecare*, lucrul mecanic este nul.

122. **Teorema impulsului total.** Să considerăm, în general, un sistem de puncte materiale neizolat. Fie $\bar{F}_s$ și $\bar{\Phi}_s$ rezultantele forțelor exterioare

și ale forțelor interne aplicate punctului M_s. In $\bar{F}_s$ intră și eventualele reacțiuni datorite legăturilor exterioare. Putem atunci considera punctul M_s ca un punct liber solicitat de toate aceste forțe. Mișcarea lui se va efectua după legea newtoniană:

$$\bar{m}_s \ddot{\bar{r}}_s = \bar{F}_s + \bar{\Phi}_s \qquad (s = 1, 2, \ldots n) \tag{9.6}$$

unde m_s este masa punctului M_s. Ecuațiile, în termeni finiți, ale mișcării se obțin integrînd acest sistem de $3n$ ecuații diferențiale cu $3n$ necunoscute x_s, y_s, z_s.

Sumînd pentru toate punctele sistemului și avînd în vedere relația (9.3) obținem:

$$\frac{d}{dt} \sum_s (m_s \dot{\bar{r}}_s) = \sum_s \bar{F}_s \tag{9.7}$$

ceea ce exprimă *teorema*: derivata în raport cu timpul a impulsului total $\sum_s (m_s \dot{\bar{r}}_s)$ este egală cu rezultanta forțelor *exterioare* aplicate tuturor punctelor sistemului.

123. **Teorema centrului de greutate.** Centrul de masă al sistemului se deplasează ca un punct material izolat care ar avea, ca masă, masa totală a sistemului, și asupra căruia ar fi aplicate toate forțele exterioare.

Sistemul considerat de n puncte materiale M_s de masă m_s oricît de mare ar fi numărul de puncte n ce-l constituie, dar finit, se bucură de proprietatea fizică de a fi finit, ca dimensiuni, avînd ca masă totală o valoare finită $m = \sum_s m_s$. Aceasta se datorește faptului că, în definiția masei m_s a punctului material, folosim un proces de limită:

$$m_s = \lim_{\delta\tau \to 0} \frac{\delta m}{\delta \tau},$$

proces care este admisibil presupunînd existența unei mase finite δm și a unui volum finit $\delta\tau$ în care masa totală este distribuită în mod continuu. (Anexa I, § 23).

Am definit *centrul de masă* prin ecuația (Anexa I, § 23):

$$m\bar{r}_G = \sum_s m_s \bar{r}_s , \tag{9.8}$$

m fiind masa totală a sistemului, iar $\bar{r}_G$ vectorul de poziție. Din relațiile (9.7) și (9.8) rezultă teorema enunțată mai sus asupra centrului de masă, anume:

$$\frac{d}{dt}\left(m \dot{\bar{r}}_G\right) = \sum_s \bar{F}_s = \bar{F}.$$

Inmulțind vectorial cu $\bar{r}_G$, obținem teorema momentului cinetic pentru centrul de masă:

$$m \frac{d}{dt}\left(\bar{r}_G \times \dot{\bar{r}}_G\right) = \sum_s (\bar{r}_G \times \bar{F}_s) = \bar{r}_G \times \bar{F}. \tag{9.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțind scalar cu $d\bar{r}_G$ avem teorema energiei cinetice în mișcarea centrului de masă:

$$d\left(\frac{m}{2}\, v_G^2\right) = \sum_s \bar{F}_s d\bar{r}_G = \bar{F}\, d\bar{r}_G. \tag{9.10}$$

Cum, pentru un sistem de puncte materiale *grele*, forțele $\bar{F}_s$ formează cîmpul gravitațional, rezultă că „greutatea" totală a sistemului este definită prin rezultanta care solicită centrul de masă. De aceea centrul de masă se numește și *centrul de greutate*.

Cazuri particulare. a) In lipsa oricăror forțe exterioare, $\sum_s \bar{F}_s = 0$; centrul de greutate satisface principiul inerției: efectuează o mișcare rectilinie și uniformă.

b) *Mersul.* Teorema mișcării centrului de masă (centrul de greutate) se aplică și mersului omenesc. Omul, prin mișcări produse de acțiunile mușchilor, „merge". Însă toate forțele dezvoltate de acțiunile musculare sînt forțe interioare. Ele nu pot deci, prin ele însele, produce o deplasare a centrului de masă decît pe verticală, sub acțiunea greutății, dacă nu ar exista și altfel de forțe exterioare în joc.

Aceste forțe exterioare sînt reacțiunile dezvoltate în contact cu solul, reacțiuni datorite frecării tălpilor de pămînt. Cînd omul vrea să meargă, ridică și înaintează un picior; celălalt picior, în contact cu solul, tinde să execute o mișcare de sens contrar (principiul reacțiunii), astfel încît centrul de masă să rămînă pe verticală. In acest moment intervine componenta reacțiunii solului (datorită frecării), paralelă cu solul în sensul mișcării. Această reacțiune, deplasată în centrul de masă, produce înaintarea.

124. **Teorema momentului cinetic total.** a) Inmulțind vectorial în ecuațiile (9.6) cu $\bar{r}_s$, sumînd pentru toate punctele M_s și observînd relația (9.4) obținem:

$$\frac{d}{dt}\sum_s (\bar{r}_s \times m_s \dot{\bar{r}}_s) = \sum_s (\bar{r}_s \times \bar{F}_s) \tag{9.11}$$

care exprimă *teorema*: derivata în raport cu timpul a momentului cinetic total față de un punct dat, luat ca pol, este egală cu momentul total al forțelor exterioare în raport cu același pol.

b) Relația (9.11), proiectată pe un ax fix $\bar{\sigma}$, ne dă aceeași teoremă, momentele fiind luate față de acest ax:

$$\sum_s \bar{\sigma}\,(\bar{r}_s \times m_s \dot{\bar{r}}_s) = \sum_s \bar{\sigma}\,(\bar{r}_s \times \bar{F}_s). \tag{9.12}$$

Această relație exprimă proprietatea următoare: derivata dublului vitezelor areolare a proiecțiilor punctelor sistemului pe un plan, față de un punct O din acest plan, este egală cu momentul rezultant al forțelor exterioare în raport cu axul perpendicular pe plan în O.

125. **Teorema ariilor.** În cazul particular cînd:

$$\sum_s \bar{\sigma}\,(\bar{r}_s \times \bar{F}_s) = 0$$

din (9.12) rezultă:

$$\sum_s \bar{\sigma}\,(\bar{r}_s \times m\dot{\bar{r}}_s) = C \text{ (const.)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Proiecțiile vitezelor areolare pe un ax dat măsoară ariile descrise de punctele considerate în mișcarea lor pe planul perpendicular pe ax. Deducem *teorema ariilor*: dacă momentul rezultant al forțelor exterioare în raport cu un ax fix dat este nul, atunci suma produselor ariilor descrise de proiecțiile punctelor pe un plan perpendicular pe ax, înmulțite cu masele lor, este constantă în tot timpul mișcării.

Aplicație. Dacă o persoană stă pe un plan perfect neted, ea nu poate executa o rotație în jurul unui ax vertical ce trece prin corpul ei (decît făcînd mișcări complicate cu brațele) întrucît forțele exterioare (greutatea, reacțiile), fiind paralele cu axul vertical, au momentul nul în raport cu acest ax; deci suma ariilor trebuie să rămînă mereu constantă, în proiecție pe planul orizontal. Atunci, dacă în intenția de a provoca o rotație a corpului prin mișcări musculare (forțe interioare), producem o rotație a părții superioare a corpului, partea inferioară a corpului va suferi o mișcare de rotație egală și de sens contrar, astfel încît suma ariilor proiectate să rămînă constantă (respectiv, nulă). Numai reacțiile orizontale ale solului pot permite executarea unor astfel de mișcări, ca și în cazul mersului.

126. **Planul ariilor maxime.** În cazul particular cînd momentul față de un punct O este nul:

$$\sum_s (\bar{r}_s \times \bar{F}_s) = 0$$

vectorul

$$\bar{\mu} = \sum_s (\bar{r}_s \times m\dot{\bar{r}}_s) ,$$

cu originea în punctul O, va fi fix. Proiecția lui $\bar{\mu}$ pe orice direcție $\bar{\sigma}$ fixă, ce trece prin O, va fi constantă în timpul mișcării. Aceasta înseamnă că teorema ariilor se aplică mișcării proiectate pe orice plan care trece prin O. Dar momentul constant $\bar{\sigma}\bar{\mu} = C$ are o valoare maximă pentru $\bar{\sigma}$ paralel cu $\bar{\mu}$. Așadar, pe planul perpendicular pe $\bar{\mu}$, constanta ariilor C va avea valoarea maximă.

Din această cauză planul perpendicular pe $\bar{\mu}$ se numește *planul ariilor maxime.*

127. **Energia cinetică.** Înmulțind în ecuația (9.6) cu $\dot{\bar{r}}_s$ și sumînd obținem, dacă avem în vedere relația (9.6):

$$d \sum_s \frac{m_s}{2} v_s^2 = \sum_s \bar{F}_s d\bar{r}_s + \sum_s \bar{\Phi}_s d\bar{r}_s \qquad (9.13)$$

unde v_s reprezintă viteza punctului M_s, iar $d\bar{r}_s$ este o deplasare reală a punctului M_s. Rezultă *teorema*: diferențiala energiei cinetice totale este egală cu lucrul mecanic elementar al *tuturor* forțelor (atît interioare, cît și exterioare; între aceste forțe exterioare putînd figura și eventualele forțe de legături).

128. **Integrala primă a energiei.** Expresia energiei cinetice ne poate procura o integrală primă în cazul cînd nu există reacțiuni și cîmpul vec-

Scanned with OKEN Scanner

torial al tuturor forțelor (exterioare și interioare) este un cîmp de gradient. Fie $V_s(M_s)$ potențialul forțelor, funcție numai de poziție. După (9.13):

$$d\sum_s \frac{m_s}{2} v_s^2 = \sum_s dV_s;$$

așadar:

$$\sum_s \frac{m_s}{2} v_s^2 = \sum_s V_s(M_s) + h, \tag{9.14}$$

unde h este constanta energiei. Această expresie (10.13) constituie o integrală primă a mișcării.

Astfel de forțe, care derivă dintr-un potențial, au fost numite *forțe conservative* [§ 42].

129. **Observație asupra forțelor de legătură.** În cazul legăturilor reonome, forțele de legătură contribuie la lucrul mecanic al forțelor exterioare (în care sînt înglobate); în cazul legăturilor scleronome, lucrul lor mecanic este nul, iar ecuația (9.14) rămîne valabilă.

130. **Sistem conservativ.** Se poate întîmpla ca nu toate forțele care solicită un sistem material să fie forțe conservative, ci numai o parte din ele. Un caz important de această natură este cazul cînd numai *forțele interne* sînt conservative. În acest caz, notînd cu L lucrul mecanic al forțelor *interne*, care derivă din potențialul $U(\bar{r}_s)$ (v. § 152) avem, pentru deplasarea sistemului din starea (1) în starea (2):

$$L = \int_{(1)}^{(2)} \sum_s \bar{\Phi}_s \, d\bar{r}_s = -\int_{(1)}^{(2)} \operatorname{grad} U(\bar{r}_s) \, d\bar{r}_s = U_{(1)} - U_{(2)}$$

ceea ce exprimă *teorema*: cînd forțele interioare sînt conservative, sistemul material poate trece dintr-o stare (1) într-o stare (2) astfel încît lucrul mecanic al forțelor interioare nu depinde de drumul efectuat, ci numai de starea inițială și starea finală.

Un astfel de sistem material poartă numele de *sistem conservativ*.

Reciproca teoremei precedente este adevărată. În adevăr, sistemul conservativ M_s considerat într-o stare oarecare ca stare finală și luînd starea inițială M_{s_0} ca o stare fixă, va dezvolta, în această variație, un lucru mecanic, funcție de starea finală:

$$L = L(M_s).$$

Trecînd de la această stare (2) la o stare infinitesimal vecină, deci variind coordonatele cu $d\bar{r}_s$, lucrul mecanic L va crește cu:

$$dL = \sum_s \bar{\Phi}_s \, d\bar{r}_s.$$

De unde:

$$\bar{\Phi}_s = \operatorname*{grad}_{M_s} L.$$

Scanned with OKEN Scanner

131. **Energia internă.** Funcţia $U(\bar{r}_s)$ fiind determinată numai pînă la o constantă aditivă, o putem considera esenţial pozitivă. Ea poartă numele de *energie internă* sau de *energia potenţială a sistemului.*

În Fizică, se întîlnesc sisteme materiale conservative. Printre acestea se află corpurile absolut elastice (în regim adiabatic sau izotermic), gazele perfecte şi fluidele compresibile, pentru care energia internă se exprimă cu ajutorul unei funcţii potenţiale şi variază după starea de mişcare internă a sistemului, absorbind sau producînd lucru mecanic.

Cazul fluidelor incompresibile prezintă un interes deosebit prin faptul că energia lor internă rămîne constantă. Aceasta se datoreşte împrejurării fizice care condiţionează incompresibilitatea prin forţe interne de reacţiune care nu produc lucru mecanic.

132. **Ecuaţia energiei totale.** Ecuaţia energiei se scrie

$$d\left(\sum_s \frac{m_s}{2} v_s^2 + U\right) = \sum_s \bar{F}_s d\bar{r}_s \qquad (9.15)$$

unde în membrul întîi primul termen reprezintă energia cinetică; U energia potenţială a sistemului datorită forţelor interioare; iar în membrul al doilea figurează lucrul mecanic elementar al tuturor forţelor exterioare numai pentru o deplasare reală, aceste forţe putînd să nu fie conservative.

Din (9.15) rezultă *teorema*: variaţia (sau diferenţiala) energiei totale interne a sistemului este egală cu lucrul mecanic (elementar) al tuturor forţelor exterioare.

Energia totală a sistemului este deci egală cu lucrul mecanic total al forţelor exterioare, necesar pentru a transporta sistemul dat, din starea actuală, în starea specială în care energia lui totală este nulă.

Cînd nu există nici o forţă exterioară, energia totală a sistemului izolat este constantă:

$$\sum_s \frac{m_s}{2} v_s^2 + U = C. \qquad (9.16)$$

Trebuie să observăm că relaţia (9.15) este identică cu (9.14) numai cînd $U \equiv V$, adică $\sum_s \bar{F}_s d\bar{r}_s$ este o diferenţială exactă.

Relaţia (9.16) ne spune că orice forţe interioare, aplicate unui sistem conservativ izolat, lasă energia sa totală constantă. Singura variaţie posibilă este transformarea din energie potenţială în cinetică, sau invers. Relaţia (9.16) exprimă imposibilitatea unui „perpetuum mobile" mecanic, căci nu putem crea energie decît cheltuind lucru mecanic echivalent, după (9.15).

Acest principiu se dovedeşte a fi adevărat şi pentru alte forme de energie (calorică, electrică, chimică etc.) şi capătă în *Termodinamică* o formulare universal valabilă.

El constituie principiul general care stă la baza întregii Fizici, în concepţia ei actuală.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul X

MIȘCAREA RELATIVĂ ÎN JURUL CENTRULUI DE GREUTATE

Să legăm de sistemul material un triedru de coordonate cu originea în centrul de greutate, avînd *axele paralele cu trei direcții fixe*. Mișcarea sistemului de puncte materiale, raportată la aceste coordonate, poartă numele de mișcare relativă în jurul centrului de greutate.

133. **Teorema momentului cinetic relativ.** Ecuația Mecanicii punctului material izolat fiind invariantă la transformări galileiene, rezultă că și ecuația fundamentală a Mecanicii sistemelor de puncte materiale:

$$\sum_s m_s \ddot{\bar{r}}_s = \sum_s \bar{F}_s \tag{10.1}$$

satisface aceleași condiții. Ea este deci invariantă față de sisteme de referință în mișcare rectilinie și uniformă.

Este remarcabil, însă, că teorema momentului cinetic total, adică ecuația:

$$\frac{d}{dt}\sum_s (\bar{r}_s \times m_s \dot{\bar{r}}_s) = \sum_s (\bar{r}_s \times \bar{F}_s) \tag{10.2}$$

rămîne valabilă în mișcarea relativă față de un sistem de referință avînd axele paralele cu axele sistemului fix și originea în *centrul de greutate* al sistemului material; acest punct putînd avea, însă, o mișcare *oarecare* față de sistemul fix. Să stabilim această proprietate.

134. **Lemă. Transformarea expresiei momentului cinetic.** Să alegem, deocamdată, un pol oarecare O' variabil față de polul fix O. Fie un punct M_s al sistemului, avînd ca vectori de poziție față de O și O' pe $\bar{r}_s$ și $\bar{r}'_s$. Fie $\bar{r}_0 = \bar{r}_s - \bar{r}'_s$ vectorul de poziție al lui O' față de O.

a) Momentul impulsului total $\sum m_s \dot{\bar{r}}_s$ (momentul cinetic absolut) pentru polul fix O, luat în raport cu O' este (Anexa I, § 19):

$$\sum_s (\bar{r}'_s \times m_s \dot{\bar{r}}_s) = \sum_s (\bar{r}_s - \bar{r}_0) \times m_s \dot{\bar{r}}_s.$$

Derivînd expresia precedentă și observînd că $\dot{\bar{r}}_s \times m_s \dot{\bar{r}}_s \equiv 0$, obținem

$$\sum_s (\bar{r}'_s \times m_s \ddot{\bar{r}}_s) = \frac{d}{dt}\sum_s (\bar{r}'_s \times m_s \dot{\bar{r}}_s) + \dot{\bar{r}}_0 \times \sum_s m_s \dot{\bar{r}}_s.$$

Ecuația momentului cinetic se scrie, în acest caz:

$$\frac{d}{dt}\sum_s (\bar{r}'_s \times m_s \dot{\bar{r}}_s) + \dot{\bar{r}}_0 \times \sum_s m_s \dot{\bar{r}}_s = \sum_s (\bar{r}'_s \times \bar{F}_s),$$

mișcarea punctului O' față de O fiind cunoscută prin $\dot{\bar{r}}_0$. Cînd O' este fix, termenul al doilea dispare.

b) Pentru Mecanică este interesant cazul cînd O' se confundă cu *centrul de greutate* G al sistemului, putînd avea însă o mișcare arbitrară față de sistemul fix O. În acest caz:

$$\bar{r}_s = \bar{r}_G + \bar{r}'_s\,; \quad \dot{\bar{r}}_s = \dot{\bar{r}}_G + \dot{\bar{r}}'_s\,. \tag{10.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Proprietatea stabilită în paragraful precedent se scrie:

$$\frac{d}{dt}\sum_s (\bar{r}'_s \times m_s \dot{\bar{r}}'_s) = \sum_s (\bar{r}'_s \times \bar{F}_s). \tag{10.4}$$

În adevăr, din relaţia de definiţie a centrului de greutate, § 123, rezultă:

$$\sum_s m_s \bar{r}'_s = 0 \; ; \quad \sum_s m_s \dot{\bar{r}}'_s = 0. \tag{10.5}$$

Făcînd în (10.2) substituţiile (10.3) obţinem:

$$\sum_s (\bar{r}_s \times m_s \dot{\bar{r}}_s) = \sum_s (\bar{r}_G \times m_s \dot{\bar{r}}_G) + \sum_s (\bar{r}_G \times m_s \dot{\bar{r}}'_s) +$$

$$+ \sum_s (\bar{r}'_s \times m_s \dot{\bar{r}}_G) + \sum_s (\bar{r}'_s \times m_s \dot{\bar{r}}'_s). \tag{10.6}$$

Termenii al doilea şi al treilea din (10.6) sînt nuli, conform relaţiilor (11.5). Rămîne deci,

$$\sum_s (\bar{r}_s \times m_s \dot{\bar{r}}_s) = m\bar{r}_G \times \dot{\bar{r}}_G + \sum_s (\bar{r}'_s \times m_s \dot{\bar{r}}'_s) \tag{10.7}$$

şi proiectînd pe un ax fix $\bar{\sigma}$ obţinem relaţiile:

$$\sum_s \bar{\sigma}(\bar{r}_s \times m_s \dot{\bar{r}}_s) = m\bar{\sigma}(\bar{r}_G \times \dot{\bar{r}}_G) + \sum_s \bar{\sigma}(\bar{r}'_s \times m_s \dot{\bar{r}}'_s). \tag{10.8}$$

Aceste relaţii demonstrează *lema*: momentul cinetic total în raport cu un punct (sau un ax trecînd prin acel punct) luat ca origine a axelor de coordonate fixe este egal cu momentul cinetic în raport cu acelaşi punct (sau ax) al centrului de greutate, în care presupunem concentrată toată masa sistemului material, adunat cu momentul cinetic total relativ; (adică în raport cu centrul de greutate sau în raport cu un ax paralel cu primul, dar trecînd prin centrul de greutate).

Odată acestea stabilite, putem demonstra imediat teorema (10.4). În adevăr, din (10.7) rezultă:

$$\frac{d}{dt}\sum_s (\bar{r}_s \times m_s \dot{\bar{r}}_s) = \frac{d}{dt} m (\bar{r}_G \times \dot{\bar{r}}_G) + \frac{d}{dt}\sum_s (\bar{r}'_s \times m_s \dot{\bar{r}}'_s),$$

dar, pe de altă parte, din (10.3):

$$\sum_s (\bar{r}_s \times \bar{F}_s) = \sum_s (\bar{r}_G + \bar{r}'_s) \times \bar{F}_s = \sum_s (\bar{r}_G \times \bar{F}_s) + \sum_s (\bar{r}'_s \times \bar{F}_s),$$

de unde rezultă imediat ecuaţia căutată (10.4).

135. **Consecinţă. Teorema ariilor.** Dacă momentul rezultant al forţelor exterioare este nul în raport cu o axă de direcţie fixă trecînd prin centrul de greutate, atunci teorema ariilor se aplică în proiecţie pe un plan perpendicular pe axul considerat. Dacă momentul rezultant al forţelor exterioare în raport cu centrul de greutate este nul, teorema se aplică pentru orice plan de direcţie fixă, trecînd prin centrul de greutate. În

Scanned with OKEN Scanner

special se aplică față de planul ariilor maxime, care este, precum știm, planul fix perpendicular pe vectorul constant:

$$\sum_s (\bar{r}'_s \times m_s \dot{\bar{r}}'_s) = \bar{C}.$$

Această împrejurare a fost folosită de L a p l a c e spre a determina un „plan invariabil" în sistemul solar. Neglijînd acțiunile stelelor, sistemul solar nu mai este solicitat de nici o forță exterioară și devine sistem izolat. Deci, momentul cinetic rezultant în raport cu centrul de greutate al sistemului solar (care este aproape de centrul soarelui) este constant și determină planul ariilor maxime, care rămîne invariabil în timpul mișcărilor din interiorul sistemului solar.

136. **Teorema lui S. König.** Energia cinetică totală absolută este egală cu energia cinetică totală relativă la axele de orientare fixă cu originea în G, adunată cu energia cinetică a centrului de greutate în care se presupune a fi concentrată toată masa sistemului material. Avem:

$$v_s^2 = (\dot{\bar{r}}_G + \dot{\bar{r}}'_s)^2 = v_G^2 + v_s'^2 + 2\dot{\bar{r}}_G \dot{\bar{r}}'_s.$$

Dar, după (11.5):

$$\sum_s m_s \dot{\bar{r}}'_s = 0;$$

așadar:

$$\sum_s \frac{m_s}{2} v_s^2 = \frac{m}{2} v_G^2 + \sum_s \frac{m_s}{2} v_s'^2. \tag{10.9}$$

137. **Teorema energiei.** Din formula (9.10) § 123, ținînd seamă de (10.9) și de faptul că:

$$\sum_s \bar{\Phi}_s d\bar{r}_G = d\bar{r}_G \sum_s \bar{\Phi}_s = 0 \tag{10.10}$$

rezultă:

$$d \sum_s \frac{m_s}{2} v_s'^2 = \sum_s \bar{F}_s d\bar{r}'_s + \sum_s \bar{\Phi}_s d\bar{r}'_s$$

deci, diferențiala energiei cinetice totale relative este egală cu lucrul mecanic al tuturor forțelor (interne și externe) produs de o deplasare infinitesimală față de sistemul G.

138. **Observații.** 1. Lucrul mecanic al forțelor interne este același într-o deplasare relativă sau absolută, căci după (10.10)

$$\sum_s \bar{\Phi}_s d\bar{r}_s = \sum_s \bar{\Phi}_s d\bar{r}'_s.$$

Pentru forțele exterioare

$$\sum_s \bar{F}_s d\bar{r}_s = \sum_s \bar{F}_s d\bar{r}'_s + d\bar{r}_G \sum_s \bar{F}_s.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă există „legături" fără frecare, cu corpuri fixe, aceste forțe trebuie socotite ca forțe exterioare, căci pe cînd lucrul mecanic al forțelor interne rămîne neschimbat atît în mișcare relativă cît și în mișcare absolută, pentru legături exterioare. în mișcare absolută lucrul mecanic este nul, pe cînd în mișcare relativă, lucrul mecanic este diferit de zero.

2. *Sisteme grele.* Dacă forțele active care solicită sistemul material se reduc la cîmpul gravitațional, atunci $\bar{F}_s = m_s \bar{g}$ și:

$$\sum_s \bar{F} d\bar{r}_s = \bar{g} \sum_s m_s d\bar{r}_s = 0.$$

Rezultă că un sistem greu va poseda o mișcare relativă ca și cum nu ar fi solicitat de forța de greutate.

3. *Porțiuni dintr-un sistem material.* Dacă dintr-un sistem total de puncte materiale izolăm o porțiune, aceasta va fi tratată tot prin ecuațiile de mișcare stabilite mai sus, cu condiția ca să socotim printre forțele exterioare și acțiunile exercitate asupra sistemului parțial de către restul sistemului total.

139. **Impulsii**[1]). În cazul unui sistem de puncte materiale, vom distinge două feluri de impulsii: interioare și exterioare; astfel încît pentru un punct dat, ecuația de mișcare va fi aceea găsită în cazul punctului material liber:

$$m_s \bar{v}_1 - m_s \bar{v}_0 = \bar{P}_{int} + \bar{P}_{ext}.$$

Dacă vom suma însă pentru toate punctele, observînd că impulsiile interioare se supun principiului reacțiunii, rezultă:

$$\left(\sum_s m_s \bar{v}_s\right)_1 - \left(\sum_s m_s \bar{v}_s\right)_0 = \sum_s \bar{P}_{ext}, \qquad (10.11)$$

relație care constituie *teorema impulsului.*

Din această teoremă deducem *teorema centrului de greutate*:

$$(m \dot{\bar{r}}_G)_1 - (m \dot{\bar{r}}_G)_0 = \sum_s \bar{P}_{ext} \qquad (10.12)$$

avînd în vedere relația (9.8).

În mod analog putem scrie și *teorema momentului cinetic.* În adevăr, din ecuația (10.2):

$$\frac{d}{dt} \sum_s (\bar{r}_s \times m_s \dot{\bar{r}}_s) = \sum_s (\bar{r}_s \times \bar{F}_s)$$

putem deduce, pentru o variație finită, în intervalul de timp extrem de mic (t_0, t_1) ecuația, momentului cinetic, sub forma:

$$\left[\sum_s (\bar{r}_s \times m_s \dot{\bar{r}}_s)\right]_1 - \left[\sum_s (\bar{r}_s \times m_s \dot{\bar{r}}_s)\right]_0 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_s (\bar{r}_s \times \bar{F}_s)\, dt$$

[1]) Facem distincție între „impuls" $(\bar{mv})$ și „impulsie" $\bar{P} = \int \bar{F}\, dt$, numită și „percuție" în problema ciocnirilor.

Scanned with OKEN Scanner

sau:

$$\left[\sum_s (\bar{r}_s \times m_s \dot{\bar{r}}_s)\right]_1 - \left[\sum_s (\bar{r}_s \times m_s \dot{\bar{r}}_s)\right]_0 = \sum_s (\bar{r}_s \times \bar{P}_s) \qquad (10.13)$$

unde:

$$\bar{P}_s = \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}_s dt \qquad (10.14)$$

reprezintă *impulsia*, în intervalul de timp foarte scurt în care $\bar{r}_s$ rămîne constant.

Ecuația energiei se scrie:

$$\sum_s m_s (\bar{v}_s - \bar{v}_s^0)\, \bar{v}_s = \sum_s \bar{v}_s \bar{P}_s. \qquad (10.15)$$

Deci: variația energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic total al impulsiilor.

Observație. Teoremele precedente sînt scrise pentru mișcarea absolută, deci, în cazul axelor fixe. Cum, însă, intervalul de timp în care are loc impulsia este extrem de scurt, axele legate de sistem pot fi considerate ca fixe (deplasîndu-se foarte puțin), așa încît teoremele precedente sînt valabile și în coordonate legate de sistem, deci în mișcare relativă.

Capitolul XI

MOMENTE DE INERȚIE

140. **Definiție.** În problemele de mișcare a sistemelor de puncte materiale și a corpului solid, apar expresii de forma $\sum_s m_s \delta_s^2$ unde m_s este masa mobilului din M_s, iar δ_s distanța acestui mobil la un punct oriîla o axă, ori la un plan fix, dat. De exemplu, dacă sistemul considerat are ca singură mișcare posibilă o mișcare circulară a tuturor punctelor sale în jurul unei axe fixe (fig. 45), cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$, atunci viteza absolută se reduce la:

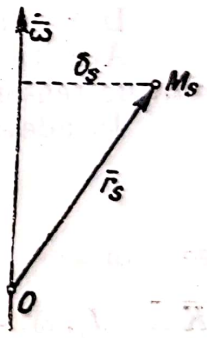

Fig. 45

$$\bar{v}_s = \dot{\bar{r}}_s = \bar{\omega} \times \bar{r}_s$$

unde $\bar{r}_s$ este vectorul de poziție al punctului M_s față de un sistem fix cu originea în O, pe axa $\bar{\omega}$. Momentul cinetic total al acestei mișcări circulare, în raport cu punctul O, este dat de vectorul:

$$\bar{K} = \sum_s m_s [\bar{r}_s \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_s)], \qquad (11.1)$$

Din punct de vedere geometric, relația (11.1) subordonează fiecărui vector $\bar{\omega}$ un vector $\bar{K}$, astfel încît transformarea liniară (11.1) este o transformare *omografică* vectorială. În adevăr, lui $\alpha\bar{\omega}$ îi corespunde vectorul omo-

$\log \alpha \overline{K}$, iar dacă $\overline{\omega}_1$ și $\overline{\omega}_2$ au ca vectori omologi pe $\overline{K}_1$ și $\overline{K}_2$, vectorului $\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$ îi corespunde vectorul $\overline{K}_1 + \overline{K}_2$, din cauza proprietății distributive a produsului vectorial.

Acest vector $\overline{K}$ este legat de noțiunea mecanică a „momentului de inerție". Înmulțind (11.1) scalar cu $\overline{\omega}$, obținem scalarul:

$$\overline{K}\,\overline{\omega} = \sum_s m_s (\overline{\omega} \times \overline{r}_s)^2 = \omega^2 \sum_s m_s \delta_s^2$$

însemnînd cu:

$$\delta_s = \left| \frac{\overline{\omega}}{\omega} \times \overline{r}_s \right| .$$

distanța lui M_s la axa $\overline{\omega}$.

Apare, așadar, expresia amintită mai sus, pe care o numim componenta *momentului de inerție* relativ la axa $\overline{\omega}$:

$$J_\omega = \sum_s m_s \delta_s^2 ,$$

astfel încît:

$$\overline{K}\,\overline{\omega} = \omega^2 J_\omega . \tag{11.2}$$

Ea este pozitivă (cînd nu toate punctele sînt pe $\overline{\omega}$) sau nulă. Omografia (11.1) se numește *omografie inerțială*.

Sensul mecanic al noțiunii de „moment de inerție" reiese clar din observația următoare. Energia cinetică totală, în cazul cînd fiecare punct M_s se mișcă cu viteza unghiulară $\overline{\omega}$, este:

$$E_c = \sum_s \frac{m_s}{2} [\overline{\omega} \times \overline{r}_s]^2 = \frac{J_\omega}{2} \omega^2 \tag{11.3}$$

căci $\overline{v}_s = \overline{\omega} \times \overline{r}_s$.

În această expresie, viteza unghiulară $\overline{\omega}$ apare în locul vitezei $\overline{v}$, iar J_ω joacă rolul masei de inerție.

Din această cauză cîtimea J_ω poartă numele de moment de inerție.

Analitic, expresia momentului de inerție se lămurește cu ajutorul noțiunii de tensor de ordinul al doilea (Anexa III, § 66,67).

În adevăr, avem după (11.2):

$$\overline{K}\,\overline{\omega} = \sum_s m_s [(\omega_x \overline{i} + \omega_y \overline{j} + \omega_z \overline{k}) \times \overline{r}_s]^2$$

sau încă:

$$\overline{K}\,\overline{\omega} = J_{11}\,\omega_x^2 + J_{22}\,\omega_y^2 + J_{33}\,\omega_z^2 + 2J_{23}\,\omega_y\,\omega_z + 2J_{31}\,\omega_z\,\omega_x + 2J_{12}\,\omega_x\,\omega_y \tag{11.4}$$

unde coeficienții $J_{ij} = J_{ji}$ sînt componentele covariante ale unui tensor simetric J de ordinul al doilea și anume:

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix} .$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în relația (11.4) scriem coeficienții directori ai direcției $\bar{\omega}$ (α,β,γ), ținînd seamă de (11.2) avem:

$$J_\omega = J_{11}\alpha^2 + J_{22}\beta^2 + J_{33}\gamma^2 + 2J_{23}\beta\gamma + 2J_{31}\gamma\alpha + 2J_{12}\alpha\beta \qquad (11.5)$$

expresie care ne dă pe J_ω cînd cunoaștem pe J și direcția axei $\bar{\omega}$ față de care calculăm momentul de inerție respectiv. J este caracteristic sistemului material considerat. Componentele lui sînt definite explicit prin:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \sum_s m_s(y_s^2 + z_s^2), & J_{23} &= J_{32} = -\sum_s m_s y_s z_s \\ J_{22} &= \sum_s m_s(z_s^2 + x_s^2), & J_{31} &= J_{13} = -\sum_s m_s z_s x_s \\ J_{33} &= \sum_s m_s(x_s^2 + y_s^2), & J_{12} &= J_{21} = -\sum_s m_s x_s y_s \end{aligned} \qquad (11.6)$$

Mărimile J_{11}, J_{22}, J_{33} sînt momentele de inerție față de axele de coordonate, iar J_{23}, J_{31}, J_{12} se numesc *momente centrifugale* sau *de deviație*. Momentele de inerție față de planele de coordonate sînt, după definiție:

$$\sum_s m_s x_s^2\,,\quad \sum_s m_s y_s^2\,,\quad \sum_s m_s z_s^2$$

iar față de originea O este

$$\sum_s m_s r_s^2 = \sum_s m_s(x_s^2 + y_s^2 + z_s^2) = \frac{1}{2}(J_{11} + J_{22} + J_{33}).$$

Observații. 1. *Pentru sisteme materiale continue*, fie $\rho\,(x,y,z)$ densitatea și $d\tau$ elementul de volum; masa fiind $m = \rho d\tau$, sumele care ne dau momentele de inerție se transformă în integrale, astfel încît în loc de $\sum_s m_s x_s^2$ vom avea $\int \rho x^2 dx$ etc.

2. Dacă avem un moment de inerție J_{pq} față de un sistem de coordonate cartezian (neaccentuat), momentele de inerție față de un alt sistem (accentuat) tot cartezian determinat prin transformările *ortogonale* de cosinusuri directoare α_{sp} va fi dat de legea de transformare a componentelor unui tensor de ordinul al doilea (Anexa III, § 79):

$$J'_{st} = \sum_{pq} \alpha_{sp}\,\alpha_{tq}\,J_{pq}\,. \qquad (11.7)$$

În adevăr, din condiția de invarianță $\sum_{pq} J_{pq}x_p x_q = \sum_{sk} J_{sk}x'_s x'_k$ (unde am pus $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$) se deduce relația de transformare (12.7), așa cum s-a stabilit la Anexa III, § 67.

Expresia pătratică (11.5) care dă componenta J_ω pe direcția ω (α,β,γ) cînd se cunosc componentele J_{ij} pe axele x, y, z, este analogul relației liniare din calculul vectorial care dă componenta unui vector pe o direcție ca funcție liniară de componentele pe cele trei axe și de cosinusurile directoare ale direcției considerate (Anexa III, § 66).

141. Elipsoidul de inerție. (Anexa III, § 66). O metodă convenabilă pentru cercetarea valorii momentului de inerție față de o axă $\bar{\omega}$ a cărei direcție poate varia în sistemul material, dar trecînd printr-un punct fix O, se obține cu ajutorul noțiunii de elipsoid de inerție relativ la punctul O.

Să considerăm pe axa $\bar{\omega}$ un vector $\bar{r}$ cu originea în O, astfel ca:

$$\bar{r} = \frac{\bar{\omega}}{\omega \sqrt{J_\omega}}. \tag{11.8}$$

Deci:

$$r = \frac{1}{\sqrt{J_\omega}}. \tag{11.9}$$

Am considerat deci toți vectorii cu originea în O și lungime egală cu $\frac{1}{\sqrt{J_\omega}}$. Ținînd seama de relațiile (11.4), (11.2) și (11.6) rezultă că extremitatea vectorului $\bar{r}$ descrie suprafața:

$$1 = J_{11}x^2 + J_{22}y^2 + J_{33}z^2 + 2J_{23}yz + 2J_{31}zx + 2J_{12}xy, \tag{11.10}$$

unde membrul al doilea este o formă pătratică pozitiv definită.

Dacă punctele materiale nu sînt toate pe o dreaptă trecînd prin O, J_ω este totdeauna pozitiv, iar r este totdeauna reală și finită. Cuadrica (11.10) nu are puncte la infinit. Este deci un elipsoid, numit *elipsoid de inerție relativ la punctul O*. În cazul excepțional cînd toate punctele materiale sînt pe o linie dreaptă trecînd prin O, atunci momentul de inerție în raport cu această dreaptă este nul, iar elipsoidul se reduce la un cilindru de revoluție în jurul acestei drepte. Relația (11.9) ne permite să calculăm pe J cunoscînd distanța de la O la elipsoid, adică elipsoidul.

142. **Observații asupra tensorului de inerție.** 1. Cu ajutorul ecuației (11.10) putem defini vectorul $\bar{J}$ prin componentele $J_1 = \frac{1}{\omega\sqrt{J_\omega}} K_x$, $J_2 = \frac{1}{\omega\sqrt{J_\omega}} K_y$ și $J_3 = \frac{1}{\omega\sqrt{J_\omega}} K_z$ folosind ecuația (11.1) și expresiile (11.6):

$$J_1 = J_{11}x + J_{12}y + J_{13}z;\ J_2 = J_{21}x + J_{22}y + J_{23}z;$$
$$J_3 = J_{31}x + J_{32}y + J_{33}z. \tag{11.11}$$

Ecuația (11.10) se scrie $\sum_{sk} J_{sk}x_s x_k = 1$ (scalar); ceea ce dă caracterul de tensor de ordinul doi lui J_{sk}, simetric, de două ori covariant (Anexa III, § 64).

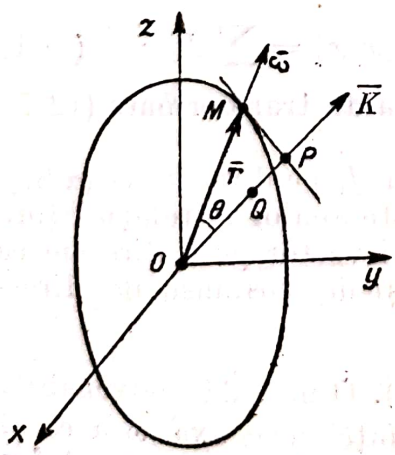

Fig. 46

143. **Construcția vectorului $\bar{K}$** (fig. 46). Observăm din (11.1) că $d\bar{K}$ este omologul lui $d\bar{\omega}$. Așadar, variind foarte puțin pe $\bar{\omega}$, putem scrie:

$$\begin{aligned}
\bar{K}d\bar{\omega} &= \sum_s m_s\, d\bar{\omega}\,[\bar{r}_s \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_s)] = \\
&= \sum_s m_s\,(\bar{\omega} \times \bar{r}_s)\,(d\bar{\omega} \times \bar{r}_s) = \\
&= \sum_s m_s\,[(\bar{\omega}d\bar{\omega})\,(\bar{r}_s\,\bar{r}_s) - (\bar{\omega}\,\bar{r}_s)\,(\bar{r}_s d\bar{\omega})] = \\
&= \sum_s m_s\,\bar{\omega}\,[d\bar{\omega}\,(\bar{r}_s\,\bar{r}_s) - \bar{r}_s\,(\bar{r}_s\,d\bar{\omega})] = \\
&= \sum_s m_s\bar{\omega}\,[\bar{r}_s \times (d\bar{\omega} \times \bar{r}_s)] = \bar{\omega}d\bar{K}.
\end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $$\bar{K}d\bar{\omega} = \bar{\omega}d\bar{K}.$$

Pe de altă parte avem, după (11.2) (unde scriem pe scurt J în loc de J_ω):

$$\bar{K}\bar{\omega} = \omega^2 J.$$

Aşadar:

$$\bar{K}d\bar{\omega} = \frac{1}{2}d(\omega^2 J) = \frac{1}{2}d(\omega\sqrt{J})^2$$

sau:

$$\bar{K}d\omega = (\omega\sqrt{J})\,d(\omega\sqrt{J}).$$

După (11.8):

$$\bar{r} = \frac{\bar{\omega}}{\omega\sqrt{J}}$$

deci:

$$d\bar{r} = \frac{d\bar{\omega}}{\omega\sqrt{J}} - \bar{\omega}\frac{d(\omega\sqrt{J})}{\omega^2 J}.$$

Prin urmare:

$$\bar{K}d\bar{r} = \frac{\bar{K}d\bar{\omega}}{\omega\sqrt{J}} - \bar{K}\bar{\omega}\frac{d(\omega\sqrt{J})}{\omega^2 J} = \frac{\omega\sqrt{J}}{\omega\sqrt{J}}d(\omega\sqrt{J}) - \frac{\omega^2 J}{\omega^2 J}d(\omega\sqrt{J}) = 0.$$

Din această relaţie rezultă că vectorul $\bar{K}$ este perpendicular pe planul tangent la elipsoid în extremitatea lui $\bar{r}$. Fie $\overline{OP}$ distanţa centrului O la planul tangent în $\bar{r}$. Luăm pe direcţia $\overrightarrow{OP}$ un punct Q astfel încît $\overline{OP}\cdot\overline{OQ} = 1$; atunci (11.2) ne arată că $K = \overline{OQ}$; într-adevăr $\overline{OP} = r\cos(\bar{r}, \overrightarrow{OP})$ este proiecţia lui $\bar{r}$ pe dreapta $\overrightarrow{OP}$; deci $\overrightarrow{OP}\,\bar{K} = \bar{K}\bar{r} = \omega\sqrt{J}$, căci $\bar{K}\bar{r} = 1$.

144. **Axe şi plane principale de inerţie.** Axele şi planele principale ale elipsoidului de inerţie se numesc axe şi plane principale de inerţie.

Vectorul $\bar{J}(J_1, J_2, J_3)$ fiind perpendicular pe planul tangent la elipsoidul de inerţie în punctul M, unde $\bar{r}$ întîlneşte elipsoidul, pentru ca $\bar{r}$, respectiv $\bar{\omega}$, să fie direcţia unei *axe de simetrie* trebuie ca să fie perpendicular pe planul tangent în M, — aşadar, trebuie ca $\bar{r}$ să fie coliniar cu $\bar{J}$. Deci, axa de simetrie este caracterizată prin condiţia:

$$\bar{J} = \lambda\bar{r} \tag{11.12}$$

unde λ este un scalar.

Atunci ecuaţiile (11.11) ne dau, pentru determinarea direcţiilor axului de simetrie $\bar{r}$ (x,y,z) sistemul de ecuaţii omogene în x,y,z:

$$\begin{aligned}(J_{11} - \lambda)\,x + J_{12}y + J_{13}z &= 0\\ J_{21}x + (J_{22} - \lambda)\,y + J_{23}z &= 0\\ J_{31}x + J_{32}y + (J_{33} - \lambda)\,z &= 0\end{aligned} \tag{11.13}$$

sistem care admite o soluție neidentic nulă, dacă λ satisface „ecuației seculare“:

$$\begin{vmatrix} J_{11}-\lambda & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22}-\lambda & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{11.14}$$

Această, ecuație se studiază în teoria perturbațiilor seculare la mișcarea planetelor. Se demonstrează că ecuația are trei rădăcini reale λ_i. Obținem deci cele trei *axe principale de inerție*, reprezentate de ecuația (11.12) sau (11.13) punînd $\lambda = \lambda_i$.

Momentele de inerție relative la aceste trei axe de simetrie se numesc *momentele principale de inerție*; față de aceste axe, momentele de deviație sînt nule. Momentele principale de inerție sînt rădăcinele ecuației seculare; așadar:

$$J_{p1} = \lambda_1;\ J_{p2} = \lambda_2;\ J_{p3} = \lambda_3.$$

În literatură se obișnuiește a se nota cu A, B, C momentele principale de inerție.

Un plan principal de inerție este planul determinat de două axe principale de inerție.

Elipsoidul de inerție central este elipsoidul de inerție relativ la centrul de greutate.

Ecuația elipsoidului de inerție central se scrie, așadar, după (11.10):

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \tag{11.15}$$

unde am pus $A = \lambda_1$, $B = \lambda_2$, $C = \lambda_3$.

Făcînd din nou substituția (11.8) și avînd în vedere expresia energiei cinetice (11.3) aceasta are, față de axele principale de inerție, expresia:

$$E_c = \frac{1}{2}\left(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2\right), \tag{11.16}$$

relație pe care o vom utiliza mai tîrziu.

145. **Teorema lui Steiner.** *Momentul de inerție relativ la o axă oarecare* $\bar{\omega}$, *este egal cu momentul de inerție relativ la axa care trece prin centrul de greutate, paralel cu* $\bar{\omega}$, *adunat cu momentul de inerție al masei totale concentrată în centrul de greutate, relativ la axa* ω *inițială.*

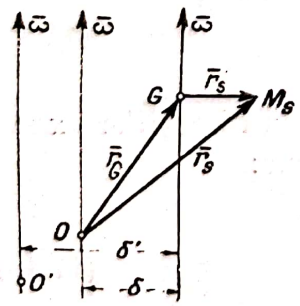

Fig. 47

Această teoremă este analogă cu teorema lui König asupra energiei cinetice relative.

Fie $\bar{r}_G$ vectorul de poziție al unui punct exterior pe care-l luăm în centrul de greutate G. Fie $\bar{r}_s$ și $\bar{r}'_s$ vectorii de poziție ai punctului M_s față de O și G (fig. 47).

Avem:

$$\bar{r}_s = \bar{r}_G + \bar{r}'_s.$$

După teorema momentului cinetic relativ, avem:

$$\overline{K}_0 = m\overline{r}_G \times (\overline{\omega} \times \overline{r}_G) + \sum_s m_s [\overline{r}'_s \times (\overline{\omega} \times \overline{r}'_s)] = \overline{K}_{G0} + \overline{K}_G. \quad (11.17$$

de unde urmează teorema enunțată prin înmulțire cu $\overline{\omega}$:

$$J_0 = m\delta^2 + J_G$$

unde δ este depărtarea lui G la axa $\overline{\omega}$.

Din regula de adunare a tensorilor, rezultă de asemenea că:

$$J_{0,\alpha\beta} = J^G_{0,\alpha\beta} + J_{G,\alpha\beta}$$

unde:

$$J^G_{0,11} = m(b^2 + c^2); \quad J^G_{0,22} = m(c^2 + a^2); \quad J^G_{0,33} = m(a^2 + b^2);$$

$$J^G_{0,23} = J^G_{0,32} = -mbc; \quad J^G_{0,31} = J^G_{0,13} = -mca; \quad J^G_{0,21} = J^G_{0,12} = -mab;$$

(a, b, c, fiind coordonatele lui G față de triedrul O).

146. **Proprietate.** Dacă avem o axă paralelă cu $\overline{\omega}$ printr-un punct O', atunci:

$$J'_0 = m\delta'^2 + J_G.$$

Deci:

$$J_0 - J'_0 = m(\delta^2 - \delta'^2). \quad (11.18)$$

Cunoscînd pe J_0 putem calcula momentul de inerție în raport cu o axă paralelă cu $\overline{\omega}$ trecînd prin O'.

147. **Axe principale centrale de inerție.** Axele de simetrie ale elipsoidului *central* de inerție se numesc axe principale centrale de inerție. O astfel de axă se bucură de proprietatea următoare: „o axă principală centrală de inerție este axă principală de inerție pentru orice punct așezat pe ea".

Fie axa $\overline{\omega}$ prin O; fie un punct O' așezat tot pe $\overline{\omega}$; $\overline{r}_s$, $\overline{r}'_s$ și $\overline{r}_0$ sînt vectorii de poziție ai punctului M_s față de O, de O' și ai lui O' față de O. Avem evident $\overline{r}_{O'} = \alpha\overline{\omega}$, α fiind un scalar.

Din relația:

$$\overline{r}_s = \overline{r}_{O'} + \overline{r}'_s,$$

deducem:

$$\overline{K}_O = \overline{K}_{O'} + \overline{r}_{O'} \times (\overline{\omega} \times \sum_s m_s \overline{r}'_s)$$

dacă ținem seamă că $\overline{r}_{O'}$ și $\overline{\omega}$ sînt coliniari.

Dacă însă axa $\overline{\omega}$ este axă principală de inerție relativ la O, trebuie ca $\overline{K}_O = \lambda\overline{\omega}$, unde λ este un scalar dedus din ecuația seculară. Dacă vrem ca $\overline{\omega}$ să rămînă axă principală de inerție și față de punctul O' trebuie ca $\overline{K}'_O = \lambda'\overline{\omega}$. De aici rezultă condiția:

$$(\lambda - \lambda')\overline{\omega} = \overline{r}_{O'} \times (\overline{\omega} \times \sum_s m_s \overline{r}'_s) = \alpha\overline{\omega} \times [\overline{\omega} \times (\sum_s m_s \overline{r}_s - m\overline{r}_{O'})] =$$

$$= \alpha\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \sum_s m_s \overline{r}_s) - \alpha^2 m\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{\omega}) =$$

$$= \alpha\overline{\omega} (\sum_s m_s \overline{r}_s \overline{\omega}) - \alpha \sum_s m_s \overline{r}_s \omega^2$$

căci celălalt termen este identic nul.

Scanned with OKEN Scanner

Rămîne deci condiţia ca vectorul din ultimul termen să fie coliniar cu $\bar{\omega}$. Deci $\Sigma m_s \bar{r}_s = \beta \bar{\omega}$, adică $m\bar{r}_G$ coliniar cu $\bar{\omega}$, ceea ce înseamnă că centrul de greutate G să se găsească pe axa $\bar{\omega}$, adică $\bar{\omega}$ este o axă centrală de inerţie.

148. **Plan principal central de inerţie.** Planul de simetrie al elipsoidului central de inerţie se numeşte plan principal central de inerţie. Şi pentru planele principale putem stabili proprietatea: „un plan principal de inerţie este plan principal de inerţie pentru orice punct aşezat pe el, numai dacă este plan principal *central* de inerţie"; deci dacă centrul de greutate se află pe el.

Planul principal de inerţie P e determinat de două axe $\bar{\omega}$ şi $\bar{\omega}'$ principale de inerţie relative la punctul O. Vectorul de poziţie al punctului O' se exprimă cu ajutorul lui $\bar{\omega}$ şi $\bar{\omega}'$ în plan prin relaţia:

$$\bar{r}_0 = \alpha\bar{\omega} + \beta\bar{\omega}'.$$

Pentru ca planul principal de inerţie P relativ la O să rămînă plan principal de inerţie relativ la un alt punct O' de pe el, trebuie ca axele duse prin O' paralel cu $\bar{\omega}$ şi $\bar{\omega}'$ să rămînă axe principale de inerţie.

Scriind condiţiile analoge ca pentru axele principale de inerţie, găsim o relaţie în care toţi termenii sînt vectori ce se exprimă sub forma $A\bar{\omega} + B\bar{\omega}'$, A şi B fiind doi scalari, şi un termen în $\sum_s m_s\bar{r}_s$.

Rezultă că şi acest vector va fi exprimabil sub forma:

$$\sum_s m_s\bar{r}_s = \lambda\bar{\omega} + \lambda'\bar{\omega}'$$

ceea ce înseamnă că vectorul de poziţie al centrului de greutate:

$$m\bar{r}_G = \sum_s m_s\bar{r}_s$$

se găseşte în planul P.

149. **Raza de giraţie.** Am definit momentul de inerţie, relativ la o axă $\bar{\sigma}$ prin mărimea:

$$J_\sigma = \sum_s m_s\delta_s^2$$

unde δ_s înseamnă distanţa punctului M_s la axă.

Se obişnuieşte a se defini o cîtime k, prin relaţia:

$$\sum_s m_s\delta_s^2 = mk^2, \tag{11.19}$$

unde $m = \sum_s m_s$. Cîtimea k poartă numele de *rază de giraţie* şi apare adeseori în calculele momentelor de inerţie. Ea ne dă distanţa de axa dată la care s-ar găsi un punct în care ar fi concentrată masa totală m, spre a obţine acelaşi moment de inerţie prin raport cu axa.

Scanned with OKEN Scanner

150. **Calculul momentelor de inerţie.** Cazul cel mai însemnat care se prezintă în problemele mecanice, este cazul cînd sistemul de puncte materiale este format dintr-o distribuţie *continuă* de puncte materiale M_s. Vom avea atunci de calculat integrale de forma:

$$\int \rho \delta_s^2 d\tau$$

unde $\rho = \rho(x, y, z)$ este densitatea materială, iar $d\tau$ elementul de volum, integrala extinzîndu-se la tot volumul care cuprinde sistemul de puncte materiale.

Exemple. 1. Momentul de inerţie al unui *cilindru de rotaţie omogen de masă* m, în raport cu axa. Fie h înălţimea cilindrului şi R raza lui. Prin definiţie, momentul de inerţie (densitatea constantă fiind ρ) al unei pături cilindrice de masă $2\pi r \cdot \rho \cdot h dr$ va fi

$$dJ = 2\pi\rho h r^3 dr$$

fiindcă toate punctele păturii cilindrice se găsesc la distanţa r de axă. Întegrînd de la zero la raza cilindrului R, obţinem:

$$J = \frac{1}{2}\pi R^4 h\rho = (\pi R^2 h\rho) \cdot \frac{R^2}{2} = m\frac{R^2}{2}$$

prin urmare raza de giraţie este $k = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

2. *Corp omogen de rotaţie* în jurul unei axe, limitat de două plane paralele. Fie z axa de rotaţie şi $z = \varphi(r)$ ecuaţia curbei meridiane. Descompunem volumul în cilindri elementari prin plane perpendiculare pe axa z, de înălţime dz. Momentul de inerţie al unui astfel de cilindru de rază r, va fi, după cazul precedent:

$$\frac{1}{2}\pi r^4 \rho dz.$$

Integrăm această expresie între z_0 şi z_1, avem:

$$mk^2 = \frac{1}{2}\pi\rho \cdot \int_{z_0}^{z_1} r^4 dz = \frac{1}{2}\pi\rho \int_{r_0}^{r_1} r^4 \varphi'(r) dr.$$

3. *Un con circular* cu lungimea generatoarei egală cu l, raza bazei R, raza secţiunii de cotă z fiind r, semiunghiul de la vîrf egal cu β, şi masa m. Ecuaţia generatoarei va fi $z = r \cdot \operatorname{ctg}\beta$. Relaţia precedentă ne dă:

$$mk^2 = \frac{1}{2}\pi\rho \int_0^R r^4 \operatorname{ctg}\beta\, dr.$$

Dar cum volumul:

$$V = \frac{\pi R^2}{3} l\cos\beta \quad \text{şi} \quad R = l\sin\beta, \quad \text{găsim:} \quad mk^2 = m\frac{3}{10} l^2 \sin^2\beta$$

deci, raza de giraţie este:

$$k = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot l\sin\beta.$$

4. *O sferă omogenă* de rază R şi de masă m. Pătura sferică de masă $4\pi r^2 \cdot \rho \cdot dr$ are ca moment de inerţie în raport cu centrul:

$$dJ = 4\pi r^2 \cdot \rho \cdot dr \cdot r^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Integrînd între zero şi R, obţinem:

$$J = \frac{4}{5}\pi\rho R^5.$$

Masa totală a sferei fiind $m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, rezultă pentru momentul de inerţie faţă de centru:

$$J = mk^2 = m\frac{3}{5}R^2; \quad \text{deci} \quad k = \sqrt{\frac{3}{5}}R.$$

În raport cu un *plan diametral*, momentul de inerţie este, pentru motive de simetrie:

$$\frac{1}{3}J = \frac{4}{15}\pi\rho R^5$$

iar în raport cu un diametru este:

$$\frac{2}{3}J = \frac{8}{15}\pi\rho R^5.$$

5. *Un elipsoid omogen.* Momentele de inerţie în raport cu planele principale centrale de inerţie, care sînt chiar planele de simetrie ale elipsoidului, vor fi date de integrale de forma:

$$\int \rho x^2 dx\, dy\, dz$$

extinse la tot elipsoidul:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dacă a, b, c, sînt semiaxele elipsoidului.

Notînd $x = a\xi$; $y = b\eta$; $z = c\zeta$ avem integrala:

$$\rho a^3 bc \int \xi^2 \cdot d\xi d\eta d\zeta,$$

extinsă la sfera $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$; ea reprezintă momentul de inerţie al sferei de rază 1 faţă de planul diametral yz, moment egal cu $\frac{4}{15}\pi\rho$.

Aşadar:

$$mk_1^2 = \int \rho x^2 dx dy dz = \frac{4}{15}\rho\pi a^3 bc = m\frac{a^2}{5}$$

căci:

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho \cdot abc.$$

Faţă de celelalte plane găsim la fel momentele:

$$mk_2^2 = m\frac{b^2}{5} \qquad \text{şi} \qquad mk_3^2 = m\frac{c^2}{5}$$

iar în raport cu centrul:

$$\frac{m}{5}(a^2 + b^2 + c^2).$$

151. **Aplicaţie a teoremei momentului cinetic.** În legătură cu noţiunea de moment de inerţie se găsesc unele aplicaţii interesante.

Scanned with OKEN Scanner

1. Dacă exprimăm teorema ariilor în coordonate polare față de o axă fixă obținem, în proiecție pe un plan perpendicular pe axa fixă, viteza areolară constantă:

$$\sum_s m_s r_s^2 \dot{\theta}_s = \text{const.}$$

În cazul cînd toate punctele sistemului au aceeași viteză circulară $\omega = \dot{\theta}_s$, atunci:

$$\omega \sum_s m_s r_s^2 = \omega J = \text{const.}$$

J fiind momentul de inerție în raport cu axa considerată.
Rezultă că, pentru astfel de mișcări, cu cît r_s este mai mare cu atît ω va fi mai mic. Experimental, putem verifica acest fapt, cu ajutorul *scaunului lui P r a n d t l:* un scaun care se poate roti, fără frecare, în jurul unei axe verticale. Un observator așezat vertical pe scaun și supus unei rotații în jurul axei verticale, își va micșora rotația dacă întinde mîinile (în care, pentru mărirea efectului, ține niște greutăți).

Același efect îl folosesc acrobații, cînd efectuează saltul mortal. Cînd sar de pe trambulină, imprimă corpului o rotație mică în jurul unei axe orizontale; apoi strîng corpul cît mai mult spre a-i mări rotația și a se putea roti cît mai de multe ori în jurul axei orizontale; pentru ca, aproape de cădere, să se destindă, spre a ajunge la pămînt cu o viteză de rotație micșorată din nou.

2. Dacă vrem să influențăm un sistem material ale cărui puncte se rotesc simultan cu aceeași viteză $\overline{\omega}$, în jurul unei axe fixe, observăm că, din ecuația momentului, scrisă sub forma:

$$\frac{d}{dt}(J\omega) = F,$$

deducem: cu cît momentul de inerție J este mai mare, cu atît forța exterioară $\overline{F}$ va trebui să fie mai mare.

Putem experimenta tot cu scaunul lui P r a n d t l. Cînd observatorul are mîinile întinse va fi pus în mișcare de rotație mai cu greu decît atunci cînd ține mîinile strînse.

3. O persoană stînd vertical, în repaus, pe scaunul lui P r a n d t l și ținînd în mînă o roată care se învîrte în jurul unui ax, rămîne în repaus dacă ține roata astfel încît aria proiectată pe planul orizontal, de roata în mișcare, să fie nulă.

Dacă însă ține axul roții vertical sau oblic, astfel încît aria proiectată pe planul orizontal, de roată, să fie diferită de zero, atunci persoana suferă o rotație în sens invers rotației roții, din cauză că, pentru sistemul total, ecuația $\omega J = \text{const}$, ne spune că viteza areolară în proiecție pe planul orizontal trebuie să fie constantă. Atunci, variația ariei produsă de rotația roții va trebui compensată de o variație în sens contrar, prin mișcarea corpului, astfel încît aria totală corespunzătoare sistemului material, roată plus experimentator, să rămînă constantă.

152. **Aplicație. Determinarea centrului de greutate.** Sistemele fixe de puncte materiale, ca și corpurile rigide, după cum vom vedea mai tîrziu, se prezintă sub aspectul a diferite figuri geometrice, pentru care determinarea

Scanned with OKEN Scanner

centrului de masă, respectiv a centrului de greutate, se face ținîndu-se în seamă eventuale simetrii existente în figura geometrică respectivă. Așa de pildă, dacă figura posedă un *centru* geometric, atunci centrul de greutate coincide cu acest centru al figurii, masa fiind distribuită omogen.

Se cunosc din Geometrie proprietățile fundamentale ale unui astfel de centru: 1) pentru figuri spațiale, el este dat de intersecția planelor diametrale necoaxiale; 2) pentru figuri plane el este dat de intersecția dreptelor diametrale.

Din relația care definește poziția centrului de greutate $m\bar{r}_G = \Sigma m_s \bar{r}_s$ pentru sistemele cu distribuție continuă a masei de densitate $\rho\,(x, y, z)$ vom avea:

$$\bar{r}_G = \int_V \bar{r}\ \rho\,(x, y, z)\,d\tau \Big/ \int_V \rho d\tau \tag{11.20}$$

extinse la volumul V care închide masa totală a corpului.

Existența funcției de densitate $\rho(\bar{r})$ este asigurată dacă masa $m(e)$ este o funcție de mulțimea de puncte e aditivă și total continuă, în virtutea teoremei că pentru o astfel de funcție raportul $m(e)/\mu(e)$, unde $\mu(e)$ este măsura mulțimii (e), converge aproape peste tot către o valoare limită — densitatea, a cărei integrală este însăși masa $m(e)$. Prin „total" continuă se înțelege că $m(e) \to 0$ pentru toți e pentru care $\mu(e) \to 0$.

Prin „aproape peste tot" se înțelege că continuitatea are loc în toate punctele mulțimii, cu excepția unor puncte distribuite rar, mai exact puncte care formează o mulțime de măsură nulă.

Teoremele lui P. Guldin

Teorema I. Aria laterală născută de un arc de curbă plană care se rotește în jurul unei axe aflată în planul curbei, dar care nu intersectează curba, este egală cu lungimea arcului de curbă înmulțită cu lungimea traiectoriei (arc de cerc) descrisă de centrul de greutate al arcului de curbă.

În adevăr, fie ds elementul de arc de curbă și l lungimea întregului arc care se rotește de unghiul θ. Elementul ds descrie un trunchi de con de generatoare ds și rază medie y (distanța arcului ds la axa fixă x). Această arie laterală este deci egală cu $A = \int \theta \cdot y \cdot ds$. Dar după definiția centrului de greutate $\int y\,ds = y_G \cdot l$; așadar:

$$A = \theta_{yG} \cdot l \tag{11.21}$$

ceea ce demonstrează teorema I, căci θ_{yG} este lungimea arcului de traiectorie (cerc) descris de centrul de greutate al curbei.

Teorema II. Volumul născut de o arie plană care se rotește în jurul unui axe situate în planul figurii, fără a o traversa, se obține înmulțind aria dată prin lungimea traiectoriei (arc de cerc) descrisă de centrul de greutate al ariei.

În adevăr, să considerăm elementul de arie plană $dx\,dy$ din suprafața dată σ, în planul x, y al ariei și să admitem că acest element s-a rotit de unghiul θ în jurul axei pe care o luăm ca axă x. Volumul născut este:

$$\frac{\theta}{2}(y + dy)^2\,dx - \frac{\theta}{2}y^2\,dx = \theta y\,dx\,dy + O\ (\text{superior}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Neglijînd termenii de ordinul al treilea infinitezimal, care nu influențează integrala dublă, vom avea:

$$V = 0 \int y\,dxdy .$$

Dar centrul de greutate al ariei σ are drept ordonată:

$$y_G = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma y\,dxdy;$$

așadar, rezultă:

$$V = \sigma\theta_{yG} \qquad (11.22)$$

ceea ce demonstrează teorema enunțată, θ_{yG} fiind arcul de traiectorie (arc de cerc) descris de centrul de greutate al ariei σ.

Cazuri particulare simple (distribuție omogenă)

a) 1. T r i u n g h i u l. Pentru motive de simetrie, centrul figurii se află în punctul comun de intersecție al celor 3 mediane. 2. P o l i g o n u l. Descompunîndu-l în triunghiuri revenim la problema precedentă. 3. T e t r a e d r u l. Centrul de greutate este punctul de intersecție al dreptelor care unesc fiecare vîrf cu centrul de figură al fețelor opuse. Se știe că acest punct de intersecție divide fiecare segment al dreptelor care unesc vîrfurile cu fețele opuse în raportul 1/4. El se va găsi deci la o distanță de fața respectivă egală cu un sfert din distanța bază-vîrf.

b) Determinări de centre de greutate printr-o *metodă funcțională*,[1]) în cazul unui *arc de cerc și sector circular* în cercul de rază R (fig. 48).

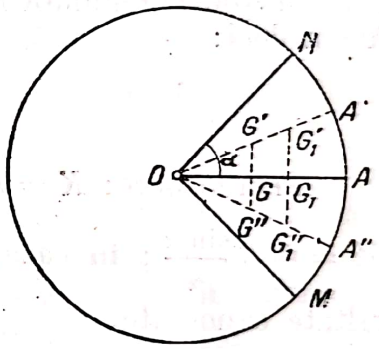

Fig. 48

Fie 2α unghiul la centru al sectorului MON și al arcului MN. Centrul de greutate al sectorului se găsește pe axa de simetrie OA la distanța OG, care pentru un cerc dat este funcție de α:

$$OG = f(\alpha).$$

Centrul de greutate al arcului MN se va găsi într-un punct G_1 al axei OA, pentru care vom avea, de asemenea:

$$OG_1 = f_1(\alpha).$$

Sectorul MON este format din două sectoare simetrice AON și AOM; de asemenea, arcul MN este format din două arce simetrice AN și AM, corespunzînd fiecare unghiului α. Centrul de greutate al sectorului AON se află în G' pe axa de simetrie OA'; centrul de greutate al arcului AN se află în G_1' pe aceeași axă, astfel încît:

$$OG' = f\left(\frac{\alpha}{2}\right); \quad OG_1' = f_1\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

[1]) *O. Onicescu*, Bull. de Math. et de Phys. de l'École Polytechnique, Bucarest, vol. 1, p. 33, 1929.

De asemenea:

$$OG'' = f\left(\frac{\alpha}{2}\right); \quad OG_1'' = f_1\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Dar cum:

$$OG = OG' \cos\frac{\alpha}{2}; \quad OG_1 = OG_1' \cos\frac{\alpha}{2}$$

rezultă că funcțiile $f(\alpha)$ și $f_1(\alpha)$ trebuie să satisfacă ecuația funcțională:

$$F(\alpha) = F\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{11.23}$$

Prin substituția:

$$F(x) = \Phi(\alpha)\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

ecuația funcțională (11.23) devine:

$$\Phi(\alpha) = \Phi\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{12.24}$$

Cum funcția $F(\alpha)$, prin însăși semnificația ei, este regulată pentru orice valoare finită a lui α, același lucru se poate afirma și despre $\Phi(\alpha)$. Singura soluție regulată în $\alpha = 0$, a ecuației (11.24) este $\Phi(\alpha) = K$ (const). Avem deci:

$$F(\alpha) = K\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Prin urmare: $K = F(0)$. Cum în cazul sectorului $f(0) = \frac{2}{3}R$ rezultă $OG = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$; în cazul arcului: $f_1(0) = R$, rezultă $OG_1 = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$; rezultate cunoscute.

Scanned with OKEN Scanner

Partea a treia

SOLIDUL NEDEFORMABIL
— RIGID —

Capitolul XII

INTRODUCERE ÎN CINEMATICA RIGIDULUI

Un corp *rigid* este un sistem de puncte materiale care se bucură de următoarea proprietate fundamentală: distanțele mutuale dintre toate punctele sistemului sînt invariabile; corpul este atunci nedeformabil.

Dacă legăm de corpul rigid un sistem de coordonate, mișcarea acestui corp se execută simultan cu sistemul de coordonate, fără deplasări „relative" ale punctelor rigidului față de sistemul legat de el.

153. **Distribuția vitezelor. Teorema lui Chasles.** Fie un sistem de coordonate $Oxyz$ fix în spațiu și un sistem $O'x'y'z'$ solidar legat de rigid. Studiul mișcării rigidului ne va conduce la alegerea unor anumite puncte convenabile, în care să fixăm originea sistemului de coordonate $O'x'y'z'$. Relația care ne dă viteza absolută (§ 17, formula 2.16) se reduce, în cazul rigidului pentru care viteza relativă este nulă, $\frac{\partial \bar{r}'}{\partial t} = 0$, la:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}' \tag{12.1}$$

Această relație se poate interpreta astfel. Pentru fiecare moment t mișcarea rigidului în intervalul de timp $(t, t+dt)$ se compune dintr-o mișcare de translație (momentană) infinitezimală de viteză $\bar{v}_0$ și dintr-o mișcare de rotație (momentană) infinitezimală $\bar{\omega} \times \bar{r}'$ în jurul axei momentane $\bar{\omega}$, care trece prin O'. Trebuie de reținut că axa $\bar{\omega}$ are caracterul unui vector alunecător pe direcția $\bar{\sigma} = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$, care trece prin O' (fig. 49). Mărimile $\bar{v}_0$ și $\bar{\omega}$ sînt, în general, funcții de t.

Mișcarea de *rotație* este caracterizată prin proprietatea că toate punctele rigidului execută *simultan* aceeași mișcare circulară în jurul axei momentane de rotație (exceptînd acele puncte care se găsesc, eventual, pe însăși axa de rotație).

Există unele puncte din rigid care pot avea mișcări particulare.

Ne întrebăm anume, dacă:

a) Există puncte ale rigidului care să posede viteza nulă? Aceasta ar însemna:

$$\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}' = 0,$$

ceea ce înseamnă că $\bar{v}_0$ să fie paralel cu vectorul $\bar{\omega} \times \bar{r}'$, deci perpendicular pe $\bar{\omega}$. Această mișca-

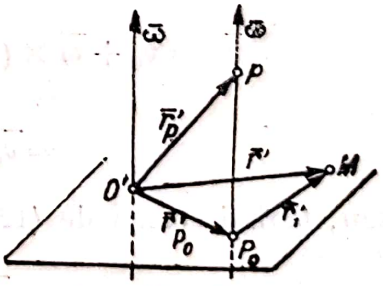

Fig. 49

re este cu totul excepțională; în general, *nu* există puncte ale rigidului având viteze nule.

b) Există puncte ale rigidului care să se deplaseze, într-un moment dat, în direcția axei momentane $\bar{\omega}$? Pentru a răspunde la această întrebare, să observăm mai întîi că, înmulțind (12.1) scalar cu $\bar{\omega}$, obținem:

$$\bar{\omega}\bar{v} = \bar{\omega}\bar{v}_0 = \text{invariant}. \tag{12.2}$$

Toate punctele, care într-un moment dat ar avea o mișcare în direcția $\bar{\omega}$ trebuie să satisfacă condiției:

$$\bar{v} = \alpha\bar{\omega}$$

unde α este un scalar convenabil ales. Așadar, pentru punctele P (definite prin vectorul de poziție $\bar{r}'_P$ față de sistemul mobil O'), care să îndeplinească condiția pusă, trebuie să avem:

$$\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}'_P = \alpha\bar{\omega}$$

de unde înmulțind prin stînga vectorial cu $\bar{\omega}$:

$$\bar{\omega} \times \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}'_P) = 0$$

sau:

$$\bar{\omega} \times \bar{v}_0 + \bar{\omega}(\bar{\omega}\bar{r}'_P) - \bar{r}'_P\omega^2 = 0. \tag{12.3}$$

Deci, locul geometric al acestor puncte este dreapta paralelă cu $\bar{\omega}$ dusă prin punctul P_0 care, raportat la sistemul legat de rigid (fig. 49), are vectorul de poziție:

$$\bar{r}'_P = \frac{1}{\omega^2}(\bar{\omega} \times \bar{v}_0). \tag{12.4}$$

În adevăr, vectorul de poziție al tuturor punctelor P de pe dreapta dusă prin P_0, paralelă cu $\bar{\omega}$, este de forma:

$$\bar{r}'_P = \bar{r}'_{P_0} + \beta\bar{\omega},$$

care satisface ecuația vectorială (12.3) dacă se introduce valoarea (12.4)

Să deplasăm acum originea O', a sistemului de coordonate legat de corp, în punctul P_0. Expresia vitezei (12.1) va deveni, succesiv, pentru un punct oarecare M ($\bar{r}'$ față de O'; $\bar{r}'_1$ față de P_0):

$$\bar{v}_M = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times (\bar{r}'_{P_0} + \bar{r}'_1) = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \left[\frac{1}{\omega^2}(\bar{\omega} \times \bar{v}_0) + \bar{r}'_1\right] =$$

$$= \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}'_1 + \frac{(\bar{\omega} \times \bar{v}_0)}{\omega^2}\bar{\omega} - \frac{\omega^2}{\omega^2}\bar{v}_0$$

sau, ținînd seamă de (12.2) avem, în definitiv:

$$\bar{v}_M = \frac{(\bar{\omega}\bar{v})}{\omega^2}\bar{\omega}_C + \bar{\omega}_C \times \bar{r}'_1. \tag{12.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

În această relație, pentru a face distincție între vectorul inițial $\bar{\omega}$ și vectorul paralel cu dînsul, care trece prin P_0, am notat vectorul lui Chasles cu $\bar{\omega}_C$.

Trebuie de observat că punctul P_0 nu are o semnificație de sine stătătoare pentru rigid; el este un punct al axei momentane $\bar{\omega}_C$, a cărui alegere depinde de sistemul O' de la care am plecat.

Relația (12.5) exprimă *teorema lui Chasles*: „*mișcarea infinitezimală generală a unui rigid se descompune, în fiecare moment, într-o translație de-a lungul axei momentane* $\bar{\omega}_C$ *care trece prin* P_0 *și o rotație în jurul acestei axe*".

O astfel de mișcare momentană este o *mișcare elicoidală*, executată de rigid, în fiecare moment dat. Observăm că, pentru această mișcare infinitezimală, raportul $\frac{\bar{v}_0}{\bar{\omega}} = \frac{\bar{\omega}\bar{v}_0}{\omega^2}$ este constant, căci pentru un interval de timp infinitezimal putem considera axa $\bar{\omega}_C$ ca fixă. De aceea axa $\bar{\omega}_C$ mai poartă numele de axă a *mișcării elicoidale momentane*. Se poate arăta că această axă descrie în timpul mișcării, în spațiu și în corp, două suprafețe riglate, care sînt tangente în fiecare moment de-a lungul axei însăși. Mișcarea rigidului poate fi, așadar, obținută prin rostogolirea suprafeței mobile, invariabil legată cu corpul, peste cea fixă în spațiu.

154. **Mișcarea elicoidală.** Să arătăm întrucît mișcarea infinitezimală caracterizată prin expresia (12.5) a vitezei, poate fi considerată ca o mișcare elicoidală. Vom scrie, în general, pentru (12.5):

$$\bar{v} = v_0\bar{k} + \omega\bar{k} \times \bar{r} \tag{12.6}$$

unde $\bar{k}$ este vectorul unitar de-a lungul axei fixe $\bar{\omega}$, $\bar{v}_0$ viteza de alunecare de-a lungul acestei axe, $\bar{r}$ vectorul de poziție al unui punct oarecare M raportat la un punct O pe axa $\bar{k}$ și $\omega = \dot{\theta}$ viteza de rotație în jurul axei $\bar{\omega}$.

Se poate arăta că, dacă raportul $\frac{v_0}{\omega}$ este constant, punctul $M(\bar{r})$, avînd viteza (12.6) se mișcă pe o elice circulară. Din această cauză mișcarea echivalentă (12.5) poartă numele de mișcare momentană elicoidală.

În adevăr, ecuația vectorială (12.6) scrisă în coordonate carteziene ne dă sistemul:

$$\dot{x} = -\omega y, \quad \dot{y} = \omega x, \quad \dot{z} = v_0. \tag{12.7}$$

Ultima ecuație (12.7) se integrează imediat. Obținem:

$$z - z_0 = \int v_0 dt$$

ceea ce, conform condiției enunțate:

$$v_0 = \omega c$$

unde c este o constantă, ne dă:

$$z - z_0 = c\theta. \tag{12.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Primele două ecuații (12.7) se pot scrie, introducînd unghiul θ ca variabilă independentă sub forma:

$$\frac{dx}{d\theta} = -y, \quad \frac{dy}{d\theta} = x$$

de unde, prin eliminare, se obține atît pentru x cît și pentru y cîte o ecuație de tipul ecuației oscilatorului liniar. Rezultă astfel:

$$x = a\cos(\theta + \alpha); \qquad y = a\sin(\theta + \alpha).$$

Ecuațiile (12·8) și (12.9) reprezintă o elice pe un cilindru circular de rază a. Elicea se numește *dextrorum* (în sensul mișcării șurubului drept) sau *sinistrorum* (sensul contrar), după cum „pasul" c este pozitiv sau negativ.

Capitolul XIII

CAZURI PARTICULARE DE MIȘCARE A RIGIDULUI

155. **Mișcarea paralelă cu un plan fix.** În această mișcare fiecare punct descrie o traiectorie paralelă cu planul fix. Luăm planul fix ca plan comun (x,y) și (x',y'). Axa momentană de rotație $\bar{\omega}$ va trebui să fie mereu perpendiculară pe acest plan, iar translația în lungul ei, nulă, căci altfel am putea avea mișcări neparalele cu planul fix (de ex. rotații în jurul unei axe neperpendiculare pe planul fix). Mișcarea infinitezimală în planul fix se reduce la o rotație în jurul punctului de intersecție a planului cu axa $\bar{\omega}$.

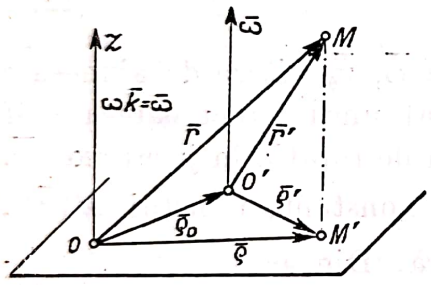

Fig. 50

Așadar, $\bar{\omega} = \omega\bar{k}$, unde $\bar{k}$ este vectorul unitar al direcției perpendicularei pe planul fix. Rezultă, atunci, că vectorul de poziție al lui M față de sistemul de coordonate fix, va fi conform fig. 50:

$$\bar{r} = \bar{\rho} + z\bar{k}$$

$\bar{\rho}$ fiind proiecția vectorului pe planul fix, iar z constant; viteza punctului $M(\bar{r})$, va fi dată de:

$$\bar{v} = \dot{\bar{\rho}}_0 + \omega\bar{k} \times \bar{r}'$$

unde $\bar{\rho}_0$ este vectorul de poziție al originei O' a sistemului legat de rigid, punct așezat tot în planul fix.

Pe de altă parte:

$$\bar{r}' = \bar{\rho}' + z\bar{k} \quad \text{și} \quad \bar{\rho}' = \bar{\rho} - \bar{\rho}_0$$

deci:

$$\bar{v} = \dot{\bar{\rho}}_0 + \omega\bar{k} \times (\bar{\rho} - \bar{\rho}_0) \tag{13.1}$$

Scanned with OKEN Scanner

aşadar, viteza punctului $M(\bar{r};\bar{r}')$ este aceeaşi cu viteza proiecţiei sale $M_1(\bar{\rho};\bar{\rho}')$ pe planul fix $(x,y;\ x',y')$.

Să considerăm un punct O'_1 al rigidului, în planul fix; viteza lui va fi, după (13.1):

$$\dot{\bar{\rho}}_1 = \bar{v}_1 = \dot{\bar{\rho}}_0 + \omega\bar{k} \times (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_0) \tag{13.2}$$

ceea ce înseamnă că orice punct O'_1, aşezat în planul fix, are aceeaşi viteză de rotaţie ω (care coincide cu viteza circulară în mişcarea plană, paralelă cu planul fix, a oricărui punct al rigidului, în jurul axei $\bar{\omega} = \omega\bar{k}$ perpendiculară pe planul fix).

156. **Centrul momentan de rotaţie.** Să considerăm intersecţia axului momental $\bar{\omega}$ cu planul (x,y), punct care rămîne fix în intervalul de timp infinitezimal în care corpul efectuează rotaţia în jurul axei. Pentru acest punct $\dot{\bar{\rho}}_1 = 0$ şi din (13.2) avem:

$$\omega\bar{k} \times (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_0) + \dot{\bar{\rho}}_0 = 0 \quad \text{sau} \quad \omega(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_0) = \bar{k} \times \dot{\bar{\rho}}_0 .$$

Poziţia faţă de sistemul de coordonate fix, a acestui punct numit *centrul momentan de rotaţie*, va fi dată de vectorul din planul fix:

$$\bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_0 + \frac{1}{\omega}\bar{k} \times \dot{\bar{\rho}}_0 \tag{13.3}$$

unde $\bar{\rho}_0(x_0, y_0)$ este vectorul de poziţie al unui punct din solid pe planul fix, luat ca origine a sistemului invariabil legat de solid.

Să însemnăm cu $I(\xi,\eta;\xi',\eta')$ centrul momentan de rotaţie. Coordonatele lui faţă de sistemul fix vor fi, din (13.3):

$$\xi = x_0 - \frac{dy_0}{d\theta}\ ;\quad \eta = y_0 + \frac{dx_0}{d\theta} \tag{13.4}$$

(punînd $\omega = \dot{\theta}$); iar faţă de sistemul mobil cu originea în $O'(\xi - x_0,\ \eta - y_0)$ ale cărui axe fac unghiul θ cu sistemul fix, coordonatele lui I vor fi:

$$\xi' = \sin\theta \cdot \frac{dx_0}{d\theta} - \cos\theta \cdot \frac{dy_0}{d\theta}\ ;\quad \eta' = \cos\theta \cdot \frac{dx_0}{d\theta} + \sin\theta \cdot \frac{dy_0}{d\theta}\ ; \tag{13.5}$$

ceea ce obţinem prin formulele de transformare ale axelor (ξ',η') rotite de unghiul θ faţă de sistemul fix (ξ,η) şi transportate în punctul (x_0, y_0).

157. **Centrul acceleraţiilor.** Centrul momentan de rotaţie, numit şi *centrul vitezelor*, este punctul din corp în care viteza momentană este nulă, fiind dat de expresiile (13.4) şi (13.5).

În această mişcare se poate defini un *centru al acceleraţiilor* drept punctul din corp a cărui acceleraţie momentană este nulă. În acest scop, din expresia vitezei (13.2) în planul fix:

$$\dot{\bar{\rho}} = \dot{\bar{\rho}}_0 + \bar{\omega} \times (\bar{\rho} - \bar{\rho}_0)$$

Scanned with OKEN Scanner

deducem prin derivare acceleraţia:

$$\bar{a} = \ddot{\bar{\rho}} = \ddot{\bar{\rho}}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{\rho} - \bar{\rho}_0) + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (\bar{\rho} - \bar{\rho}_0)]$$

ceea ce devine:

$$\bar{a} = \ddot{\bar{\rho}}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{\rho} - \bar{\rho}_0) - \omega^2(\bar{\rho} - \bar{\rho}_0) + [\bar{\omega}\,(\bar{\rho} - \bar{\rho}_0)]\,\bar{\omega}$$

ultimul termen fiind identic nul, deducem componentele acceleraţiei:

$$a_x = \ddot{x}_0 - \ddot{\theta}(y - y_0) - \dot{\theta}^2(x - x_0)$$

$$a_y = \ddot{y}_0 + \ddot{\theta}(x - x_0) - \dot{\theta}^2(y - y_0);$$

pe care egalîndu-le cu zero, obţinem coordonatele centrului acceleraţiilor. Notînd cu $x - x_0 = \xi$, $y - y_0 = \eta$, ecuaţiile devin:

$$\ddot{\theta}(\xi^2 + \eta^2) + \xi\ddot{y}_0 - \eta\ddot{x}_0 = 0 \qquad (13.6)$$

$$\dot{\theta}^2(\xi^2 + \eta^2) - \eta\ddot{y}_0 - \xi\ddot{x}_0 = 0;$$

care sînt ecuaţiile a două cercuri; ele se taie în două puncte. Luăm unul din puncte ca origine a axelor ($\xi_2 = 0, \eta_2 = 0$); celălalt punct ξ_1, η_1 are coordonatele:

$$\xi_1 = \frac{m\ddot{x}_0 - \ddot{y}_0}{\ddot{\theta}(1+m^2)}\,;\quad \eta_1 = m\xi_1;\quad m = \frac{\dot{\theta}^2\ddot{y}_0 + \ddot{\theta}\,\ddot{x}_0}{\dot{\theta}^2\ddot{x}_0 + \ddot{\theta}\,\ddot{y}_0} \qquad (13.7)$$

ceea ce se obţine din ecuaţiile (13.6).

158. **Mişcarea în jurul unui punct fix.** Dacă punctul O' este fix şi coincide cu originea O a sistemului fix, viteza absolută se reduce la:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

care ne arată că distribuţia vitezelor este cea a mişcării de rotaţie a rigidului în jurul unei axe care trece prin O. Atunci, vectorii unitari ai axelor mobile cu originea în O vor fi cunoscuţi, ca funcţii de timp, cu ajutorul vectorului $\bar{\omega} = \omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k}$, după relaţiile ştiute (§ 17):

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega} \times \bar{i}\,;\qquad \dot{\bar{j}} = \bar{\omega} \times \bar{j}\,;\qquad \dot{\bar{k}} = \bar{\omega} \times \bar{k}\,. \qquad (13.8)$$

Axa momentană $\bar{\omega}$ variază deci, în spaţiu şi în solid, descriind „conul-bază“ şi „conul-rostogolitoare“,[1]) cu vîrful comun în punctul fix O, — mişcarea generală a rigidului în jurul punctului fix fiind concretizată prin

[1]) Numite „axoida fixă“, respectiv „axoida mobilă“.

rostogolirea fără alunecare, a conului al doilea peste cel dintîi. Generatoarea comună OC este axa instantanee de rotație (fig. 51).

159. **Mișcarea de rostogolire.** Să considerăm mișcarea plană a rigidului, care e tot una cu mișcarea proiecției corpului, pe un plan fix. Această

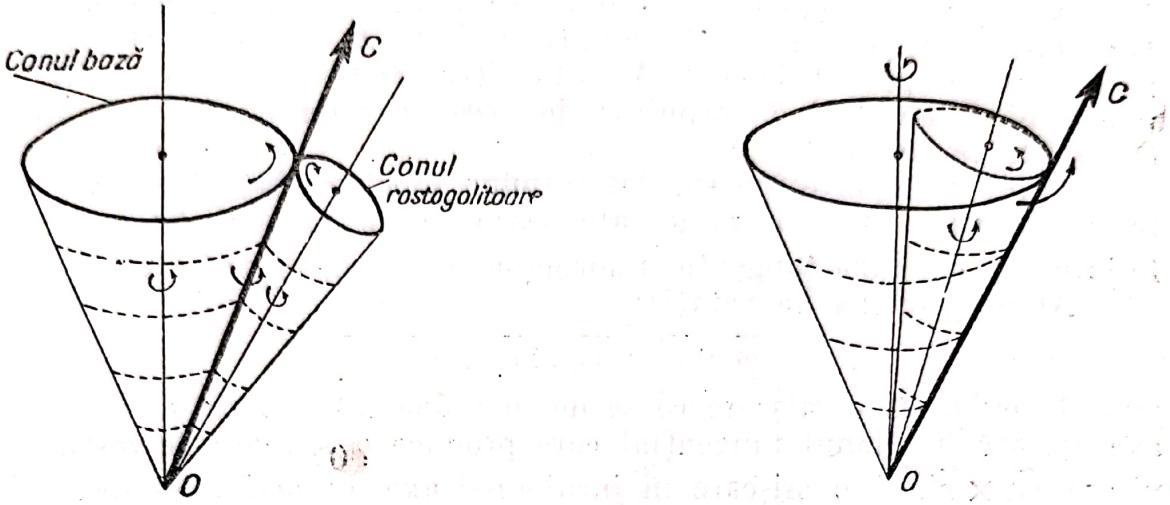

Fig. 51 a și b

figură plană se poate deplasa în mod continuu (adică x_0, y_0 și $\frac{dx_0}{d\theta}$; $\frac{dy_0}{d\theta}$ să fie funcții continue de θ).

Atunci, centrul momentan va varia continuu atît în raport cu axele fixe cît și în raport cu axele mobile descriind o curbă fixă, numită „bază", dată de ecuațiile $\xi = \xi(\theta)$; $\eta = \eta(\theta)$, în spațiu și o curbă mobilă, dată de ecuațiile $\xi' = \xi'(\theta)$; $\eta' = \eta'(\theta)$, în corp, numită „rostogolitoare". Mișcarea figurei plane va fi caracterizată prin rostogolirea fără alunecare a centroidei mobile (rostogolitoarea) pe cea fixă (baza) astfel încît cele două curbe să fie mereu tangente (fig. 52). În adevăr, viteza absolută a centrului momentan (care este un punct *geometric*, variabil față de O', în corp) trebuie să fie egală cu viteza lui de transport adunată cu viteza lui relativă. Dar viteza lui de transport este, prin definiție, nulă; deci, viteza absolută este egală cu viteza relativă, pentru centrul momentan de rotație. Aceasta înseamnă că „baza" și „rostogolitoarea" sînt în fiecare moment tangente, iar cele două arce δS_b și δS_r descrise în același element de timp δt de către centrul momentan I pe bază și rostogolitoare, sînt egale.

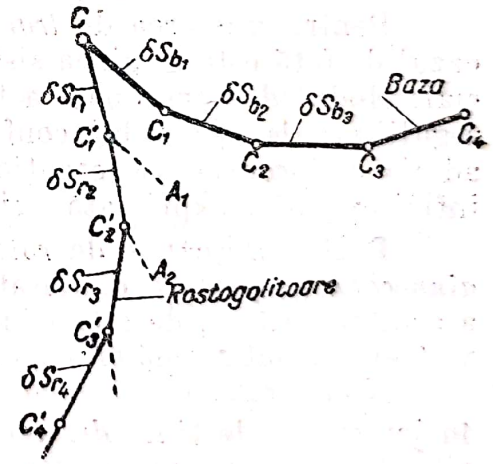

Fig. 52

În fig. 52 se arată construcția bazei și rostogolitoarei. Avem:

$$\delta s_{bi} = \delta s_{ri}\ (i = 1,\ 2,...);\quad \sphericalangle CC_1'A_1 = \sphericalangle CC_1C_2,\ \sphericalangle C_1'C_2'A_2 = \sphericalangle C_1C_2C_3 \quad \text{etc.}$$

160. **Mișcarea unui rigid în contact cu o suprafață.** Un corp rigid mărginit de o suprafață convexă S' poate rămîne mereu, în mișcarea lui,

în contact cu o suprafață fixă S. Fie T punctul de contact al acestor două suprafețe, într-un moment dat. În acest moment un punct al rigidului va coincide cu T. Fie A acest punct. Punctul T va fi animat de o mișcare determinată, atît față de S, cît și față de sistemul legat de corp. Vitezele acestor două mișcări vor fi în planul tangent comun dus prin T. Deci și viteza absolută se va găsi în acest plan tangent. Dar viteza relativă (față de S') este în acest plan. Deci și viteza de transport a lui T va fi conținută în planul tangent. Această viteză de transport este însăși viteza punctului A aparținînd corpului; de aceea o numim *viteză de lunecare* (raportată la suprafața fixă S).

Pe de altă parte, putem descompune viteza rigidului într-o viteză de translație (care este viteza de alunecare a lui A) și o viteză de rotație în jurul lui $\bar{\omega}$, după tangenta și normala la suprafața fixă S : $\bar{\omega} = \bar{\omega}_t + \bar{\omega}_n$.

Atunci, viteza de rotație:

$$\bar{\omega} \times \bar{r}' = \bar{\omega}_t \times \bar{r}' + \bar{\omega}_n \times \bar{r}'$$

pune în evidență o mișcare ce se descompune într-o rotație în jurul unei axe așezată în planul tangențial care produce o mișcare de *rostogolire* cu viteza $\bar{\omega}_n \times \bar{r}'$, și o mișcare în jurul unei axe normale, numită mișcare de *pivotare*, cu viteza $\bar{\omega}_t \times \bar{r}'$.

161. **Suprapunerea mai multor mișcări.** Din modul cum am compus viteza rigidului: una de translație și una de rotație, am scos concluzia că mișcarea generală a rigidului, în spațiu, poate fi descompusă, în fiecare moment, într-o mișcare de rotație infinitezimală în jurul axei momentane de rotație, și o translație infinitezimală de-a lungul acestei axe.

Astfel de mișcări *infinitezimale* pot fi asimilate cu vectorii ce le reprezintă *(vectori axiali* și *polari)*.

Pentru mișcarea de *translație* vectorul $\bar{v}_0$ este legat de punct, care în cazul de față este originea sistemului de coordonate solidar cu corpul material. Modul de compunere a translațiilor finite sau infinitezimale satisface regulii paralelogramului, conform definiției vectorilor polari, pentru care am admis ca proprietate esențială legea compunerii translațiilor finite sau infinitezimale, exprimată prin însăși regula paralelogramului.

Pentru mișcările de *rotație* viteza unghiulară $\bar{\omega}$ este un vector axial *alunecător* ce poate fi deplasat pe direcția lui însuși. În legea de compunere a acestor vectori, de altfel identică legii fundamentale a paralelogramului, va trebui ținut seamă și de pozițiile reciproce ale axelor-suport de alunecare.

Vom arăta că, pentru o mișcare de rotație *infinitezimală* efectuată în intervalul de timp dt, vectorii alunecători $\bar{\omega}$ au caracter identic vectorilor liberi: legea de compunere este dată de regula paralelogramului.

În acest scop vom distinge mai multe cazuri.

a) *Axele de rotație (în număr finit)* $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3 \ldots$. *sînt concurente.* Fie $\bar{r}_0$ poziția punctului de întîlnire a axelor. Viteza absolută se poate scrie ca sumă a tuturor componentelor. Fie $\bar{r}_s$ vectorul de poziție al unui punct O_s pe $\bar{\omega}_s$; avem:

$$\sum_s \bar{\omega}_s \times (\bar{r} - \bar{r}_s) = \sum_s \bar{\omega}_s \times (\bar{r} - \bar{r}_0 + \bar{r}_0 - \bar{r}_s) = \sum_s \bar{\omega}_s \times (\bar{r} - \bar{r}_0)$$

căci $\bar{r}_0 - \bar{r}_s$ este coliniar cu $\bar{\omega}_s$.

Viteza rezultantă:

$$\sum_s \bar{\omega}_s \times (\bar{r} - \bar{r}_0)$$

reprezintă, prin definiție, o rotație infinitezimală efectuată în jurul unei axe trecînd prin punctul $\bar{r}_0$ de concurență al axelor de rotație $\bar{\omega}_s$. Axa rezultantă:

$$\bar{\omega} = \sum_s \bar{\omega}_s$$

se obține făcînd suma tuturor cîtimilor $\bar{\omega}_s$, care, dacă sînt vectori alunecători pot fi transportați în punctul comun de intersecție a axelor lor de alunecare.

Teorema reciprocă este adevărată: o rotație dată poate fi descompusă în mai multe rotații avînd axe-suport concurente.

b) *Axele* $\bar{\omega}_s$ *sînt paralele* (în număr finit). Fie $\bar{\omega}$ vectorul unitar al direcției comune. Atunci viteza totală va fi:

$$\sum_s \omega_s \bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_s) = \bar{\omega} \times (\bar{r} \sum_s \omega_s - \sum_s \omega_s \bar{r}_s)$$

unde ω_s sînt valorile absolute ale vectorilor axiali $\bar{\omega}_s = \omega_s \bar{\omega}$. Fie $\Omega = \sum_s \omega_s \neq 0$.

Atunci viteza rezultantă va fi:

$$\sum_s \omega_s \bar{\omega} \times \left(\bar{r} - \frac{\Sigma \omega_s \bar{r}_s}{\Sigma \omega_s}\right) = \Omega \bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_c)$$

unde $\bar{r}_c = \frac{\Sigma \omega_s \bar{r}_s}{\Sigma \omega_s}$. Mărimea $\bar{r}_c$ reprezintă operația de adunare vectorială a vectorilor $\Sigma \omega_s \bar{r}_s$ și diviziunea printr-un scalar diferit de zero; mai mult, $\bar{r}_c$ este independent de originea la care raportăm vectorii $\bar{r}_s$, și reprezintă deci vectorul de poziție al centrului sistemului de vectori $\omega_s \bar{r}_s$.

În adevăr, dacă în loc de originea O, la care raportăm vectorii $\bar{r}_s$ luăm o altă origine O', atunci:

$$\bar{r}'_s = \overrightarrow{O'O}_s \quad \text{sau} \quad \bar{r}'_s = \overrightarrow{O'O} + \bar{r}_s .$$

Deci:

$$\sum_s \omega_s \bar{r}'_s = \overrightarrow{O'O} \cdot \sum_s \omega_s + \sum_s \omega_s \bar{r}_s ;$$

prin urmare:

$$\frac{\Sigma \omega_s \bar{r}'_s}{\Sigma \omega_s} = \overrightarrow{O'O} + \frac{\Sigma \omega_s \bar{r}_s}{\Sigma \omega_s} = \overrightarrow{O'O} + \bar{r}_c = \bar{r}'_c = \overrightarrow{O'C} .$$

Sumarea $\sum_s \bar{\omega}_s$ este o operație care se poate efectua, deoarece reprezintă compunerea unor vectori paraleli (Anexa I, § 23), dacă rotațiile $\bar{\omega}_s$ sînt exprimate prin mărimi vectoriale.

Dacă $\sum_s \omega_s = 0$, atunci viteza rezultantă este $\bar{\omega} \times (-\sum \omega_s \bar{r}_s)$ și reprezintă o viteză de translație perpendiculară pe direcția comună a axelor $\bar{\omega}_s$, căci centrul sistemului, $\bar{r}_c$, se duce la infinit.

c) *Axele de rotație sînt oricum*, (neconcurente și neparalele) în număr finit. Vectorul vitezei rezultante este:

$$\sum_s \bar{\omega}_s \times (\bar{r} - \bar{r}_s).$$

Fie $\bar{r}_c$ vectorul unui punct arbitrar C. Putem scrie:

$$\sum_s \bar{\omega}_s \times (\bar{r} - \bar{r}_s) = \sum_s \bar{\omega}_s \times (\bar{r} - \bar{r}_c) + \sum_s \bar{\omega}_s \times (\bar{r}_c - \bar{r}_s).$$

Primul termen reprezintă momentul (cu semn schimbat) al vectorului rezultant $\Sigma \bar{\omega}_s$ așezat în $M(\bar{r})$, în raport cu punctul $C(\bar{r}_c)$. Aceasta însemnează o rotație a punctului M în jurul unei axe duse prin C, paralel cu $\Sigma \bar{\omega}_s$, (vector rezultant construit în punctul M).

Al doilea termen $\Sigma \bar{\omega}_s \times (\bar{r}_c - \bar{r}_s)$ reprezintă momentul rezultant al vectorilor $\bar{\omega}_s$ în raport cu punctul C (cu semn schimbat). El este un vector de direcție fixă trecînd prin C. În mișcarea rigidului acest termen reprezintă o mișcare de translație pe direcția perpendiculară pe planul determinat de vectorul rezultant $\Sigma \bar{\omega}_s$ și de punctul C.

În adevăr, acest termen nu conține vectorul de poziție al punctului $M(\bar{r})$ din rigid, ci exprimă o mișcare de ansamblu a întregului rigid.

Avem de efectuat, și în acest caz, sume de forma $\Sigma \bar{\omega}_s$ ca și în cazurile precedente. Admițînd că rotațiile $\Sigma \bar{\omega}_s$ au caracter vectorial (ceea ce are loc dacă sînt rotații *infinitezimale*), putem efectua suma lor, prin adunarea unor sisteme identic nule de vectori convenabil aleși.

162. **Unghiurile lui Euler.** Un corp rigid care se poate mișca *liber* în spațiu are *șase* grade de libertate; ele pot fi determinate astfel (fig. 53): trei coordonate pentru fixarea unui punct $O(\bar{r}_0)$ al corpului rigid; prin acest punct să ducem o dreaptă fixă în corp Oz', $(\bar{k}')$ pentru care ne trebuie două date: de ex. unghiul polar θ (numit unghi de rotație) făcut cu o dreaptă fixă din spațiu, ce trece prin O [axa Oz $(\bar{k})$], astfel încît $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, cu latura de origine Oz; unghiul azimutal ψ, (numit unghi de precesie) făcut de linia nodurilor (perpendiculara pe dreapta fixă aleasă în solid Oz' și pe axa fixă în spațiu Oz) cu o direcție fixă în spațiu Ox $(\bar{i})$ astfel încît $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$, cu latura de

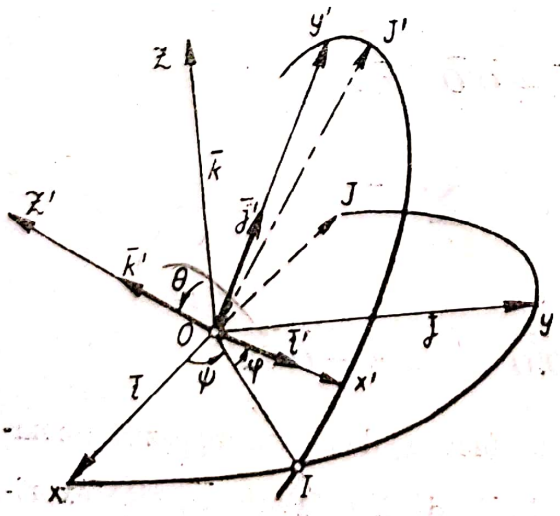

Fig. 53

origine Ox; în fine pentru a nu permite o rotație în jurul dreptei alese în solid (Oz') fixăm în solid o dreaptă perpendiculară pe Oz', de exemplu Ox' ($\bar{i}'$) care să facă cu linia nodurilor unghiul φ (numit unghi de nutație), astfel încît $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, cu latura de origine OI. Unghiurile θ, ψ, φ se numesc unghiurile lui Euler.

Fie sistemul (O, x', y', z') fix în corpul rigid și sistemul (O, x, y, z) fix în spațiu, cu originea comună în același punct O. Reducem mișcarea solidului numai la rotația posibilă în jurul punctului fix O. Triedrele (O, x, y, z) și $(O, x', y', z',)$ sînt orientate la fel, iar unghiurile sînt măsurate în sensul pozitiv, definit de ele în planele de coordonate. Linia nodurilor OI perpendiculară pe Oz' ($\bar{k}'$), și Oz ($\bar{k}$), este de fapt intersecția planelor (x, y) și (x', y') așa încît ψ este unghiul făcut de $\bar{i}$ cu $\overrightarrow{OI}$. Luăm în planul (x,y) dreapta $\overrightarrow{OJ}$ perpendiculară pe $\overrightarrow{OI}$, iar în planul (x',y'), luăm dreapta $\overrightarrow{OJ'}$ perpendiculară tot pe $\overrightarrow{OI}$, astfel încît să formeze sisteme drepte cu $\overrightarrow{Oz}$, $\overrightarrow{OI}$, respectiv $\overrightarrow{Oz'}$, $\overrightarrow{OI}$. Vedem că $\overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{OJ'}$ $\overrightarrow{Oz}$, $\overrightarrow{Oz'}$ sînt în același plan perpendicular în O pe $\overrightarrow{OI}$. Lungimile tuturor segmentelor le limităm la o sferă de rază egală cu unitatea, adică luăm pe ele vectorii unitate. Să exprimăm unghiurile făcute de axele celor două sisteme între ele, cu ajutorul unghiurilor lui Euler definite mai jos.

Pentru aceasta, efectuăm succesiv: în planul (x, y) o rotație a axelor $\bar{i}, \bar{j}$, de unghi ψ; apoi în planul (x', y') o rotație de unghi φ; și apoi în planul (z, z') o rotație de unghi θ.

1) în planul (x, y), față de $\overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{OJ}$:

$$\bar{i} = \overrightarrow{OI} \cos\psi + \overrightarrow{OJ} \cos\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) = \overrightarrow{OI} \cos\psi - \overrightarrow{OJ} \sin\psi$$

$$\bar{j} = \overrightarrow{OI} \cos\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) + \overrightarrow{OJ} \cos\psi = \overrightarrow{OI} \sin\psi + \overrightarrow{OJ} \cos\psi$$

2) în planul (x', y') față de $\bar{i}' \perp \bar{j}'$:

$$\overrightarrow{OI} = \bar{i}' \cos\varphi + \bar{j}' \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \bar{i}' \cos\varphi - \bar{j}' \sin\varphi$$

$$\overrightarrow{OJ'} = \bar{i}' \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + \bar{j}' \cos\varphi = \bar{i}' \sin\varphi + \bar{j}' \cos\varphi$$

3) în planul $(\bar{k}, \bar{k}', \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OJ'})$ față de $\bar{k}' \perp \overrightarrow{OJ'}$:

$$\bar{k} = \bar{k}' \cos\theta + \overrightarrow{OJ'} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \bar{k}' \cos\theta + \overrightarrow{OJ'} \sin\theta$$

$$\overrightarrow{OJ} = \bar{k}' \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \overrightarrow{OJ'} \cos\theta = -\bar{k}' \sin\theta + \overrightarrow{OJ'} \cos\theta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Eliminînd vectorii unitari intermediari $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{OJ'}$ obținem:

	$\bar{i}'$	$\bar{j}'$	$\bar{k}'$
$\bar{i}$	$\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta$	$-\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta$	$\sin\psi\sin\theta$
$\bar{j}$	$\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta$	$-\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta$	$-\cos\psi\sin\theta$
$\bar{k}$	$\sin\varphi\sin\theta$	$\cos\varphi\sin\theta$	$\cos\theta$

163. **Viteza de rotație exprimată cu ajutorul unghiurilor lui Euler.** Avem $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\theta, \psi, \varphi)$ care este rezultanta a trei rotații infinitezimale $\bar{\omega}_\theta$, $\bar{\omega}_\psi$, $\bar{\omega}_\varphi$. După regula de adunare:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_\theta + \bar{\omega}_\psi + \bar{\omega}_\varphi .$$

Vom considera fiecare mișcare infinitezimală în parte.

a) Rotația a cărei viteză este $\bar{\omega}_\theta$ se efectuează în jurul lui $\overrightarrow{OI}$, cu viteza unghiulară $\dot{\theta}$. Vectorul acestei rotații are expresiile:

$$\bar{\omega}_\theta = \dot{\theta}\cdot\overrightarrow{OI} = \dot{\theta}(\bar{i}'\cos\varphi - \bar{j}'\sin\varphi) = \dot{\theta}(\bar{i}\cos\psi + \bar{j}\sin\psi),$$

după cum exprimăm pe $\overrightarrow{OI}$ din transformarea 2) sau din transformarea 1);

b) Rotația cu viteza $\bar{\omega}_\psi$ se face în jurul axei $\overrightarrow{Oz}(\bar{k})$ cu viteza unghiulară $\dot{\psi}$. Expresia ei este:

$$\bar{\omega}_\psi = \dot{\psi}\bar{k} = \dot{\psi}(\bar{i}'\sin\varphi\sin\theta + \bar{j}'\cos\varphi\sin\theta + \bar{k}'\cos\theta).$$

c) Rotația cu viteza $\bar{\omega}_\varphi$ se face în jurul axei $\overrightarrow{Oz'}$ $(\bar{k}')$ cu viteza unghiulară $\dot{\varphi}$; vectorul rotației are expresia:

$$\bar{\omega}_\varphi = \dot{\varphi}\bar{k}' = \dot{\varphi}(\bar{i}\sin\psi\sin\theta - \bar{j}\cos\psi\sin\theta + \bar{k}'\cos\theta).$$

Să calculăm, din expresiile vitezelor unghiulare componente $\bar{\omega}_\theta$, $\bar{\omega}_\psi$, $\bar{\omega}_\varphi$, proiecțiile vitezei unghiulare totale; fie $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, respectiv $(\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'})$ proiecțiile lui $\bar{\omega}$ pe axele (x, y, z) și (x', y', z'). Vom avea, adunînd expresiile precedente și egalînd între ei coeficienții lui $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, respectiv $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$, față de sistemul fix:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi, \\ \omega_y &= \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta, \end{aligned} \tag{13.9}$$

iar față de sistemul mobil:

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta, \\ \omega_{y'} &= -\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta, \\ \omega_{z'} &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta . \end{aligned} \tag{13.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

164. **Distribuția accelerațiilor în corpul rigid.** Am observat că în corpul rigid viteza relativă $\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = 0$; așadar, din expresia generală a accelerației, (§ 20):

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' + 2\bar{\omega} \times \frac{\partial \bar{r}'}{\partial t} + \frac{\partial^2 \bar{r}'}{\partial t^2}$$

dispare acceleraţia lui Coriolis şi termenul care exprimă acceleraţia relativă, rămînînd numai acceleraţia de transport:

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' . \qquad (13.11)$$

— Primul termen $\bar{a}_0$ reprezintă acceleraţia translaţiei; mişcare, la care s-ar reduce deplasarea corpului rigid dacă nu ar avea rotaţie; adică, dacă $\bar{\omega}$ ar fi mereu nul.

— Al doilea termen reprezintă *acceleraţia centripetă*, datorită rotaţiei. În adevăr, acest vector este perpendicular pe axa rotaţiei momentane $\bar{\omega}$, în planul făcut de $\bar{\omega}$ cu $\bar{r}'$. Dacă însemnăm cu ρ distanţa de la punctul $M(\bar{r}')$ la axul $\bar{\omega}$, atunci valoarea absolută a accelerației centripete este:

$$\omega^2 r' \sin(\bar{\omega}, \bar{r}') = \omega^2 \rho = \frac{v^2}{\rho}$$

însemnînd cu $v = \rho\omega$ valoarea scalară a vitezei circulare.

— Al treilea termen reprezintă contribuţia la acceleraţie a variaţiei în timp a vitezei circulare $\bar{\omega}$, adică acceleraţia unghiulară.

Cînd mişcarea de rotaţie este uniformă, $\dot{\bar{\omega}} = 0$, termenul dispare; cînd rotaţia se efectuează în jurul unei axe fixe în spaţiu, dar neuniform, termenul se reduce la $\dot{\omega} \frac{\bar{\omega}}{\omega} \times \bar{r}'$, căci putem scrie:

$$\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' = \dot{\omega} \frac{\bar{\omega}}{\omega} \times \bar{r}' + \omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right) \times \bar{r}' .$$

În acest caz, termenul al treilea reprezintă acceleraţia tangenţială, căci:

$$\dot{\omega} \frac{\bar{\omega}}{\omega} \times \bar{r}' = \frac{\dot{\omega}}{\omega} \bar{\omega} \times \bar{r}' = \dot{\omega} \rho \bar{t}$$

unde $\bar{t}$ este vectorul unitate pe tangenta la traiectorie.

Cînd axa $\bar{\omega}$ nu are direcţie fixă, termenul $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right) \times \bar{r}'$ reprezintă variaţia direcţiei axei de rotaţie.

Vedem aşa dar că, din punctul de vedere al accelerațiilor, în mişcarea rigidului intervin nu numai translaţia şi rotaţia instantanee în jurul axei momentane, ci şi variaţia direcţiei acestei axe în cursul mişcării.

Scanned with OKEN Scanner

165. **Energia cinetică a rigidului.** Un corp rigid de masă $m = \Sigma_s m_s$ în mişcare absolută are energia cinetică $\sum_s' \frac{m_s}{2} v_s^2$, unde:

$$v_s^2 = v_0^2 + 2\bar{v}_0(\bar{\omega} \times \bar{r}_s') + (\bar{\omega} \times \bar{r}_s')^2 .$$

$\frac{1}{2} m v_0^2$ reprezintă energia cinetică a translaţiei de ansamblu a corpului; termenul al doilea se poate scrie:

$$\bar{v}_0 (\bar{\omega} \times \sum_s m_s \bar{r}_s') = \bar{v}_0 m (\bar{\omega} \times \bar{r}_G)$$

dacă însemnăm cu $\bar{r}_G = \frac{1}{m} \sum_s m_s \bar{r}_s'$, vectorul de poziţie al centrului de greutate.

Acest termen dispare dacă alegem originea sistemului mobil O' în centrul de greutate, fiindcă atunci $\bar{\omega}$ trece prin centrul de greutate, iar $\bar{\omega} \times \bar{r}_G$ este nul (căci reprezintă viteza de rotaţie a unui punct de pe axă, în jurul axei).

Ne rămîn, astfel, numai energia de translaţie şi energia de rotaţie: $\sum_s \frac{m_s}{2} (\bar{\omega} \times \bar{r}_s')^2$, a cărei valoare vrem s-o exprimăm convenabil.

Observăm că:

$$E_r = \sum_s \frac{m_s}{2} (\bar{\omega} \times \bar{r}_s')^2 = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2} \bar{K}\, \bar{\omega}$$

unde J reprezintă momentul de inerţie raportat la axa $\bar{\omega}$. Dacă $\bar{\omega}$ nu este fixă J va fi şi ea variabilă. Am văzut la teoria momentelor de inerţie (§ 161, relaţia 133) că:

$$\bar{K}\, \bar{\omega} = J_{11}\omega_x^2 + J_{22}\omega_y^2 + J_{33}\omega_z^2 + 2J_{32}\omega_z \omega_y + \\ + 2J_{13}\omega_x\omega_z + 2J_{21}\omega_y\omega_x = 2E_r .$$

Dacă, faţă de un sistem de coordonate cu centrul într-un punct de pe $\bar{\omega}$, luăm ca vector de pe poziţie variabil, vectorul:

$$\bar{r} = \frac{1}{\sqrt{2E_r}} \bar{\omega}$$

extremităţile lui se vor găsi pe elipsoidul de inerţie, care raportat la axele lui principale de simetrie, ne dă după (13.12):

$$1 = (Ax^2 + By^2 + Cz^2)$$

sau:

$$E_r = \frac{1}{2} (A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) \qquad (13.13)$$

A, B, C, fiind momentele principale de inerţie şi ω_x, ω_y, ω_z componentele lui $\bar{\omega}$ pe trei direcţii principale relative la O.

Scanned with OKEN Scanner

166. **Momentul cinetic şi noţiunea generalizată de impuls.** Avem:

$$\overline{K} = \sum_s m_s (\overline{r}'_s \times \overline{v}_s) = \sum_s m_s \overline{r}'_s \times (\overline{\omega} \times \overline{r}'_s)$$

dacă facem abstracţie de viteza de translaţie $\overline{v}_0$. Să observăm că există o relaţie strînsă între momentul cinetic $\overline{K}$ şi energia cinetică de rotaţie E_r (analogă relaţiei ce există între energia cinetică a translaţiei unui punct material şi vectorul *impuls*).

În adevăr, avem:

$$\delta E_r = \sum_s m_s (\overline{\omega} \times \overline{r}'_s) \cdot \delta (\overline{\omega} \overline{r}'_s)$$

$$= \sum_s m_s (\overline{\omega} \times \overline{r}'_s) (\delta\overline{\omega} \times \overline{r}'_s + \overline{\omega} \times \delta\overline{r}'_s)$$

fiindcă:

$$(\overline{\omega} \times \overline{r}'_s)(\overline{\omega} \times \delta\overline{r}'_s) = \delta\overline{r}'_s [\overline{\omega} \times (\overline{\omega}\overline{r}'_s)] = 0.$$

Rezultă:

$$\delta E_r = \delta\overline{\omega} \sum_s m_s [\overline{r}'_s \times (\overline{\omega} \times \overline{r}'_s)] = \delta\overline{\omega}\ \overline{K}.$$

Din această relaţie, considerînd pe $E_r(\overline{\omega})$ ca funcţie de $\overline{\omega}$, urmează:

$$\overline{K} = \text{grad}_{\omega} E_r(\overline{\omega}) \tag{13.14}$$

expresie analogă cu relaţia de definiţie a impulsului $p = \partial E / \partial q$, din Mecanica punctului material (p fiind impulsul corespunzător coordonatei de poziţie q).

Capitolul XIV

MIŞCAREA RIGIDULUI ÎN JURUL UNEI AXE FIXE

167. **Consideraţii asupra mişcării.** Rigidul *liber* are *şase* grade de libertate: trei pentru fixarea unui punct al corpului (ex. centrul de greutate), două pentru fixarea unei axe şi unul pentru fixarea mişcării de rotaţie în jurul axei. Vom avea nevoie de şase ecuaţii pentru a-i determina mişcarea. Ele ne sînt date de *teorema centrului de greutate* (§ 123):

$$m\ddot{\overline{r}}_G = \sum_s \overline{F}_s \tag{14.1}$$

şi de *teorema momentului cinetic* (§ 124):

$$\dot{\overline{K}} = \sum_s \overline{r}_s \times \overline{F}_s \tag{14.2}$$

impulsul fiind relativ la polul la care raportăm vectorul de poziţie $\overline{r}_s$, punct faţă de care luăm momentul total al forţelor ce acţionează asupra corpului.

În cazul mişcării rigidului în jurul unei axe fixe numărul gradelor de libertate se reduce la *unul* singur. Vom aplica una din teoremele generale.

Scanned with OKEN Scanner

168. **Ecuațiile mișcării.** Se poate aplica *teorema energiei* sau *teorema momentului cinetic*.

a) Alegem ca parametru variabil unghiul cu care s-a rotit corpul în jurul axei fixe și luăm ca origine a vectorilor de poziție un punct de pe această axă.

Vom observa că reacțiunile axei fixe asupra corpului rigid nu contribuie la lucrul mecanic, deoarece deplasările punctelor de legătură sînt nule.

Să considerăm ecuația energiei. Ținînd seamă că:

$$\sum_s \frac{m_s}{2} v_s^2 = \frac{1}{2}\omega^2 J$$

unde J este momentul de inerție al rigidului în raport cu axa de rotație fixă, vom avea:

$$d\frac{1}{2}(J\omega^2) = \sum_s \overline{F}_s d\overline{r}_s.$$

Dar:

$$d\overline{r}_s = (\overline{\omega} \times \overline{r}_s)\, dt$$

astfel încît:

$$\sum_s \overline{F}_s d\overline{r}_s = \sum_s \overline{F}_s (\overline{\omega} \times \overline{r}_s)\, dt = dt \cdot \overline{\omega} \sum_s (\overline{r}_s \times \overline{F}_s).$$

Așadar:

$$J\omega\dot{\omega} = \overline{\omega} \sum_s (\overline{r}_s \times \overline{F}_s)$$

și în sfîrșit luînd axa fixă drept axă z, adică $\overline{\omega} = \omega\, \overline{k}$, rezultă:

$$J\dot{\omega} = \overline{k}\, \Sigma (\overline{r}_s \times \overline{F}_s) \qquad (14.3)$$

relație pe care o putem obține și cu ajutorul teoremei momentului cinetic, după cum vom vedea în paragraful următor.

b) *Introducerea reacțiunilor.* Din cauza forțelor exterioare, de rezultantă $\overline{F}$, rigidul este obligat să se miște astfel încît să păstreze o axă fixă, de care presupunem că este legat, fără frecare. Putem imagina rigidul ca fiind liber, dacă adăugăm forțelor efective $\overline{F}$ forțele de reacțiune care sînt datorite legăturilor; fie $\overline{R}$ rezultanta acestora.

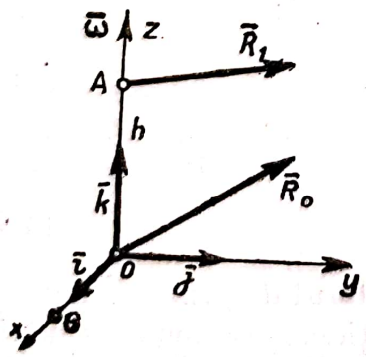

Fig. 54

Luăm axa fixă drept axă z (fig. 54), iar legăturile să fie date prin două forțe $\overline{R}_0$ și $\overline{R}_1$ care fixează axa, una aplicată într-un punct O al axei luat ca origine a axelor de coordonate și una $\overline{R}_1$ într-un punct A $(z = h)$ al axei.

Avem evident $\overline{R} = \overline{R}_1 + \overline{R}_0$. Să luăm ca axă x perpendiculara din centrul de greutate G al solidului pe axa $\overline{\omega}$, astfel încît originea O să fie piciorul acestei perpendiculare.

Scanned with OKEN Scanner

Mișcarea rigidului va fi dată de ecuațiile (14.1) și (14.2). Să însemnăm momentul forțelor exterioare în raport cu originea O:

$$\overline{M} = \sum_s (\overline{r}_s \times \overline{F}_s)$$

și momentul reacțiunilor în raport cu O:

$$\overline{\mu} = \sum_s (\overline{r}_s \times \overline{R}).$$

Atunci ecuația centrului de greutate ne dă:

$$m\ddot{\overline{r}}_G = \overline{F} + \overline{R} \tag{14.4}$$

Centrul de greutate ($x = r_G$, $y = z = 0$) execută, ca orice punct al corpului, o mișcare circulară cu viteza unghiulară ω, în jurul lui $\overline{\omega}$ (Oz).

Din $\dot{\overline{r}}_G = \overline{\omega} \times \overline{r}_G$ urmează :

$$\ddot{\overline{r}}_G = \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}_G) + \dot{\overline{\omega}} \times \overline{r}_G$$

având pe x, y, z, componentele $(-\omega^2 r_G, \dot{\omega} r_G, 0)$ căci $\overline{\omega} = \omega \frac{\overline{\omega}}{\omega}$, axul $\overline{\omega}$ fiind de direcție fixă (direcția axei z).

Ecuația (14.4) ne dă atunci, proiectată pe cele trei axe de coordonate, relațiile:

$$\begin{aligned} -mr_G\,\omega^2 &= F_x + R_x \\ mr_G\,\dot{\omega} &= F_y + R_y \\ 0 &= F_z + R_z \end{aligned} \tag{14.5}$$

de unde deducem reacțiunile:

$$\begin{aligned} R_x &= R_{0,x} + R_{1,x} = -F_x - mr_G\,\omega^2 \\ R_y &= R_{0,y} + R_{1,y} = -F_y + mr_G\,\dot{\omega} \\ R_z &= R_{0,z} + R_{1,z} = -F_z \end{aligned} \tag{14.5'}$$

expresii din care deducem suma reacțiunilor R_0 și R_1, cînd cunoaștem forțele efective $\overline{F}$, viteza unghiulară ω și poziția centrului de greutate $\overline{r}_G$. Prin urmare, din cele șase grade de libertate ale solidului considerat ca liber sub acțiunile forțelor efective $\overline{F}$ și a forțelor de reacțiune $\overline{R}$, ecuația (14.3) ne permite calcularea a trei necunocute. Mai rămîn încă trei necunoscute de calculat. Pentru aceasta ne folosim de ecuația momentelor:

$$\dot{\overline{K}} = \sum_s \overline{r}_s \times (\overline{F}_s + \overline{R}_s) = \overline{M} + \overline{\mu} \tag{14.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem:

$$\bar{K} = \sum_s m_s \bar{r}_s \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_s) = \sum_s m_s \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_s & y_s & z_s \\ -\omega y_s & \omega x_s & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_s m_s \left[\bar{i}\,(-\omega x_s z_s) + \bar{j}\,(-\omega y_s z_s) + \bar{k}\,(\omega x_s^2 + \omega y_s^2)\right]$$

căci:

$$\dot{\bar{r}}_s = \bar{\omega} \times \bar{r}_s = \bar{i}\dot{x}_s + \bar{j}\dot{y}_s + \bar{k}\dot{z}_s = \bar{i}(-\omega y_s) + \bar{j}(\omega x_s) + 0. \qquad (14.7)$$

Aşadar (14.6) devine:

$$\frac{d}{dt}\sum_s m_s\left[\bar{i}\,(-\omega x_s z_s) + \bar{j}\,(-\omega\, y_s z_s) + \bar{k}\,(x_s^2 + y_s^2)\,\omega\right] = \bar{M} + \bar{\mu}$$

ceea ce ne dă, după efectuarea derivării şi ţinînd seamă de (14.7) în proiecţie pe cele trei axe, ecuaţiile:

$$\omega^2 \sum_s m_s y_s z_s - \dot{\omega} \sum_s m_s x_s z_s = M_x + \mu_x,$$

$$\omega^2 \sum_s m_s z_s x_s - \dot{\omega} \sum_s m_s z_s y_s = M_y + \mu_y,$$

$$\dot{\omega} \sum_s m_s (x_s^2 + y_s^2) = M_z$$

sau:

$$\begin{aligned} \omega^2 J_{yz} - \dot{\omega}\, J_{xz} &= M_x + \mu_x, \\ \omega^2 J_{zx} - \dot{\omega}\, J_{zy} &= M_y + \mu_y, \\ \dot{\omega}\, J &= M_z \end{aligned} \qquad (14.6')$$

unde $J_{xz} = J_{zx}$ şi $J_{yz} = J_{zy}$ sînt momentele centrifugale, care se pot calcula, întrucît reprezintă constante caracteristice pentru corpul material. Observăm apoi că $\bar{\mu}_0 = 0$, căci reacţiunea $\bar{R}_0$ trece prin O. Aşadar:

$$\mu_x = \mu_{1,x} = (\bar{r} \times \bar{R}_1)_x = -hR_{1,y}; \quad \mu_y = \mu_{1,y} = +hR_{1,x}; \quad \mu_z = \mu_{1,z} = 0.$$

Deci, primele două ecuaţii (14.6′) devin:

$$\begin{aligned} \omega^2 J_{yz} - \dot{\omega}\, J_{zx} &= M_x - hR_{1,y} \\ \omega^2 J_{xz} - \dot{\omega}\, J_{zy} &= M_y + hR_{1,x} \end{aligned} \qquad (14.6'')$$

ceea ce ne permite calcularea lui $R_{1,y}$ şi $R_{1,x}$, valori care înlocuite în (14.5′) ne dau pe $R_{0,y}$ şi $R_{0,x}$ din primele două ecuaţii (14.5′). În ceea ce priveşte componenta după z, vedem că nu putem calcula decît suma $R_z = R_{0z} + R_{1z}$ din ultima ecuaţie (14.5′) căci ne lipseşte a şasea ecuaţie pentru a putea calcula separat pe R_{0z} şi R_{1z} întrucît ultima ecuaţie (14.6′) nu conţine reacţiunile. Această împrejurare se pare a nu fi satisfăcătoare; dar analizînd cu atenţie condiţiile mecanice ale problemei, observăm că ea rezidă în însăşi

Scanned with OKEN Scanner

aceste condiții. În adevăr, componenta $R_z = R_{0z} + R_{1z}$ a reacțiunii nu-și schimbă valoarea dacă adăugăm în O și A două forțe $+\bar{f}$ și $-\bar{f}$ având ca direcție axa z: $R_z = (R_{0z} + f) + (R_{1z} - f)$; prin urmare R_{0z} și R_{1z} nu pot fi determinate decît cu aproximația unei forțe aditive de direcție z. Putem atunci să alegem una din componente egală cu o valoare arbitrară, de ex. egală cu zero.

În sfîrșit, este de remarcat că ultima ecuație (14.6′):

$$J\dot{\omega} = M_z$$

neconținînd reacțiunile, reprezintă însăși ecuația de mișcare a corpului. Această ecuație este identică, în adevăr, cu ecuația (14.3) dedusă din teorema energiei.

169. **Observații asupra mișcării.** a) *Caz particular.* Dacă axa fixă $\bar{\omega}$ este o axă fixă principală de inerție în raport cu centrul de greutate (fig. 55), formulele (14.5) și (14.6′) se simplifică foarte mult.

În adevăr, în acest caz, rezultă $\bar{r} = 0$ și momentele centrifugale $J_{yz} = J_{xz} = 0$. Atunci (14.4) și (14.6″) devin:

$$\bar{R} + \bar{F} = 0; \quad M_x - hR_{1,y} = 0; \quad M_y + hR_{1,x} = 0 \tag{14.8}$$

în total cinci ecuații scalare.

Cîmpul vectorial al forțelor exterioare se poate reduce la un sistem echivalent cu sistemul compus dintr-o rezultantă $\bar{F}$ și un cuplu $\bar{M}$. Să transportăm acest sistem în origine (centrul de greutate). Să descompunem apoi cuplul $\bar{M} = \bar{M}_z + \bar{M}_1$, unde $\bar{M}_z$ este componenta pe direcția lui Gz și $\bar{M}_1$ în planul (x, y). Dacă am suprima componenta M_z ar urma, după ecuația a treia din (14.6′), că rigidul posedă o mișcare de rotație uniformă cu viteza unghiulară $\omega = \text{const}$, sub acțiunea forței $\bar{F}$ și a cuplului $\bar{M}_1$ care satisfac ecuațiilor (14. 8). Să presupunem că $\omega = \text{const} = 0$ deci, rigidul este în repaus. Atunci legăturile vor fi de așa natură încît vor dezvolta reacțiuni care se vor calcula după ecuațiile (14.8). Vom obține astfel anumite valori pentru aceste reacțiuni corespunzătoare stării de repaus a rigidului.

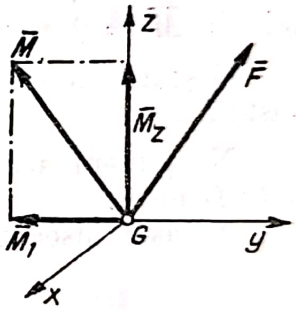

Fig. 55

Să ne închipuim acum că imprimăm rigidului o mișcare de rotație în jurul axei Gz cu o viteză variabilă. Mișcarea se va efectua după ecuația (14. 3):

$$J\dot{\omega} = M_z$$

M_z fiind diferit de zero. Totuși și pentru acest caz, dacă vrem să calculăm reacțiunile, ele vor fi date de aceleași ecuații (14.8) ca și în cazul inițial de repaus; căci M_z și deci $\dot{\omega}$ nu apare în ecuațiile (14.8). Mișcarea aceasta nu va perturba stabilitatea mișcării rigidului, prin faptul că nu va influența stabilitatea axei fixe Gz, fiindcă nu se modifică valorile reacțiunilor.

b) Importanța acestei proprietăți a fost recunoscută mai întîi de Euler. El a observat cît de necesar este ca piesele unei mașini rotative să se rotească în jurul unei axe principale de inerție relativ la centrul de greutate;

căci, în caz contrar, în expresia reacțiunilor axei figurează pătratul vitezei unghiulare. Deci, dacă această viteză unghiulară este mare, reacțiunile și prin urmare presiunile asupra axului lui devin considerabile, ele putînd rupe axul. Mai mult, termenul care cuprinde $\dot{\omega}$, adică neuniformitatea mișcării, produce și el un efect perturbator asupra reacțiunilor, avînd ca rezultat acțiunea de smuncire, exercitată de ax asupra fundamentului pe care este așezată mașina. Dacă se întîmplă să aibă loc și un efect de rezonanță, provenind din coincidența accidentală a perioadei de mișcare a solidului cu perioada de oscilație proprie a fundației mașinii (ex. mașinile așezate pe vapoare, care au oscilații proprii), atunci oscilațiile pot fi mărite pînă într-atît încît să zdruncine complet stabilitatea inițială a mașinei.

170. **Axe permanente și axe spontane de rotație.** Să considerăm cazul cînd forțele exterioare au o rezultantă trecînd prin punctul O; atunci momentul acestor forțe în raport cu O este nul, $\overline{M} = 0$, iar ecuațiile dinamice devin:

$$\begin{cases} R_x + F_x = -mr_G\,\omega^2 \\ R_y + F_y = 0 \\ R_z + F_z = 0 \end{cases} \qquad \text{și} \qquad \begin{cases} \omega^2 J_{yz} = -hR_{1y} \\ \omega^2 J_{xz} = +hR_{1x} \end{cases}$$

căci din $\overline{M} = 0$ rezultă $M_z = 0$ și deci $J\dot{\omega} = M_z = 0$.

Mișcarea de rotație în jurul axei este uniformă cu viteza unghiulară constantă ω.

Ne punem acum întrebarea: în ce caz reacțiunea $\overline{R_1}$ din A $(z = h)$ poate fi nulă?

Aceasta înseamnă, după ecuațiile de mai sus, că, în primul rînd:

$$J_{yz} = 0 \text{ și } J_{xz} = 0$$

ceea ce înseamnă că axa de rotație trebuie să fie o axă principală de inerție în raport cu O.

Componenta R_{1z} poate fi transportată pe axă, în O.

Dacă aceste condiții sînt îndeplinite, putem suprima legătura din A și rigidul poate fi lăsat liber să se miște numai în jurul singurului punct fix O.

Teorema I. Dacă un rigid mobil în jurul unui punct fix este supus unor forțe exterioare avînd o rezultantă ce trece prin punctul fix dat și dacă acest corp are o mișcare inițială de rotație în jurul unei axe principale de inerție ce trece prin punctul fix, rigidul își va continua la infinit această rotație cu o viteză unghiulară constantă.

Aceste axe principale de inerție poartă numele de *axe permanente de rotație.*

Dacă rezultanta forțelor exterioare este nulă, $\overline{F} = 0$, atunci putem obține și anularea reacțiunii din O, adică $\overline{R_0} = 0$, după ecuațiile de mai sus, ducînd punctul O în centrul de greutate, $(\overline{r_G} = 0)$. Observăm că $R_{1z} + R_{0z} = 0$.

Teorema II. Dacă un rigid liber, nesolicitat de nici o forță exterioară, începe să se rotească în jurul unei axe principale de inerție relativă la centrul

Scanned with OKEN Scanner

lui de greutate, el va continua mereu această mișcare, cu o viteză unghiulară constantă.

Din această cauză, axele elipsoidului central se mai numesc *axe spontane de rotație.*

Aceste teoreme sînt similare „principiului inerției" în mișcarea rectilinie uniformă.

171. **Pendulul fizic.** Un corp rigid *greu* care se rotește în jurul unei axe *orizontale* fixe trecînd prin corp, constituie pendulul fizic (fig. 56).

a) Să luăm *axul de suspensie*, adică axul în jurul căruia se rotește corpul, ca axă $z\,(\bar{k})$, iar ca plan (xy) planul vertical presupus a fi un plan de simtetrie și care conține centrul de greutate G al rigidului, astfel încît axa x să treacă prin centrul de greutate G; ea face în momentul t un unghi θ cu verticala. Viteza unghiulară este $\omega = \dot{\theta}$. Ecuația de mișcare este precum am văzut în paragrafele precedente, a treia ecuație dată de teorema momentului cinetic relativ la axa Oz (orizontal) anume:

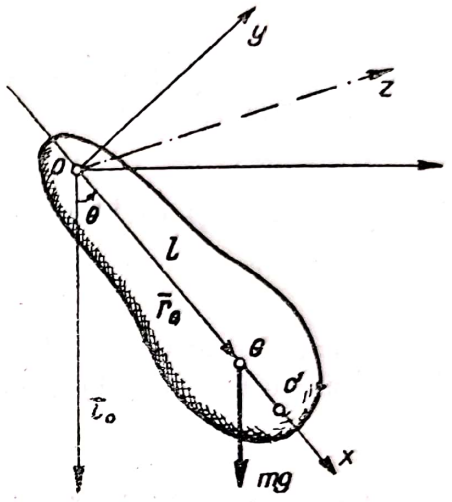

Fig. 56

$$J\dot{\omega} = \bar{k}\sum_s (\bar{r}_s \times m_s g\bar{i}_0) \qquad (14.9)$$

căci asupra fiecărui punct acționează forța $m_s\bar{g}_s$, $\bar{r}_s$ însemnînd vectorul de poziție față de punctul fix O.

Ecuația (14.9) poate fi trasformată observînd că:

$$\bar{k}\sum_s (\bar{r}_s \times m_s\, g\,\bar{i}_0) = \bar{k}g\,(\sum_s m_s\bar{r}_s \times \bar{i}_0) = mg\bar{k}\,(\bar{r}_G \times \bar{i}_0)$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziție al centrului de greutate G față de polul O, astfel încît $r_G = l$.

Ecuația de mișcare (14.9) devine:

$$J\ddot{\theta} = -\,mgl\sin\theta$$

sau încă, punînd $J = mk^2$ unde k este raza de girație față de O (să nu se confunde cu vectorul unitate $\bar{k}$ pe direcția axei z!):

$$\ddot{\theta} + \frac{gl}{k^2}\sin\theta = 0 \qquad (14.10)$$

ecuație, care reprezintă mișcarea unui pendul matematic de lungime:

$$l' = \frac{k^2}{l} \qquad (14.11)$$

numit *pendulul sincron* al pendulului fizic.

b) *Axa oscilantă.* Să luăm pe dreapta OG o lungime $OO' = l'$. Acest punct O' va oscila în jurul lui O ca și cum ar fi independent de solid și ar

fi legat de O printr-un fir fără masă, de lungime l'; legea de mișcare a lui O' va fi dată de ecuația pendulului matematic de lungime l', anume:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l'} \sin\theta = 0$$

Fie k' raza de girație a corpului în raport cu o axă orizontală trecînd prin centrul de greutate G. Știm că (§ 146):

$$J_O = J_G + ml^2$$

așadar:

$$mk^2 = mk'^2 + ml^2$$

de unde urmează relația:

$$k^2 = k'^2 + l^2 \tag{14.11'}$$

și, după (14.11) și 14.11') rezultă:

$$l' = l + \frac{k'^2}{l} \tag{14.12}$$

relație, care ne arată că $l' = \overline{OO'} > OG$ și că distanțele $\overline{OG}$ și $\overline{O'G}$ sunt reciproce, căci după (14.11) avem relația de reciprocitate:

$$\overline{OG} \cdot \overline{O'G} = k'^2 \tag{14.13}$$

Axa orizontală dusă prin O' se numește axă *oscilantă*, căci orice punct al solidului așezat pe aceasta axă oscilează liber în jurul axului de suspensie O, ca un pendul matematic. Dacă am suspenda solidul cu ajutorul axei oscilante, aceasta ar deveni ax de suspensie, iar axul de suspensie devine axă oscilantă. Cele două axe sînt reciproce. Perioada oscilației solidului este, indiferent dacă oscilează în jurul axei Oz sau $O'z'$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\overline{l'}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\overline{k^2}}{lg}} = 2\pi \sqrt{\frac{\overline{J}}{mlg}}. \tag{14.14}$$

c) *Calculul reacțiunilor*. Să admitem că pendulul rigid este simetric în raport cu planul vertical (x, y) în care oscilează centrul lui de greutate G. În acest caz, momentele centrifugale față de planul de simetrie (xy) sînt nule: $J_{xz} = J_{yz} = 0$.

În sistemul de coordonate ales la § 168, ecuațiile care dau reacțiunile sînt:

$$R_x = -F_x - mr_G\omega^2$$
$$R_y = -F_y + mr_G\dot{\omega}$$
$$R_z = -F_z$$

și

$$M_x + \mu_x = 0$$
$$M_y + \mu_y = 0$$

căci $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Dar și $M_x = 0$ și $M_y = 0$, căci singura forță exterioară este greutatea, iar momentul $\overline{M}$ al acestei forțe este un vector perpendicular pe planul (x,y).

Ținînd seamă că forța exterioară (greutatea) are ca rezultantă $mg\bar{i}_0$ aplicată în G, în direcția verticalei, avem:

$$F_x = mg\cos\theta, \quad F_y = -mg\sin\theta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci:

$$R_x = -mg\cos\theta - ml\omega^2$$
$$R_y = +mg\sin\theta + ml\dot{\omega} \quad \text{și} \quad -hR_{1y} = 0$$
$$R_z = 0 \qquad\qquad +hR_{1x} = 0$$

de unde:

$$R_{1y} = 0 \text{ și } R_{1x} = 0.$$

Dar, $R_z = R_{0z} + R_{1z} = 0$. Deci, R_{0z} și R_{1z} sînt două forțe în direcția lui z egale și de sens contrar. Ele se anihilează și pot fi eliminate din problemă; ceea ce revine a lua $R_{0z} = 0$ și $R_{1z} = 0$.

În definitiv, avem deci $R_1 = 0$ (căci $R_{1x} = R_{1y} = R_{1z} = 0$) și $R_{0z} = 0$. Rămîn numai componentele:

$$R_{0x} = -mg\cos\theta - ml\omega^2 \quad \text{și} \quad R_{0y} = mg\sin\theta + ml\dot{\omega}$$

în care trebuie să înlocuim pe $\dot{\omega}$ și pe ω^2 din ecuația de mișcare:

$$\dot{\omega} = -\frac{gl}{k^2}\sin\theta.$$

Prin integrare obținem ecuația energiei:

$$\omega^2 = \frac{2gl}{k^2}\cos\theta + C.$$

Rezultă, așa dar:

$$R_{0x} = -mg\left(\frac{2l^2}{k^2} + 1\right)\cos\theta - mCl;\ R_{0y} = -mg\left(\frac{l^2}{k^2} - 1\right)\sin\theta.$$

Avem prin urmare o singură reacțiune aplicată în O, perpendiculară pe axa Oz (așezată în planul xy).

Cum $l^2 = k^2 - k'^2$ vedem că R_{0y} are totdeauna semnul contrar lui $\sin\theta$. Dacă rigidul s-ar reduce la un punct, adică ar deveni pendul matematic, atunci $l^2 = k^2$, iar $k'^2 = 0$ și $R_{0y} = 0$; ceea ce este evident, căci reacțiunea punctului de suspensie, la pendulul matematic, este egală și de sens contrar cu tensiunea firului.

172. Teoremele lui Huygens. 1. *Dacă într-un plan trecînd prin centrul de greutate G al solidului, luăm de o parte și de alta a centrului de greutate două axe paralele duse prin două puncte O și O' ale solidului, care nu sînt egal depărtate de G și pentru care lungimea pendulului sincron este aceeași, adică perioada de oscilație în jurul lui O și O' este aceeași, atunci depărtarea dintre cele două axe este egală cu lungimea pendulului sincron.*

Fie l și l_1 distanțele celor două axe de G; avem conform teoremei enunțate:

$$l' = l + \frac{k'^2}{l} \quad \text{și} \quad l' = l_1 + \frac{k'^2}{l_1} \tag{14.15}$$

deci prin scădere:

$$(l - l_1)\cdot\left(1 - \frac{k'^2}{ll_1}\right) = 0$$

care ne dă, lăsînd la o parte soluţia $l = l_1$ exclusă de enunţul teoremei, condiţia:

$$l_1 = \frac{k'^2}{l}.$$

Aşa dar:

$$\overline{OO'} = l + l_1 = l + \frac{k'^2}{l} = l'.$$

Reciprocitatea axelor prin O şi O' se ilustrează clar prin relaţia care rezultă scriind momentul de inerţie faţă de O'; raza de giraţie respectivă fiind notată cu k_1, avem:

$$J_{O'} = J_G + ml_1^2;$$

deci:

$$\frac{k_1^2}{l_1} = \frac{k'^2}{l_1} + l_1 = l + l_1 = l';$$

relaţie corespunzătoare relaţiei (14.11) care dă lungimea pendulului sincron.

2. *Locul geometric al dreptelor de direcţie dată în rigid, şi care, luate drept axe de suspensie, permit ca rigidul să oscileze în jurul lor cu aceeaşi perioadă dată* $T = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}$, *este format din doi cilindri de rotaţie a căror axă comună trece prin centrul de greutate* G *şi este paralelă cu direcţia dată.*

În adevăr, condiţia $l' = l + \frac{k'^2}{l}$ devine:

$$l^2 - ll' + k'^2 = 0,$$

unde k' este calculat faţă de axa comună, dusă prin G, paralelă cu direcţia dată. Problema admite soluţii numai atîta vreme cît $l' \geqslant 2k$. Pentru $l' > 2k'$ problema are două soluţii (rădăcini neegale) a căror sumă este l' şi al căror produs este k'^2.

173. **Pendulele lui Kater, Bessel şi de torsiune.** Teorema lui Huygens, prin care se recunoaşte proprietatea de reciprocitate dintre axa de oscilaţie şi axa de suspensie, a făcut posibilă construirea unui „pendul reversibil" cu ajutorul căruia să se măsoare (prin observaţie) perioada de oscilaţie T corespunzătoare pendulului matematic sincron de lungime l' egală cu distanţa dintre axa de suspensie O şi axa de oscilaţie O'.

Un astfel de pendul serveşte pentru determinarea valorii constantei de greutate g în locul unde se face observaţia. În adevăr, observînd prin numărare perioada T şi măsurînd lungimea l', relaţia cunoscută pentru oscilaţii suficient de mici:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mlg}}$$

ne permite să calculăm pe g. Aceste determinări se numesc „determinări absolute ale constantei greutăţii g".

Din observația de mai sus rezultă că toată grija în construcția unui astfel de pendul fizic este determinarea precisă a centrului său de greutate, a momentului de inerție și a axei de oscilație O', astfel încît perioada de oscilație în jurul axei de suspensie O să fie riguros egală cu perioada de oscilație în jurul axei de oscilație O'. Acesta este principiul de construcție al pendulului reversibil.

În practică, însă, este imposibil să se găsească poziția axei O' cu precizia cerută, dacă se cunoaște axa O. De aceea se recurge la un artificiu tehnic: se fixează, prin construcție, pozițiile celor două axe O și O' așa fel ca dreapta OO' să treacă prin centrul de greutate al pendulului și astfel încît perioadele de oscilație în jurul lui O și O' să fie cît se poate de apropiate.

Un astfel de pendul a fost construit întîia oară de H. Kater în 1818 (fig. 57). Pendulul se compune dintr-o bară AB de bronz masivă de 135 cm lungime, 4 cm lărgime și 3 mm grosime, terminată cu două vîrfuri ascuțite. La extremități sînt fixate două cuțite de suspensie C_1 și C_2, perpendicular pe lungimea barei. La una din extremități dincolo de cuțitul C_2 se află o greutate $M = 950$ g fixă. Între cele două cuțite se află două mase legate, m_1=230 g și m_2=125 g, care sînt fixate pe o placă care poate fi deplasată de-a lungul barei și poate fi fixată de bară prin șurubul S_1. Șurubul S_2 servește ca prin mișcare micrometrică, masa m_2 să fie apropiată sau depărtată de masa m_1, după nevoie.

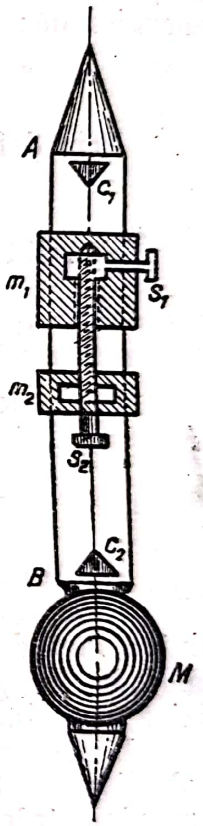

Fig. 57

Din deplasările maselor m_1 și m_2 deci, a centrului de greutate, se obține coincidența oscilațiilor efectuate în jurul lui C_1 și C_2 unde ne închipuim fixate axele de suspensie și de oscilație (corespunzătoare punctelor ideale O și O').

Fie l_1 și l_2 distanțele axelor C_1 și C_2 de centrul de greutate, care poate fi determinat geometric; fie T_1 și T_2 cele două perioade de observație care trebuie, teoretic, să fie riguros egale.

Vom avea, în realitate, după (14.15):

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{g}\left(l_1 + \frac{k'^2}{l_1}\right); \quad T_2^2 = \frac{4\pi^2}{g}\left(l_2 + \frac{k'^2}{l_2}\right) \qquad (14.16)$$

dar k'^2 nu va coincide în cele două expresii precedente, decît pînă la o eroare experimentală.

Să eliminăm deci această eroare. Din cele două relații precedente, vom avea:

$$\frac{l_1T_1^2 - l_2T_2^2}{l_1 - l_2} = \frac{4\pi^2}{g}(l_1 + l_2) = T^2 \qquad (14.17)$$

însemnînd cu T perioada pendulului de lungime $l_1 + l_2 = \overline{C_1C_2}$. Dezvoltînd (14.17) în serie, avem:

$$T = T_1 + \frac{1}{2}\frac{l_2T_1}{l_1 - l_2}\left(1 - \frac{T_2^2}{T_1^2}\right) + \ldots,$$

ceea ce revine a spune că efectul de reversiune constă într-o *corecție* de aplicat perioadei *observate* în jurul axei de suspensie C_1, proporțională cu diferența perioadelor măsurate.

Pendulul lui K a t e r prezintă o cauză de eroare dezagreabilă, prin faptul că greutatea M nu suferă aceeaşi rezistenţă a aerului cînd aparatul oscilează în jurul celor două axe de suspensie. S-a încercat eliminarea acestei erori cu *pendulul lui B e s s e l*, care se compune dintr-o bară terminată prin două corpuri cilindrice, unul plin, celălalt gol, de aceeaşi formă exterioară.

Pendulul de torsiune se compune dintr-un fir flexibil, fixat în una dintre extremităţile O, şi avînd atîrnat în cealaltă extremitate A, un corp greu M, simetric în raport cu dreapta OA, care devine astfel axă principală de inerţie pentru corpul M.

Se aplică corpului un cuplu $\overline{C}$ de axă OA, astfel încît sistemul face unghiul α faţă de poziţia iniţială, prin torsiunea firului:

$$C = k\alpha$$

unde $k = \rho d^4/l$ este o constantă de material, d este diametrul firului şi l — lungimea firului. Fie J momentul de inerţie al sistemului faţă de OA. Ecuaţia energiei dă:

$$d\left(\frac{1}{2}\sum mv^2\right) = -C \cdot d\alpha.$$

Prin definiţie însă:

$$\sum mv^2 = J\dot{\alpha}^2.$$

Rezultă ecuaţia diferenţială a mişcării:

$$\ddot{\alpha} + \frac{k}{J}\alpha = 0.$$

Perioada unei oscilaţii complete este:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}}.$$

174. Observaţie asupra determinării acceleraţiei greutăţii[1]).

a) Măsurarea duratei de oscilaţie a pendulului se face prin una dintre metodele experimentale cunoscute: „metoda coincidenţelor“ sau „metoda înregistrărilor“, a căror descriere se găseşte în orice tratat de fizică experimentală sau gravimetrie.

b) Observaţiile făcute cu pendulul reversibil în vederea determinării valorii absolute a constantei greutăţii g sînt pasibile de multe şi mari erori experimentale, pe care le enumerăm pe scurt:

1) Este necesar să se aplice corecţii pentru reducerea observaţiei la amplitudini foarte mici, conform ipotezei;

2) Să se elimine influenţa mediului prin:

— Corecţia de temperatură;

— Corecţia de reducere la vid;

3) Să se elimine influenţa suspensiei;

4) Să se ţină seamă de deplasarea suportului;

5) Corecţiile de măsurare a distanţei C_1C_2 şi a distanţelor l_1 şi l_2 la centrul de greutate.

---

[1]) Pentru completări vezi R. P. Pierre Lejay „Développements modernes de la gravimétrie“, Paris, Gauthier-Villars, 1947.

Scanned with OKEN Scanner

Prin aceasta se vede că o determinare riguroasă a valorii absolute a lui g este o operație extrem de anevoioasă. Astfel de determinări se fac numai în stații gravimetrice de prim ordin (stații de referință). Pentru întreg pămîntul stația de referință fundamentală este la *Potsdam*.

c) Determinări gravimetrice mai ușor de efectuat sînt „determinările relative", pornind cu o perioadă riguros determinată în stația de referință și determinînd apoi perioada în stația actuală.

După relația evidentă:

$$g = g_0 \cdot \frac{T_0^2}{T^2}$$

se deduce valoarea lui g în stația actuală; așadar, printr-o simplă măsurare a perioadei. În aceste determinări se presupun satisfăcute condițiile care mențin pendulul invariabil prin transportare și instalare.

175. **Aplicație a teoremei lui Huygens**: *metodă experimentală pentru determinarea practică a momentelor de inerție la rigide.*

Din relația (14.14) § 171 putem calcula momentul de inerție:

$$J = \frac{T^2}{4\pi^2} mlg, \tag{14.18}$$

dacă am cunoaște, prin măsurători practice, masa corpului m și distanța l a centrului de greutate al corpului pînă la axa față de care luăm momentul de inerție.

Aceste mărimi însă nu pot fi determinate cu exactitatea necesară și de aceea se recurge, în practică, la următorul procedeu. Se adaugă corpului considerat o masă rigidă suplimentară cunoscută m' distribuită *uniform* în jurul axului de rotație: $l' = 0$. Fie J' momentul de inerție, față de axul considerat, al masei m. Fie T_1 perioada de oscilație și r distanța la axa centrului de greutate al întregului sistem $m + m'$. Avem evident:

$$J + J' = \frac{T_1^2}{4\pi^2}(m + m')\, rg. \tag{14.19}$$

Dar:

$$(m + m')\, r = ml + m'l' \tag{14.20}$$

sau, cum $l' = 0$, urmează:

$$(m + m')\, r = ml.$$

Din (14.18), (14.19) și (14.20) rezultă:

$$J = \frac{J' T_1^2}{T^2 - T_1^2}.$$

Este suficient, așadar, să cunoaștem J' și să măsurăm perioadele T și T_1, prin observație, pentru a avea, cu o precizie convenabilă, momentul de inerție căutat.

Scanned with OKEN Scanner

176. **Maşina lui Atwood** (fără frecare), se compune dintr-un scripete de masă totală M format din două roţi solidare mobile în jurul unui ax orizontal fixat în O, de raze R şi R' (ca în fig. 58) pe care se înfăşoară cîte un fir, flexibil, dar inextensibil, fără masă, în sensuri inverse, de care sînt atîrnate la extremităţi două greutăţi m şi m'. Să punem $Am = x$, $A'm' = x'$. Tensiunile firelor să fie T şi T', iar R reacţiunea axului scripetelui. Întrucît mişcarea poate fi reprezentată cu ajutorul unui singur parametru, anume unghiul θ de rotaţie, astfel încît $\dot{\theta} = \omega$ este viteza unghiulară, putem aplica teorema energiei, spre a deduce ecuaţia de mişcare.

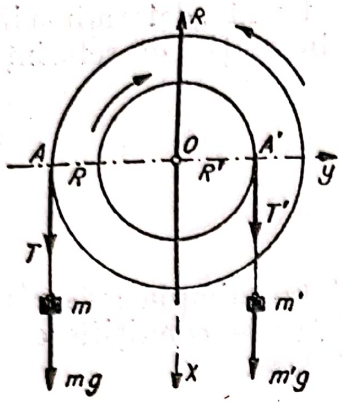

Fig. 58

Energia cinetică a scripetelui va fi $\frac{J}{2}\omega^2$, unde $J = Mk^2$. Energiile cinetice ale punctelor m şi m' sînt $\frac{m}{2}\dot{x}^2$ şi $\frac{m'}{2}\dot{x}'^2$; lucrul mecanic al forţelor exterioare (greutatea maselor m şi m') este $mg \cdot dx - m'g \cdot dx'$. Deoarece $x = R\theta$, $x' = R'\theta$, teorema energiei ne dă:

$$\dot{\omega} = g\,\frac{mR - m'R'}{Mk^2 + mR^2 + m'R'^2} = \text{const.} \qquad (14.21)$$

Aşadar, acceleraţiile $R\dot{\omega}$ şi $R'\dot{\omega}$ ale punctelor m şi m' sînt constante; mişcarea este uniform accelerată, dar mai înceată decît mişcarea liberă, ceea ce explică aplicarea maşinei la determinarea lui g prin măsurarea distanţei x cu care a căzut de exemplu corpul m, şi timpul de cădere t. Putem astfel deduce pe g.

Tensiunile ne sînt date de ecuaţiile mişcării; astfel:

$$m\ddot{x} = mg - T$$

pentru punctul m. Rezultă:

$$T = m\,(g - \ddot{x}) = m\,(g - R\dot{\omega})$$

şi la fel pentru punctul m':

$$T' = m'\,(g + R'\dot{\omega}).$$

Reacţiunea axei este dată de ecuaţia mişcării centrului de greutate, care este fix. Rezultanta tuturor forţelor aplicate axei trebuie să fie nulă. Aşadar:

$$R_e = Mg + T + T'$$

unde înlocuind pe T şi T', obţinem:

$$R_e = (M + m + m')\,g - \frac{(mR - m'R')^2}{Mk^2 + mR^2 + m'R'^2}\,g. \qquad (14.22)$$

Reacţiunea este, în general, mai mică decît cele trei greutăţi. Numai în cazul particular cînd:

$$mR = m'R'$$

reacţiunea egalează suma greutăţilor. Dar atunci, mişcarea este uniformă, căci din (14.21) rezultă în acest caz $\omega = \text{const.}$

Maşina lui A t w o o d serveşte şi la verificarea legii căderii corpurilor.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XV

MIŞCAREA UNUI RIGID, PARALELĂ CU UN PLAN FIX. MIŞCAREA PLANĂ

177. **Consideraţii generale.** Să presupunem că rigidul este supus la astfel de legături şi este acţionat de astfel de forţe încît mişcarea lui rezultantă se reduce la o mişcare paralelă cu un plan fix. Fiecare punct al rigidului se va mişca pe o traiectorie paralelă cu planul fix, aşa fel încît o secţiune plană în rigid, paralelă cu planul fix, se va conserva ca atare în tot decursul mişcării.

În particular, putem considera o secţiune plană P, paralelă cu planul fix, dusă prin centrul de greutate G al rigidului, în care să luăm un sistem de axe orientate fix în spaţiu (G,x,y). Pentru studiul mişcării va fi suficient să se urmărească *mişcarea plană* a centrului de greutate în planul P şi apoi să se studieze mişcarea de rotaţie a rigidului în jurul unei axe trecînd prin G şi perpendiculară pe planul P, axă pe care o luăm paralelă cu axa $z\,(\bar{k})$.

Problema are trei grade de libertate: două pentru poziţia lui G în planul fix (respectiv planul P) ; şi una pentru orientarea rigidului faţă de axă. Fie această coordonată dată de unghiul θ făcut de o direcţie fixă în rigid cu axa x.

178. **Ecuaţiile mişcării.** Problema mişcării se rezolvă prin următoarele ecuaţii.

1. Ecuaţia impulsului pentru centrul de greutate, dacă luăm ca origine a sistemului de coordonate x, y în planul P un punct oarecare O fix, este:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F} + \bar{R} \tag{15.1}$$

unde $\bar{F}$ este rezultanta forţelor exterioare, iar $\bar{R}$ rezultanta reacţiunilor. Avem *două* ecuaţii scalare.

2. Ecuaţia momentului cinetic în raport cu o axă perpendiculară pe P trecînd prin G:

$$J\ddot{\theta} = \bar{k}\sum_s (\bar{r}_s \times \bar{F}_s) = \bar{k}\bar{M} \tag{15.2}$$

J fiind momentul de inerţie în raport cu această axă şi $\bar{r}_s$ vectorul de poziţie al unui punct m_s al rigidului din planul P faţă de G ca pol. Avem o ecuaţie scalară care determină pe θ. Celelalte două ecuaţii de momente devin iluzorii. În total avem trei ecuaţii pentru trei grade de libertate.

179. **Condiţii dinamice pentru o mişcare plană.** Distingem următoarele condiţii.

a) Forţele exterioare şi forţele de legătură trebuie să aibă rezultantele paralele cu planul fix.

În adevăr, din condiţiile ca mişcarea să fie plană, rezultă că $r_{Gz} = 0$. După (15.1) urmează $F_z + R_z = 0$. Din această condiţie putem deduce că $\bar{F}$

și $\overline{R}$ trebuie să fie paralele cu planul fix. În adevăr, putem alege un sistem de forțe perpendiculare pe P, identic nul $[a\overline{k} + (-a\overline{k})]$ astfel încît din $F_z + R_z = 0$ să putem deduce $F_z + a = 0$; $R_z - a = 0$, considerînd aceste două mărimi drept componentele pe z ale forțelor exterioare și ale reacțiunilor.

b) Momentul cinetic, față de un punct de pe plan, este perpendicular pe planul fix.

În adevăr, din ecuația momentului cinetic:

$$\dot{\overline{K}} = \sum_s (\overline{r_s} \times \overline{F_s}) \tag{15.3}$$

proiectată pe axele $Oxyz$, rămîne numai ecuația (15.2) Așadar:

$$K_x = \text{const}; \quad K_y = \text{const}. \tag{15.4}$$

Dar, în momentul inițial, presupunînd mișcarea plană, putem alege pe $\overline{k_0}$ perpendicular pe P. Așadar $K_{x0} = 0$; $K_{y0} = 0$; atunci:

$$K_x = K_{x0} = 0; \quad K_y = K_{y0} = 0.$$

c) Orice axă $\overline{\omega}$ perpendiculară pe P prin G este în momentul inițial și rămîne pe toată durata mișcării o axă principală centrală de inerție.

Din ecuațiile mișcării, în momentul inițial, axa Gz este axă principală, centrală, de inerție; așadar, proprietatea este adevărată și pentru o axă $\overline{\omega}$ dusă prin G, perpendicular pe P (care coincide în momentul inițial cu Gz).

Rămîne de arătat că această proprietate se păstrează în tot timpul mișcării.

Pentru aceasta să luăm un sistem de coordonate $Gx'y'z'$ principal de inerție, legat de corp. În momentul inițial, Gz' coincide cu axa principală de inerție Gz.

Fie $(\overline{i'}, \overline{j'}, \overline{k'})$ versorii direcțiilor (x', y', z'). Ecuațiile [(2.15) § 17], exprimă variațiile acestor cîtimi.

Pe de altă parte, ecuațiile (15.3) devin față de (x', y', z'):

$$\frac{\partial \overline{K}}{\partial t} + \overline{\omega} \times \overline{K} = M_z \overline{k} \tag{15.5}$$

ceea ce exprimă variația momentului cinetic în timpul mișcării.

Omografia inerțială [(11.1) § 140], redusă la axele principale ale elipsoidului de inerție, determină pe $\overline{\omega}$. După teorema de existență pentru ecuațiile diferențiale, valorile integrale sînt determinate prin condițiile inițiale.

Dar, în momentul inițial:

$$\omega_z = \omega_0 \neq 0; \quad \omega_x = \omega_y = 0; \quad i' = j' = 0; \quad k' = 1.$$

Aceste condiții satisfac ecuației (15.5). Să presupunem că ele sînt adevărate nu numai în momentul inițial, ci și în tot timpul mișcării. Ecuațiile (15.5) sînt satisfăcute identic, în afară de ultima, care devine ecuația de mișcare (15.2). Această soluție ne arată că $i' = j' = 0$ tot timpul, iar Gz își conservă proprietatea de ax principal,central, de inerție.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOTECA CENTRALA REGIONALA IAȘI

180. **Observație asupra ecuațiilor de mișcare.** De multe ori este folositor să se ia, pentru exprimarea mișcării, anumite combinații între ecuațiile (15.1) și (15.2) Astfel.

a) putem folosi *teorema momentului cinetic* în raport cu o axă perpendiculară pe planul (x,y) prin punctul oarecare O.

Aplicăm *teorema lui Steiner* (§ 145);

$$\overline{K_O} = \overline{K_G} + \overline{K_{G_0}}$$

unde $\overline{K_O}$ este momentul cinetic în raport cu O, $\overline{K_G}$ momentul cinetic în raport cu G și K_{G_0} este momentul cinetic în raport cu O, al masei totale așezată în G. În cazul de față, avem:

$$K_{G_0} = \overline{k}m\left(\overline{r}_G \times \dot{\overline{r}}_G\right) \text{ și } \overline{K}_G = J\omega.$$

Ecuația momentului cinetic se scrie:

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(r_{Gx}\dot{r}_{Gy} - \dot{r}_{Gx}r_{Gy}\right) + J\omega\right] = \sum_s \left(\overline{r}_s \times \overline{F}_s\right)\overline{k} \tag{15.6}$$

$\overline{r}_s$ fiind vectorul de poziție relativ la polul O.

b) Putem aplica, mișcării absolute, *teorema lui König* asupra energiei cinetice. Energia cinetică absolută este:

$$\frac{1}{2}\left(m\dot{r}_G + J\omega^2\right)$$

iar teorema energiei ne dă:

$$d\frac{m}{2}\left(\dot{r}_G^2 + k^2\dot{\theta}^2\right) = \sum_s \overline{F}_s d\overline{r}_s. \tag{15.7}$$

Observație. Dacă există legături, în afară de cele care obligă corpul să se miște paralel cu planul fix, forțele care provin din aceste legături vor figura în membrul al doilea al ecuațiilor precedente. Totuși, dacă aceste legături sînt independente de timp (fără frecare), forțele de legături nu figurează în ecuația energiei cinetice.

181. **Mișcarea plană a unui sistem de rigide.** Dacă avem mai multe corpuri rigide, mișcîndu-se paralel cu un plan fix, vom putea aplica *fiecăruia* ecuațiile precedente și apoi vom elimina reacțiunile mutuale ale acestor corpuri. Vom putea de asemeni aplica teoremele generale *ansamblului* format din toate corpurile legate între ele, ținînd seamă de forțele de legături interne.

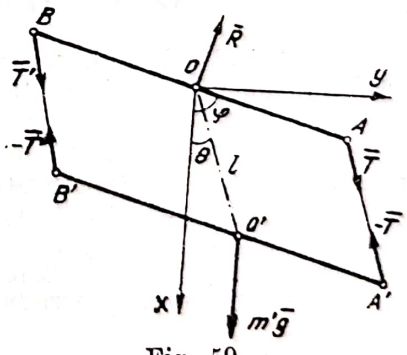

Fig. 59

Exemplu [1]). Să se studieze mișcarea unui sistem constituit din două bare omogene grele egale AB și $A'B'$, de masă m și m', legate între ele prin două fire, fără masă, de aceeași lungime l ca în fig. 59. Dreapta AB este supusă la o rotație în jurul punctului O așezat în mijlocul ei. Sistemul întreg este obligat să se miște în planul vertical. Unghiul φ cu verticala ne va da poziția barei AB; unghiul θ ne va da poziția punctului O', mijlocul barei $A'B'$ și deci centrul ei de greutate, față de

[1]) *v. P. Appell* [3]

Scanned with OKEN Scanner

verticala luată ca axă x. Asupra sistemului acționează greutățile barelor mg și $m'g$, tensiunile T și T' și reacțiunea R în punctul O.

Vom aplica, pentru determinarea mișcării, adică a celor doi parametri θ și φ, două ecuații:

a) *Ecuația energiei.* Energia cinetică a barei AB este $\frac{1}{2} mk^2\dot{\varphi}^2$. Energia cinetică a barei $A'B'$ este:

$$\frac{m'}{2} k'^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m'}{2} l^2\dot{\theta}^2.$$

Lucrul mecanic al tensiunilor este nul căci firele sînt inextensibile. Pentru $\bar{mg}$ lucrul mecanic este nul, bara AB fiind fixată în O. Pentru reacțiunea $\bar{R}$ în O lucrul mecanic este de asemenea nul; rămîne numai lucrul mecanic al forței $\bar{m'g}$, care este $-m'gl\sin\theta\cdot d\theta$.

Ecuația energiei (15.7) ne va da atunci:

$$d\frac{1}{2}\left[(mk^2 + m'k'^2)\dot{\varphi}^2 + m'l^2\dot{\theta}^2\right] = -m'gl\sin\theta\cdot d\theta$$

sau:

$$\frac{mk^2 + m'k'^2}{m'}\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + l^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -gl\sin\theta\cdot\dot{\theta}. \tag{15.8}$$

b) Să aplicăm intregului sistem *ecuația momentului cinetic* (15.6) relativă la axa orizontală trecînd prin O. Aceasta este posibil deoarece barele sînt paralele (în mișcare plană), deci ω este același pentru ambele bare.

Avînd în vedere că:

$$r_{Gx} = l\cos\theta, \quad r_{Gy} = l\sin\theta$$

și:

$$J = mk^2 + m'k'^2$$

precum și:

$$\sum_s (\bar{r}_s \times \bar{F}_s)\,\bar{k} = -m'gl\sin\theta$$

căci momentele reacțiunilor se reduc, obținem:

$$\frac{d}{dt}\left[m'l^2\dot{\theta} + (m'k'^2 + mk^2)\dot{\varphi}\right] = -m'gl\sin\theta$$

sau:

$$\frac{mk^2 + m'k'^2}{m'}\ddot{\varphi} + l^2\ddot{\theta} = -gl\sin\theta. \tag{15.9}$$

Scăzînd cele două ecuații (15.8) și (15.9) după ce am înmulțit în ecuația (15.9) cu $\dot{\theta}$, obținem:

$$(\dot{\varphi} - \dot{\theta})\ddot{\varphi} = 0. \tag{15.10}$$

ceea ce ne conduce la condiția $\ddot{\varphi} = 0$, deoarece nu e posibil ca $\dot{\varphi} - \dot{\theta}$ să fie mereu nul, căci putem alege condițiile inițiale astfel încît această diferență să fie, în momentul inițial, diferită de zero. Dar $\ddot{\varphi} = 0$ înseamnă că bara AB execută o rotație uniformă în jurul punctului fix O.

Ecuația (15.9) se reduce atunci la:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

și exprimă legea de mișcare a punctului O', centrul de greutate al barei $A'B'$. El execută mișcarea unui pendul matematic, ca și cum bara $A'B'$ n-ar exista, iar O' ar fi legat de O printr-un fir fără masă, de lungime l dată.

Scanned with OKEN Scanner

Determinarea reacţiunilor se face aplicînd numai barei AB ecuaţia (15.9); obţinem:

$$mk^2\ddot{\varphi} = \bar{k}\left[\overrightarrow{OA} \times (T - T')\,\bar{\rho}\right]$$

unde $\bar{\rho}$ este vectorul unitar pe direcţia $\overrightarrow{OO'}$.

Dar, cum $\ddot{\varphi} = 0$, rezultă:

$$T = T'$$

Pentru evaluarea valorii comune ne servim de mişcarea centrului de greutate O' al barei $A'B'$, care se deplasează ca un pendul matematic sub acţiunea greutăţii $m'g$, aşa fel încît reacţiunea firului pendulului este aici înlocuită cu legăturile celor două fire în A' $(-T)$ şi B' $(-T')$. Dar tensiunea firului la pendulul matematic este:

$$\frac{mg}{l}(2a - 3l\cos\theta);$$

aşadar, în cazul de faţă, această tensiune va fi:

$$2T = \frac{m'g}{l}(2a - 3l\cos\theta)$$

unde a este o constantă de integrare.

Ne rămîne să calculăm reacţiunea axei în O. Să aplicăm teorema centrului de greutate pentru bara AB. Cum centrul ei de greutate O este fix, urmează că rezultanta tuturor forţelor din O este nulă, adică:

$$0 = \bar{R} + 2\bar{T} + m'\bar{g}$$

aşadar:

$$-\bar{R} = 2\bar{T} + m'\bar{g}$$

deci reacţiunea face echilibru greutăţii barei şi celor două tensiuni în A şi B care provin din atîrnarea barei a doua $A'B'$ ca şi cum aceste tensiuni $\bar{T} = \bar{T}'$ au rezultanta $2\bar{T}$, dirijată după direcţia comună OO'.

Capitolul XVI

MIŞCAREA RIGIDULUI ÎN JURUL UNUI PUNCT FIX

Una dintre problemele cardinale pentru mişcarea rigidului, importantă atît prin aplicaţiile practice şi experimentale cît şi dezvoltările analitice şi geometrice la care conduce, este mişcarea, *fără frecare*, a unui rigid în jurul unui punct al său fixat în spaţiu. Mişcarea posedă *trei* grade de libertate. În alegerea axelor de referinţă a mişcării se impune folosirea punctului fix ca pol faţă de care luăm momentele cinetice şi în care luăm originea coordonatelor.

182. Axe legate de corp. Ecuaţiile lui Euler. Pentru studiul mişcării, fără frecare, a rigidului în jurul unui punct de care este fixat, este convenabil să raportăm mişcarea la un sistem de coordonate fix în spaţiu, cu ajutorul unui sistem de axe de coordonate legat de corp, avînd originea în punctul fix O. Rigidul, fiind solicitat de forţele exterioare, se va mişca suferind

Scanned with OKEN Scanner

o rotație a cărei viteză instantanee $\overline{\omega}$ este definită de mișcarea sistemului de coordonate legat de corp. În punctul O ia naștere reacțiunea $\overline{R}$ al cărei moment este nul în raport cu O. Momentul cinetic este:

$$\overline{K} = \sum_s m_s \overline{r}_s \times (\overline{\omega} \times \overline{r}_s)$$

unde $\overline{r}_s$ este vectorul de poziție față de polul O. Cum momentul reacțiunilor în raport cu O este nul, vom aplica teorema momentului cinetic față de O:

$$\dot{\overline{K}} = \sum_s \overline{r}_s \times \overline{F}_s. \tag{16.1}$$

În această ecuație, derivata se efectuează pentru variația absolută a lui $\overline{K}$ (derivata totală). Vom aplica atunci, spre a raporta mișcarea la axele (mobile) legate de corp, relația (Anexa II, § 48):

$$\dot{\overline{K}} = \frac{\partial \overline{K}}{\partial t} + \overline{\omega} \times \overline{K}$$

așa încît ecuația momentului cinetic, deci ecuația de mișcare, se scrie:

$$\frac{\partial \overline{K}}{\partial t} + \overline{\omega} \times \overline{K} = \sum_s \overline{r}_s \times \overline{F}_s. \tag{16.2}$$

Alegem ca axe legate de corp $(Ox'y'z')$, axele principale ale elipsoidului de inerție relativ la punctul O (§ 165). Atunci:

$$E_{rel} = \frac{1}{2} \overline{K}\overline{\omega} = \frac{1}{2}(A\omega_{x'}^2 + B\omega_{y'}^2 + C\omega_{z'}^2)$$

unde A, B, C, sînt momentele principale de inerție pentru elipsoidul inerțial relativ la O și sînt constante, iar $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$, $\omega_{z'}$ sînt componentele lui $\overline{\omega}$ față de aceste axe.

După un rezultat cunoscut din teoria momentelor de inerție (§ 144):

$$K_{x'} = A\omega_{x'}; \quad K_{y'} = B\omega_{y'}; \quad K_{z'} = C\omega_{z'}$$

așadar ținînd seamă de faptul că A, B, C, sînt constante, ecuația (16.2) devine (însemnînd cu $\overline{M}$ momentul din membrul al doilea):

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_{x'} + (C - B)\,\omega_{y'}\,\omega_{z'} &= M_{x'} \\ B\dot{\omega}_{y'} + (A - C)\,\omega_{z'}\,\omega_{x'} &= M_{y'} \\ C\dot{\omega}_{z'} + (B - A)\,\omega_{x'}\,\omega_{y'} &= M_{z'} \end{aligned} \tag{16.3}$$

Aceste ecuații poartă numele de *ecuațiile lui Euler*. În general, momentul $\overline{M}$ va depinde, ca și forțele $\overline{F}$, de poziție și de viteze. În acest caz, în membrul al doilea al ecuațiilor vor apărea ω_x, ω_y, ω_z și parametrii care fixează poziția solidului față de un sistem de coordonate fix, mișcarea

Scanned with OKEN Scanner

avînd trei grade de libertate. Se iau ca parametri de poziție unghiurile lui Euler θ, φ, ψ. Ei sînt legați de $\bar{\omega}$ prin relațiile cunoscute (§ 163):

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \omega_{y'} &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \omega_{z'} &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \tag{16.4}$$

Ecuațiile (16.3) și (16.4) formează un sistem de șase ecuații diferențiale de ordinul întîi, pentru cele șase necunoscute. Acest sistem poate fi redus la un sistem de trei ecuații de ordinul al doilea, numai pentru θ, φ, ψ, după integrarea căruia $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$, $\omega_{z'}$, vor fi date de (16.4).

Întregrala generală va depinde de șase constante, poziția inițială (θ_0, φ_0, ψ_0) și viteza inițială a corpului (ω_x^0, ω_y^0, ω_z^0).

183. **Reacțiunea punctului fix.** Vom aplica teorema centrului de greutate:

$$m\ddot{\bar{r}}_G = \bar{F} + \bar{R}$$

care, față de sistemul legat de corp, se transformă precum urmează. Ținînd seamă că:

$$\dot{\bar{r}}_G = \bar{\omega} \times \bar{r}_G$$

rezultă:

$$\ddot{\bar{r}} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_G + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_G).$$

Ecuația de mișcare se scrie:

$$m\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_G + m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_G) = \bar{F} + \bar{R}. \tag{16.5}$$

Observăm, că în cazul cînd corpul este fixat în centrul de greutate ($O \to G$), $\bar{r}_G = 0$. Rezultă în acest caz, din (16.5):

$$\bar{F} + \bar{R} = 0;$$

reacțiunea punctului fix va face echilibru forțelor exterioare.

184. **Axe de coordonate mobile față de corp și față de un sistem fix în spațiu.** Este uneori comod să raportăm mișcarea rigidului la un sistem de axe de coordonate cu originea în punctul fix O, dar mobile față de corp și, în general, mobile și față de un sistem fix în spațiu, în raport cu care însă mișcarea relativă a celor două sisteme este cunoscută prin vectorul de rotație $\bar{\Omega}$ (Ω_x, Ω_y, Ω_z).

Față de un astfel de sistem, elipsoidul de inerție nu va mai fi raportat la axele principale (care sînt axele legate de corp), iar momentele de inerție și deviație vor varia cu timpul.

$$\bar{K}\bar{\omega} = A\Omega_x^2 + B\Omega_y^2 + C\Omega_z^2 + 2D\Omega_y\Omega_z + 2E\Omega_z\Omega_x + 2F\Omega_x\Omega_y$$

și:

$$\begin{aligned} K_x &= A\Omega_x + F\Omega_y + E\Omega_z \\ K_y &= F\Omega_x + B\Omega_y + D\Omega_z \\ K_z &= E\Omega_x + D\Omega_y + C\Omega_z \end{aligned}$$

unde A, B, C, D, E, F nu mai sînt constante.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema momentului cinetic ne dă:

$$\frac{\partial \overline{K}}{\partial t} + \overline{\Omega} \times \overline{K} = \overline{M}. \tag{16.6}$$

185. **Cazul cînd forţele aplicate au o rezultantă trecînd prin punctul fix.** (E u l e r). Atunci $\overline{M} = 0$; rezultă faţă de sistemul fix în spaţiu $\dot{\overline{K}} = 0$; deci $\overline{K}$ este constant faţă de sistemul fix. Ecuaţiile lui E u l e r se scriu, în raport cu sistemul de coordonate legat de corp (pentru simplificarea scrisului nu mai punem accentele la x', y', z' etc.);

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C - B)\,\omega_y\omega_z &= 0 \\ B\dot{\omega}_y + (A - C)\,\omega_z\omega_x &= 0 \\ C\dot{\omega}_z + (B - A)\,\omega_x\omega_y &= 0. \end{aligned} \tag{16.7}$$

Cum lucrul mecanic al forţelor aplicate este nul, integrala energiei ne dă imediat o integrală primă, anume:

$$A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = h \tag{16.8}$$

h fiind constanta energiei. O a doua integrală primă se obţine din faptul că valoarea absolută a vectorului $\overline{K}$ este constantă. În adevăr, înmulţind în ecuaţiile (16.7) respectiv cu $A\omega_x$, $B\omega_y$, $C\omega_z$, adunînd şi intregrînd, găsim:

$$A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + C^2\omega_z^2 = K^2. \tag{16.9}$$

Aceste două constante h şi K ne sînt date de condiţiile iniţiale. Din integralele prime (16.8) şi (16.9) punînd pentru simetrie:

$$h = Ds^2 \text{ şi } K^2 = D^2s^2$$

rezultă:

$$A\,(A - D)\,\omega_x^2 + B\,(B - D)\,\omega_y^2 + C\,(C - D)\,\omega_z^2 = 0. \tag{16.10}$$

Fie $A > B > C$, ordinea de mărime a cantităţilor pozitive A, B, C. Relaţia precedentă dovedeşte că:

$$A > D > C$$

căci altfel expresia (16.10) nu s-ar putea anula.

Din proprietăţile momentelor de inerţie se verifică imediat că $A < B + C$.

186. **Studiul mişcării în cazul Euler.** Să introducem pătratul vitezei unghiulare $\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2$. Cu ajutorul constantelor pozitive (căci $B + C > A > D$ etc.):

$$l^2 = \frac{Ds^2}{BC}(B + C - D); \quad m^2 = \frac{Ds^2}{CA}(C + A - D)$$

$$n^2 = \frac{Ds^2}{AB}(A + B - D)$$

Scanned with OKEN Scanner

componentele lui ω, deduse din (16.8), (16.9), și relația care exprimă pe ω^2, se scriu:

$$\omega_x^2 = \frac{BC}{(A-B)(A-C)}(\omega^2 - l^2)$$
$$\omega_y^2 = \frac{CA}{(B-C)(B-A)}(\omega^2 - m^2) \qquad (16.11)$$
$$\omega_z^2 = \frac{AB}{(C-A)(C-B)}(\omega^2 - n^2)$$

Aceste ecuații algebrice ne dau componentele ω_x, ω_y, ω_z în funcție de ω^2. Va trebui prin urmare să deducem din ecuațiile de mișcare, o ecuație diferențială pentru ω^2. Înmulțind în ecuațiile (16.7) cu ω_x, ω_y, ω_z și adunînd, obținem:

$$\omega_x\dot{\omega}_x + \omega_y\dot{\omega}_y + \omega_z\dot{\omega}_z = \left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right)\omega_x\omega_y\omega_z$$

sau:

$$\omega\frac{d\omega}{dt} = -\frac{(B-C)(C-A)(A-B)}{ABC}\omega_x\omega_y\omega_z,$$

sau încă, după (16.11):

$$\frac{1}{2}\frac{d\omega^2}{dt} = \pm\sqrt{(\omega^2 - l^2)(m^2 - \omega^2)(\omega^2 - n^2)}. \qquad (16.12)$$

Mărimea ω^2 este deci, după ecuația (16.12), o funcție uniformă de t. Ea se exprimă cu ajutorul funcției $\mathfrak{P}(t)$ a lui Weierstrass; ceea ce arată că posedă o perioadă reală. Valoarea lui ω^2 oscilează între m^2 ca limită superioară și cea mai mică dintre l^2 și n^2, ca limită inferioară. Pentru mișcarea rigidului, numai perioada reală păstrează un sens fizic imediat. P. Appell propune o interpretare fizică și pentru perioada imaginară [1]).

Din (16.11) rezultă că și ω_x, ω_y, ω_z sînt periodice.

187. **Unghiurile lui Euler.** Aceste unghiuri se obțin ca funcții eliptice jacobiane de o funcție liniară de timp, din relațiile (16.4) care se simplifică prin faptul că vectorul $\overline{K}$ este constant în spațiu. În acest caz, luăm ca axă z a sistemului fix, însăși direcția fixă a lui $\overline{K}$. După relațiile lui Euler, cosinusurile directoare ale axei z (fixă) față de sistemul legat de corp (mobil) sînt:

$$\sin\theta\sin\varphi;\ \sin\theta\cos\varphi;\ \cos\theta$$

iar valoarea absolută a lui $\overline{K}$ este $K = Ds$; așadar, proiecțiile lui $\overline{K}$ pe axele legate de corp vor fi:

$$A\omega_x = Ds\cdot\sin\theta\sin\varphi$$
$$B\omega_y = Ds\cdot\sin\theta\cos\varphi \qquad (16.13)$$
$$C\omega_z = Ds\cdot\cos\theta.$$

Aceste relații ne dau unghiurile θ și φ.

[1]) *P. Appell*, (*Bull. Soc. math. France* t. 26, 1898.)

Scanned with OKEN Scanner

Apoi, din relaţiile (16.4) rezultă că:

$$\dot{\psi} \sin \theta = \omega_x \sin \varphi + \omega_y \cos \varphi$$

ceea ce ne dă ψ prin ecuaţia diferenţială [ţinînd seamă de (16.13)]:

$$\dot{\psi} = Ds \frac{A\omega_x^2 + B\omega_y^2}{A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2}. \tag{16.14}$$

Axul momentan de rotaţie $\overline{\omega}$ îşi reia poziţia în raport cu rigidul, după o perioadă. El nu-şi reia însă poziţia în spaţiu. În adevăr, după (16.13) θ şi φ îşi reiau valorile în spaţiu, dar după (16.14) ψ nu este o funcţie periodică. Pentru fixarea ideilor, fie $l^2 < n^2$; rezultă că $n^2 \leqslant \omega^2 \leqslant m^2$, iar perioada [dedusă din (16.12] va fi:

$$T = \int_{n^2}^{m^2} \frac{d\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - l^2)(m^2 - \omega^2)(\omega^2 - n^2)}}. \tag{16.15}$$

Din ecuaţia (16.13) rezultă că $\dot{\psi}$ îşi reia valoarea după perioada T, deci că $\dot{\psi}(t+T) = \dot{\psi}(t)$; ceea ce dă prin integrare:

$$\psi(t+T) = \psi(t) + \psi_0$$

unde:

$$\psi_0 = Ds \int_0^T \frac{A\omega_x^2 + B\omega_y^2}{A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2} dt \neq 0$$

integrandul fiind pozitiv.

188. **Concretizarea geometrică a mişcării** (Poinsot). Să construim elipsoidul de inerţie relativ la punctul O şi să-l raportăm la axele lui principale, legate de rigid (fig. 60). Putem să ne imaginăm rigidul reprezentat prin acest elipsoid. Într-un moment dat, axul momentan de rotaţie $\overline{\omega}$ întîlneşte suprafaţa elipsoidului în punctul M, numit *pol*. Reamintim următoarele proprietăţi pe care le-am stabilit la teoria momentelor de inerţie (§ 140...152). Elipsoidul de inerţie este construit astfel încît toate punctele suprafeţei sale sînt date de vectorul de poziţie:

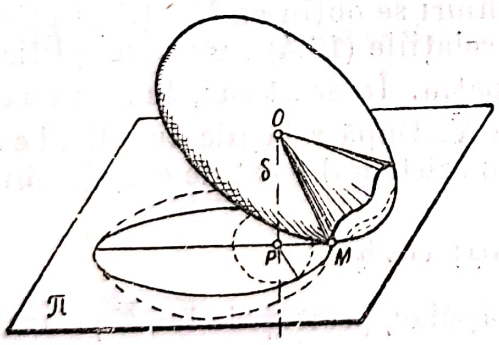

Fig. 60

$$\overline{r} = \frac{1}{\sqrt{2E_c}} \overline{\omega}.$$

Cum am găsit $2E_c = h = Ds^2$, din integrala primă a energiei rezultă:

$$\overline{r} = \frac{1}{s\sqrt{D}} \overline{\omega}. \tag{16.16}$$

Scanned with OKEN Scanner

În fiecare moment, planul tangent al elipsoidului de inerție în pol este perpendicular pe momentul $\overline{K}$, de direcție fixă în spațiu, proprietate pe care am dedus-o din relația $\overline{K}d\overline{r} = 0$. Așadar, planul tangent în pol la elipsoid păstrează o direcție fixă în spațiu. Ecuația planului tangent în pol (r_x, r_y, r_z) la elipsoidul:

$$Ar_x^2 + Br_y^2 + Cr_z^2 = 1$$

este:

$$Ar_x x + Br_y y + Cr_z z = 1.$$

Condiția de perpendicularitate devine:

$$A\omega_x x + B\omega_y y + C\omega_z z - s\sqrt{D} = 0.$$

Distanța δ a punctului O (centrul elipsoidului) la planul tangent elipsoidului în pol, este:

$$\delta = \frac{s\sqrt{D}}{\sqrt{A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + C^2\omega_z^2}} = \frac{s\sqrt{D}}{K}$$

unde $K = Ds$, după (16.9).

Așadar, distanța de la centrul O la planul tangent în pol va fi:

$$\delta = \frac{\sqrt{Ds^2}}{\sqrt{D^2 s^2}} = \frac{1}{\sqrt{D}} \tag{16.17}$$

prin urmare constantă. Din această relație rezultă că planul tangent în fiecare punct la elipsoidul de inerție relativ la punctul O păstrează o direcție invariabilă și rămîne mereu la distanță fixă de O.

El este deci fix în spațiu. Elipsoidul de inerție se rostogolește pe acest plan Π rămînînd mereu tangent în punctul în care axa momentană de rotație al rigidului îl înțeapă. Poziția acestui plan fix este dată de condițiile inițiale. Din (16.17) rezultă semnificația geometrică a constantei $D = 1/\delta^2$, care ne spune că distanța δ de la O la planul fix tangent, $\overline{OP}$, trebuie să fie cuprinsă între semiaxa mare $1/\sqrt{C}$ și semiaxa mică $1/\sqrt{A}$ a elipsoidului cu centrul în O. Așadar, $A > D > C$; relație pe care am obținut-o și pe cale analitică.

189. **Reprezentarea mișcării.** Elipsoidul de inerție rămînînd mereu tangent planului fix, în punctul unde axul momentan de rotație îi înțeapă suprafața, punctul material al corpului, care coincide cu poziția momentană a polului M, are, în momentul considerat, o viteză nulă. Deci *elipsoidul nu alunecă* pe planul fix. Mișcarea lui este o *rostogolire* și o *pivotare*. Viteza unghiulară va fi $\overline{\omega} = \overrightarrow{OM} \cdot s\sqrt{D}$ după (16.16). Poinsot numește curba rostogolitoare descrisă de pol pe suprafața elipsoidului, *polodie*; iar curba bază descrisă de pol pe planul fix, *herpolodie*. În felul acesta putem exprima mișcarea cu ajutorul conului proiectant al polodiei, cu vîrful în O, care se rostogolește peste herpolodia de pe planul fix P, astfel încît arcele corespunzătoare să fie egale.

Scanned with OKEN Scanner

190. **Ecuația herpolodiei.** Distanța piciorului P al perpendicularei din punctul fix O pe planul fix Π, la punctul de contact al elipsoidului (deci al conului polodic) cu planul Π, este

$$\rho = \overline{PM} = \sqrt{\overline{OM}^2 - \delta^2} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{D}} \tag{16.18}$$

și, cum $\overline{OM}$ are o valoare care variază între semiaxa mare și semiaxa mică, iar D este constant, rezultă că $\overline{PM}$ va avea o valoare finită, care va varia între valoarea corespunzătoare maximului și minimului lui $\bar{r}$. Herpolodia este așadar o curbă închisă, cuprinsă într-o coroană circulară cu centrul în P.

Relația (16.18) se scrie, ținînd seamă de (16.16):

$$\rho^2 = \frac{\omega^2 - s^2}{Ds^2}$$

de unde rezultă $\omega^2 = Ds^2\rho^2 + s^2$. Înlocuind această valoare în ecuația (16. 12) obținem:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\rho^2 = \pm s\sqrt{D}\sqrt{(\rho^2 - a)(b - \rho^2)(\rho^2 - c)} \tag{16.19}$$

unde:

$$a = -\frac{1}{BCD}(B - D)(C - D); \quad b = -\frac{1}{CAD}(C - D)(A - D);$$

$$c = -\frac{1}{ABD}(A - D)(B - D).$$

Am presupus că $A > B > C$. Rezultă:

1. $A > B > D > C$; $c < 0 < a < b$
2. $A > D > B > C$; $a < 0 < c < b$.

Deci b este totdeauna pozitiv. Așadar, vectorul de poziție al punctului M de pe herpolodie, raportat la piciorul P al perpendicularei din punctul fix O pe planul fix Π, ca pol, este mărginit între un maxim corespunzător valorii lui $\sqrt{b}$, (b fiind oricînd pozitiv) și între cea mai mică dintre valorile lui $\sqrt{c}$ sau $\sqrt{a}$, ca minim.

Ecuația (16.19) ne dă valoarea absolută a vectorului de poziție $\bar{\rho}$ al herpolodiei. Putem calcula și unghiul polar χ. Pentru aceasta să calculăm momentul vitezei punctului $M(\bar{r})$ relativ la direcția fixă a vectorului $\overline{K}$, perpendicular pe Π (momentul cinetic). Viteza punctului M este, după (16.16):

$$\dot{\bar{r}} = \frac{\dot{\bar{\omega}}}{s\sqrt{D}}.$$

Momentul căutat va fi dat de expresia:

$$\frac{\overline{K}}{K}\left(\frac{\bar{\omega}}{s\sqrt{D}} \times \frac{\dot{\bar{\omega}}}{s\sqrt{D}}\right) = \frac{1}{s^2DK}\begin{vmatrix} K_x & K_y & K_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \dot{\omega}_x & \dot{\omega}_y & \dot{\omega}_z \end{vmatrix} = \frac{1}{s^3D^2}\begin{vmatrix} A\omega_x & B\omega_y & C\omega_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \dot{\omega}_x & \dot{\omega}_y & \dot{\omega}_z \end{vmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

căci $K^2 = D^2 s^2$. Dar, cum viteza absolută a punctului M este egală cu viteza relativă, rezultă că momentul precedent este dublul vitezei areolare a punctului M în planul fix perpendicular pe $\overline{K}$. Urmează:

$$\rho^2\dot{\chi} = \frac{1}{D^2 s^3}\begin{vmatrix} A\omega_x & B\omega_y & C\omega_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \frac{B-C}{A}\omega_y\omega_z & \frac{C-A}{B}\omega_z\omega_x & \frac{A-B}{C}\omega_x\omega_y \end{vmatrix}$$

unde am ținut seamă de ecuațiile lui Euler (16.7). Dezvoltînd determinantul după ultima linie putem scrie ecuația diferențială pentru χ, anume:

$$\rho^2\dot{\chi} = \frac{1}{D^2 s^3}\left[\frac{(B-C)^2}{A}\omega_y^2\omega_z^2 + \frac{(C-A)^2}{B}\omega_z^2\omega_x^2 + \frac{(A-B)^2}{C}\omega_x^2\omega_y^2\right]$$

de unde, prin înlocuirea lui ω_x^2, ω_y^2 și ω_z^2 din (16.11) și ținînd seamă că $\omega^2 = s^2 + Ds^2\rho^2$, obținem, punînd:

$$\Delta = \frac{(A-D)(B-D)(C-D)}{ABCD}$$

ecuația:

$$\rho^2\dot{\chi} = s(\rho^2 + \Delta). \tag{16.20}$$

Eliminînd timpul, prin diviziunea ecuației (16.20) cu ecuația (16.19) căpătăm ecuația diferențială a herpolodiei:

$$\sqrt{D}\cdot d\chi = \pm\frac{(\rho^2+\Delta)\,d\rho}{\rho\sqrt{(\rho^2-a)(b-\rho^2)(\rho^2-c)}}. \tag{16.21}$$

Să observăm că între constantele care apar în această ecuație există relațiile:

$$a+\Delta = D\frac{a}{A};\quad b+\Delta = D\frac{b}{B};\quad c+\Delta = D\frac{c}{C}.$$

Expresia din membrul al doilea al relației (16.20) satisface relației:

$$a+\Delta \text{ sau } c+\Delta < \rho^2+\Delta < b+\Delta$$

după cum a sau $c > 0$. Aceasta dovedește că χ este mereu crescător cu timpul. Herpolodia înconjură P mergînd în același sens, ρ variind între două limite, care determină două cercuri ce închid o coroană circulară în care e plasată herpolodia. Unghiul α al vectorului de poziție cu tangenta în M la herpolodie este dat de:

$$\operatorname{tg}\alpha = \rho\frac{d\chi}{d\rho}$$

expresie, care pentru $\rho^2 = b$ și $\rho^2 = a$ sau c devine infinită. Urmează că herpolodia este tangentă la cercurile coroanei.

Curba nu are puncte de inflexie (cum credea Poinsot) ci prezintă mereu concavitatea spre P. În adevăr, curbura, în coordonate polare, are valoarea:

$$\left[1+\rho^2\left(\frac{d\chi}{d\rho}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\left[2\frac{d\chi}{d\rho}+\rho\left(\frac{d^2\chi}{d\rho^2}\right)+\rho^2\left(\frac{d\chi}{d\rho}\right)^3\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Or, cum $\rho \frac{d\chi}{d\rho}$ nu se anulează niciodată, rezultă că expresia:

$$\Phi = \frac{2}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\ln \frac{d\chi}{d\rho}\right) + \left(\frac{d\chi}{d\rho}\right)^2$$

va da semnul curburei. Înlocuind pe $d\chi/d\rho$ din ecuația (16.21) obținem:

$$\Phi = \frac{2}{\rho^2 + \Delta} + \frac{A(B + C - A)}{(A - B)(A - C)}\frac{1}{\rho^2 - a} + \frac{B(C + B - A)}{(B - C)(B - A)}\frac{1}{\rho^2 - b} + \\ + \frac{C(A + B - C)}{(C - A)(C - B)}\frac{1}{\rho^2 - c}.$$

Dacă efectuăm calculele și considerăm pe $\Phi = \Phi(\rho^2)$ ca funcție de ρ^2, observăm că $\Phi = 0$ are două rădăcini reale în ρ^2, dintre care una este nulă; rădăcinile reale nefiind cuprinse nici una în intervalele permise (c,b), (a, b) pentru ρ. Aceasta înseamnă că Φ nu se anulează și că rămîne mereu pozitiv în domeniul în care poate varia ρ. Așadar, curba are mereu concavitatea întoarsă spre P.

În cazul particular $D = B$; $a = c = 0$, iar:

$$b = \frac{(A - B)(B - C)}{ABC}$$

ecuația herpolodiei devine:

$$\sqrt{B} \cdot d\chi = \pm \frac{d\rho}{\rho\sqrt{b - \rho^2}}$$

de unde rezultă:

$$\sqrt{b}\,\frac{1}{\rho} = \operatorname{ch}\left[\sqrt{Bb}\,(\chi - \chi_0)\right]$$

care este ecuația unei *spirale* cu punctul asimptotic P.

191. **Ecuația polodiei.** Raportînd mișcarea la sistemul de coordonate legat de rigid și anume, axele elipsoidului de inerție, polodia este locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ de pe elipsoidul

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \tag{16.22}$$

care sînt așezate pe planul tangent:

$$Ar_x x + Br_y y + Cr_z z = 1$$

dus la distanța $\delta = 1/\sqrt{D}$ de origine. Condiția ca planul precedent să fie la distanța δ de origine este:

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = D. \tag{16.23}$$

Ecuațiile (16.22) și (16,23) reprezintă polodia raportată la axele principale ale elipsoidului de inerție relativ la O. Polodia apare ca o curbă algebrică de ordinul al patrulea. Este mai convenabil să definim polodia ca fiind curba de intersecție a elipsoidului (16.22) cu conul polodic (locul axelor instantanee în corp), care se obține scăzînd ecuația (16.22) înmulțită cu D, din ecuația (16.23):

$$A(A - D)x^2 + B(B - D)y^2 + C(C - D)z^2 = 0. \tag{16.24}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca acest con să fie real, este necesar ca $A>D>C$, ceea ce reprezintă condiția găsită pentru ca distanța planului tangent $\delta=1/\sqrt{D}$ la origine să fie inferioară axei mari $1/\sqrt{C}$ și superioară axei mici $1/\sqrt{A}$. Acest con are aceleași axe de simetrie ca și elipsoidul, așa încît curba de intersecție a conului cu elipsoidul va admite ca plane de simetrie aceleași plane ca și elipsoidul de inerție. Întrucît axul momentan taie conul în două puncte, curba de intersecție a conului cu elipsoidul are două ramuri închise, simetrice. Una dintre aceste ramuri este polodia.

Să deosebim mai multe cazuri, după condițiile inițiale posibile (fig. 61).

a) $D=A$. Conul (16.24) se reduce la axa Ox ($y=0$, $z=0$). Curba de intersecție se reduce la două puncte a și a'. Fie a modulul lui $\frac{1}{\sqrt{A}}\bar{i}$, punct la care se reduce, în acest caz, polodia. Solidul va executa o rotație uniformă directă, în jurul axei pozitive Ox $(\bar{i})$, cea mai scurtă a elipsoidului, cu viteza unghiulară:

$$\omega = r\sqrt{2E_c} = rs\sqrt{D} = \frac{1}{\sqrt{A}}s\sqrt{A} = s.$$

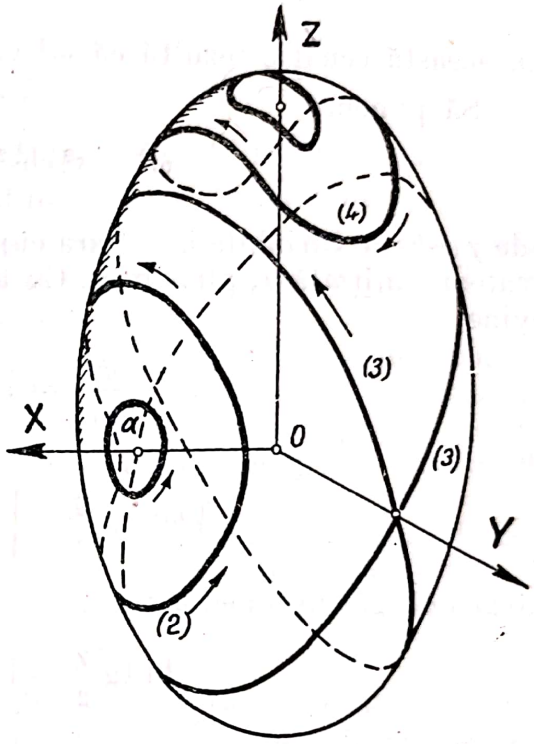

Fig. 61

Așadar, axa momentană de rotație, coincizînd cu axa principală a elipsoidului de inerție Ox, este fixă în elipsoid. Ea va fi fixă și în spațiu. În adevăr, în acest caz $\bar{r}=\frac{\bar{\omega}}{s\sqrt{D}}$; iar dacă $\bar{r}$ este direcția unei axe principale de simetrie, $\bar{K}=\lambda\bar{r}$; așadar $\bar{r}$ are aceeași direcție și sens ca și $\bar{K}$; același lucru se va întîmpla și cu $\bar{\omega}$. Prin urmare $\bar{\omega}$ va fi fix în spațiu ca și $\bar{K}$.

b) $A>D>B>C$. Fie, pentru a fixa ideile, în momentul inițial $t=0$, $\omega_x>0$. Polodia va fi o curbă (2) care înconjoară extremitatea axei pozitive Ox, căci secțiunea conului polodic cu $x=$ const ne dă o elipsă cu Ox ca ax de simetrie. Din ecuația lui Euler (16.7):

$$B\dot{\omega}_y + (A-C)\,\omega_z\omega_x = 0$$

se deduce că ω_y descrește cînd $\omega_z>0$, și crește cînd $\omega_z<0$ (căci $\omega_x>0$). Polul descrie curba (2), care înconjoară extremitatea axei pozitive Ox, în sensul săgeții de pe figură. Mărimea curbei (2) va fi dată de poziția relativă a constantei D față de A și B.

c) $D=B$; conul polodic se reduce la două plane:

$$\sqrt{A(A-B)}\,x \pm \sqrt{C(B-C)}\,z = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

care se intersectează după axa mijlocie Oy a elipsoidului. Aceste două plane taie elipsoidul după două elipse. În acest caz, expresiile ce dau pe ω^2 și componentele ei, se simplifică. În adevăr:

$$l^2 = n^2 = s^2 \quad \text{și} \quad m^2 = \frac{Bs^2}{AC}(A + C - B)$$

iar ecuația lui ω^2 este:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\omega^2 = \pm(\omega^2 - s^2)\sqrt{m^2 - \omega^2}.$$

Din această ecuație rezultă că ω^2 variază între s^2 și m^2.

Să punem:

$$\omega^2 = s^2\cos^2\chi + m^2\sin^2\chi,$$

unde χ este o variabilă auxiliară cuprinsă între zero și π, dar variind dela o valoare inițială χ_0 pînă la π. Cu această substituție, ecuația ce dă pe ω devine:

$$\frac{d\chi}{\sin\chi} = \sqrt{m^2 - s^2}\cdot dt$$

unde:

$$\sqrt{m^2 - s^2} = \sqrt{\frac{(A - B)(B - C)}{AC}}.$$

Întegrînd, găsim imediat:

$$\ln \operatorname{tg}\frac{\chi}{2} = \sqrt{m^2 - s^2}(t + \tau)$$

unde:

$$\tau = \ln\frac{\chi_0}{2}.$$

Vom avea atunci:

$$\frac{\chi}{2} = e^{k(t+\tau)} \;;\; \omega^2 = m^2 - (m^2 - s^2)\operatorname{th}^2 k(t+\tau).$$

Apoi, din ecuațiile (16.11) obținem:

$$\omega_x^2 = s^2\frac{B(B - C)}{A(A - C)\operatorname{ch}^2 k(t+\tau)}, \quad \omega_y^2 = s^2\operatorname{th}^2 k(t+\tau);$$

$$\omega_z^2 = s^2\frac{B(A - B)}{C(A - C)\operatorname{ch}^2 k(t+\tau)}.$$

Alegem, prin condițiile inițiale, axele x și z îndreptate astfel încît, în momentul inițial, ω_x^0 și ω_z^0 să fie pozitive. Atunci, extrăgînd rădăcina pătrată din expresiile precedente ale lui ω_x și ω_z, luăm semnul plus în fața radicalilor.

Scanned with OKEN Scanner

Cînd $t \to +\infty$, ω_x și ω_z descresc, tinzînd la zero. Din ecuația lui Euler (16.7) rezultă că ω_y devine negativ și tinde către $-s$, așa încît trebuie să scriem:

$$\omega_y = -s \operatorname{th} k(t+\tau).$$

Polul se găsește pe curba (3) pe care o descrie în sensul săgeții de pe figură.

Unghiurile lui Euler ne sînt date de formulele (16.13). Pentru $t = +\infty$ avem:

$$\sin\theta \sin\varphi = 0; \quad \sin\theta \cos\varphi = -1 \text{ și } \cos\theta = 0.$$

În acest caz, axul de rotație:

$$\overline{\omega} = \sqrt{Ds}\,\overline{r}$$

tinde către componenta $-\omega_y \overline{j}'$ în rigid. După relațiile lui Euler (§ 162) rezultă că în spațiu $-\overline{j}'$ cade peste $\overline{k}$; atunci $\overline{\omega}$ tinde către direcția $\overline{k}$, deci către direcția fixă a vectorului $\overline{K}$. Cum herpolodia este în acest caz o spirală cu punct asimptotic în P, se vede că solidul se rotește, tinzînd să aibă ca axă de rotație $\overline{K}$ trecînd prin punctul asimptotic, pentru $t = +\infty$.

d) $B > D > C$. Conul polodic intersectează elipsoidul după două curbe care sînt așezate simetric față de axa Oz. Polul descrie curba (4) în sensul direct față de Oz, dacă alegem condițiile inițiale astfel încît pentru $t = 0$, $\omega_z > 0$, căci atunci ω_z rămîne pozitiv în tot timpul mișcării, ca și în cazul (b).

e) $D = C$. Polodia se reduce la un punct unde axa cea mai lungă Oz înțeapă elipsoidul. Mișcarea se reduce la o rotație uniformă de viteză unghiulară ω_z, în sensul direct, în jurul axei Oz în solid și $\overline{K}$ în spațiu, prezentînd aceeași simetrie ca și în cazul (a).

192. **Stabilitatea rotației.** Dacă rigidul se rotește în jurul unei axe oarecare, el nu va păstra această axă de rotație, căci ea descrie în corp un con în jurul unei axe principale. Dacă, într-un moment dat, corpul începe a se roti în jurul uneia din axele principale de inerție, această mișcare durează neîncetat; ceea ce de altfel era de prevăzut în conformitate cu o teoremă generală stabilită mai dinainte (§ 170).

Trebuie însă făcută o distincție între cele trei axe principale de inerție, considerate ca eventuale axe de rotație, în ceea ce privește stabilitatea rotației.

În adevăr, să admitem că solidul începe a se roti în jurul axei Ox; să-l perturbăm foarte puțin din această mișcare. Polul M se va deplasa foarte puțin și va rămîne pe polodia corespunzătoare din vecinătatea acestui punct, polodie, care va fi o curbă foarte mică în jurul axei Ox. În adevăr, vectorul de poziție $\overline{r}$ va diferi în valoare absolută foarte puțin de $\frac{1}{\sqrt{A}}$ și prin urmare D va diferi foarte puțin de A; de unde rezultă că $\delta = \frac{1}{\sqrt{D}}$ va diferi și el foarte puțin de r. Axa momentană de rotație, care în solid rămîne vecină lui Ox, în spațiu va rămîne vecină lui Oz ($\overline{k}$). Această rotație este deci *stabilă*. Același lucru se poate spune și despre axa Oz din corp.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă însă rigidul este animat de o rotaţie în jurul axei mijlocii de inerţie Oy, legată deci de corp, şi deplasăm infinit de puţin solidul din mişcarea lui, atunci polul va începe a se mişca în regiunea curbelor (3). Deci, în acest caz rotaţia este *nestabilă*.

193. **Cazul particular cînd elipsoidul de inerţie este de rotaţie.** Se disting două posibilităţi:

a) Axa de rotaţie să fie axa mare Oz din solid. În acest caz $A = B$. Atunci $B > D > C$; ceea ce înseamnă că ne aflăm în cazul cînd polodia este ramura ce înconjoară axa Oz.

Ecuaţiile lui E u l e r vor fi:

$$\begin{aligned} A\,\dot{\omega}_x &= (A - C)\,\omega_y\,\omega_z \\ A\,\dot{\omega}_y &= (C - A)\,\omega_z\,\omega_x \\ \dot{\omega}_z &= 0 \end{aligned} \tag{16.25}$$

ceea ce ne dă integralele:

$$\omega_z = \omega_0\,, \quad \omega_x^2 + \omega_y^2 = k^2$$

sau, introducînd constantele D şi s prin relaţiile:

$$\begin{aligned} &Ak^2 + C\omega_0^2 = Ds^2 \text{ (teorema energiei)} \\ &A^2k^2 + C^2\omega_0^2 = D^2s^2, \text{ (căci } K^2 = D^2s^2) \end{aligned} \tag{16.26}$$

de unde:

$$k^2 = \frac{D\,(D - C)}{A\,(A - C)}\,s^2\,; \quad \omega_0^2 = \frac{D\,(A - D)}{C\,(A - C)}\,s^2 \tag{16.27}$$

rezultă:

$$\omega^2 = k^2 + \omega_0^2 = \frac{D\,(A + C - D)}{A - C}\cdot s^2$$

ceea ce ne dă viteza unghiulară a rotaţiei momentane, constantă.

Din relaţiile ce ne dau unghiurile lui E u l e r , deducem:

$$Ds\cos\theta = C\omega_0.$$

Presupunînd $\omega_0 > 0$, unghiul va fi $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Atunci, $\sin\theta = \frac{Ak}{Ds}$ unde $k > 0$. De asemenea obţinem $\omega_x = k\sin\varphi$ şi $\omega_y = k\cos\varphi$. Înlocuind în ecuaţiile lui E u l e r , rezultă:

$$\dot{\varphi} = \left(1 - \frac{C}{A}\right)\omega_0$$

deci:

$$\varphi = \left(1 - \frac{C}{A}\right)\omega_0\,t + \varphi_0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Apoi, din:

$$\dot{\psi} = Ds \frac{A\omega_x^2 + B\omega_y^2}{A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2}$$

rezultă:

$$\dot{\psi} = \frac{D}{A} s, \quad \text{deci} \quad \psi = \frac{Ds}{A} t + \psi_0$$

prin urmare ψ și φ cresc liniar cu timpul.

Axa momentană de rotație descrie *în solid* un con de revoluție în jurul axei Oz legată de solid; unghiul α, făcut de axa momentană (generatoarea conului) cu axa Oz din solid, este dat de relația $\omega \cos \alpha = \omega_0$,

deci: $$\omega \sin \alpha = k.$$

Unghiul β făcut de axa momentană de rotație cu axul fix Oz $(\overline{K})$ din spațiu, este dat de relația:

$$\cos \beta = \frac{\overline{\omega}\,\overline{K}}{\omega K} = \frac{Ds^2}{\omega Ds} = \frac{s}{\omega}$$

sau:

$$\sin \beta = \frac{\overline{PM}}{r} = \sqrt{1 - \frac{1}{Dr^2}} = \sqrt{1 - \frac{s^2}{\omega^2}}. \qquad (16.28)$$

Putem verifica relația $\beta = \theta - \alpha$ precum urmează:

$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{C\omega_0}{Ds} \cdot \frac{\omega_1}{\omega} + \frac{Ak}{Ds} \cdot \frac{k}{\omega} = \frac{Ds^2}{Ds\omega} = \cos \beta$$

iar:

$$\sin(\theta - \alpha) = \frac{Ak}{Ds} \cdot \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{C\omega_0}{Ds} \cdot \frac{k}{\omega}$$

de unde, după relațiile (16.27):

$$\sin(\theta - \alpha) = \frac{s}{\omega} \sqrt{\frac{(D - C)(A - D)}{A - C}}$$

sau, după (16.28):

$$\sin(\theta - \alpha) = \sqrt{1 - \frac{s^2}{\omega^2}} = \sin \beta.$$

În cazul de față, conul polodic, de rotație în jurul axei z fixă în solid, se va rostogoli pe conul herpolodic de rotație în jurul axei $\overline{K}$, fixă în spațiu, conul herpolodic fiind el însuși fix în spațiu. Din relația $\theta = \alpha + \beta$ rezultă că conul polodic îi este exterior.

b) Să presupunem că axa de rotație a elipsoidului de inerție este axa mică. Putem inversa rolurile axelor, notînd cu Oz pe cea mai scurtă în

Scanned with OKEN Scanner

elipsoid, adică $A < D < C$, pentru ca raționamentul precedent să rămînă neschimbat. Singura deosebire este că acum $\dot{\varphi}$ este negativ, iar:

$$\sin(\alpha - \theta) = \sin\beta \quad \text{și deci} \quad \alpha - \theta = \beta.$$

Conul polodic este tangent conului herpolodic de-a lungul generatoarei comune, rămînînd însă interior acestuia din urmă, căci $\theta = \alpha - \beta$.

Capitolul XVII

MIȘCAREA RIGIDULUI „GREU" ÎN JURUL UNUI PUNCT FIX

194. **Integrale prime.** Problema se deosebește, în general, de problema precedentă întrucît forțele exterioare se reduc la forța de greutate care are o rezultantă trecînd prin centrul de greutate al corpului. Numai în cazul cînd rezultanta forțelor exterioare (greutatea) trece prin punctul fix, problema este identică cu problema precedent rezolvată (cazul Euler-Poinsot).

Luăm un sistem de axe fix în spațiu $Oxyz$, cu axa Oz verticală, și ca sistem legat de solid, axele principale de inerție relative la O, sistemul $Ox'y'z'$.

Pentru cazul general, cînd centrul de greutate are o poziție oarecare față de punctul fix, în corp, s-au putut găsi numai *două* integrale prime; anume:

a) *Integrala energiei.* Singura forță care acționează solidul fiind greutatea $m\bar{g}$ (m = masa totală a solidului), integrala energiei dă ($\bar{r}_G$ fiind vectorul de poziție al centrului de greutate):

$$d\frac{1}{2}\left(A\omega_{x'}^2 + B\omega_{y'}^2 + C\omega_{z'}^2\right) = -mg\bar{k}\,d\bar{r}_G$$

sau:

$$A\omega_{x'}^2 + B\omega_{y'}^2 + C\omega_{z'}^2 + 2mgr_{Gz} = h. \tag{17.1}$$

b) Forțele exterioare care solicită solidul fiind greutatea și reacțiunea punctului fix, cum prima este paralelă cu $\bar{k}$ (Oz în spațiu), iar a doua este concurentă cu $\bar{k}$ (Oz), urmează că momentul rezultant în raport cu $\bar{k}$, al forțelor exterioare, este nul. Atunci se aplică *teorema ariilor* mișcării proiectate pe un plan perpendicular pe $\bar{k}$, luat ca plan (x, y). Momentul cinetic $\bar{K}$ are, pe axele legate de solid, proiecțiile $A\omega_{x'}$, $B\omega_{y'}$, $C\omega_{z'}$; atunci proiecția lui $\bar{K}$ pe $\bar{k}$, va fi constantă. Introducînd unghiurile lui Euler, această proprietate se scrie:

$$A\omega_{x'}\sin\theta\sin\varphi + B\omega_{y'}\sin\theta\cos\varphi + C\omega_{z'}\cos\theta = \text{const.} \tag{17.2}$$

În afară de aceste două integrale prime nu se mai cunosc altele pentru cazul general cînd rigidul are o formă arbitrară, cînd centrul de greutate este așezat arbitrar și cînd condițiile inițiale sînt oarecari.

Scanned with OKEN Scanner

195. **Cazuri particulare.** Dacă se fac însă ipoteze speciale asupra *formei* rigidului și asupra *poziției centrului de greutate în corp*, se poate obține o a treia integrală primă. Putem distinge, în afara cazului E u l e r-P o i n s o t, cînd centrul de greutate se găsește chiar în punctul fix (caz rezolvat în problema precedentă), următoarele două cazuri:

a) *Cazul L a g r a n g e și P o i s s o n.* Elipsoidul de inerție relativ la punctul fix O este de rotație, iar centrul de greutate se află pe axul de rotație.

b) *Cazul S o f i a K o w a l e v s k i.* Elipsoidul de inerție relativ la punctul fix este de rotație (în jurul lui Oz' de pildă), iar centrul de greutate se află pe ecuator $r_{Gz'} = 0$, avînd loc în același timp relația suplimentară:

$$A = B = 2C.$$

Vom trata mai pe larg cazul a).

196. **Cazul Lagrange și Poisson.** Ca axă de rotație să luăm axa Oz' $(\bar{k}')$ în solid. Centrul de greutate G se găsește pe această axă avînd coordonata $r_G > 0$, luînd ca sens pozitiv al axei chiar sensul $\overrightarrow{OG}$. În acest caz, $A = B$.

Să transcriem, în aceste condiții, integralele prime cunoscute (17.1) și (17.2).

Teorema energiei (17.1) devine, ținînd seamă de $(\bar{k}' \cdot \bar{k}) = \cos\theta$,

$$A\left(\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2\right) + C\omega_{z'}^2 + 2mg \cdot r_G \cos\theta = h_1. \tag{17.3}$$

Teorema ariilor pe planul (x, y) se scrie:

$$A\left(\omega_{x'} \sin\theta \sin\varphi + \omega_{y'} \sin\theta \cos\varphi\right) + C\omega_{z'} \cos\theta = k_1. \tag{17.4}$$

În sfîrșit, din ecuația lui E u l e r:

$$C\dot{\omega}_{z'} + (B - A)\,\omega_{x'}\,\omega_{y'} = M_{z'}$$

cum, $M_{z'} = 0$ și $A = B$, rezultă:

$$\omega_{z'} = 0, \quad \text{deci} \quad \omega_{z'} = \omega_0 \text{ (constant)}. \tag{17.5}$$

Înlocuind în ecuațiile (17.3), (17.4) și (17.5) cîtimile $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$, $\omega_{z'}$ cu ajutorul unghiurilor lui E u l e r din relațiile de la § 184, se obțin următoarele ecuații diferențiale:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta &= h - \frac{2mgr_G}{A}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin^2\theta &= k - \frac{C}{A}\omega_0 \cdot \cos\theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta &= \omega_0, \end{aligned} \tag{17.6}$$

unde am pus

$$h = \frac{h_1 - C\omega_0^2}{A}; \quad k = \frac{k_1}{A}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Punînd $u = \cos\theta$, și eliminînd pe $\dot{\psi}$ între primele două ecuații (17.6) obținem ecuația diferențială pentru θ, sub forma:

$$\dot{u}^2 = \left(h - \frac{2mgr_G}{A}u\right)(1-u^2) - \left(k - \frac{C\omega_3}{A}u\right)^2 = f(u) \qquad (17.7)$$

care dă pe $u(t)$ ca funcție uniformă de t (eliptică). Discuția acestei ecuații este analogă cu discuția făcută asupra ecuației care apărea în problema pendulului. Observăm mai întîi că ecuațiile a doua și a treia din sistemul (17.6) ne dau:

$$\dot{\psi} = \frac{k - \frac{C}{A}\omega_3 u}{1-u^2} \quad \text{și} \quad \dot{\varphi} = \omega_0 - u\,\frac{k - \frac{C}{A}\omega_3 u}{1-u^2}. \qquad (17.8)$$

Deoarece $u = \cos\theta$, $-1 \leqslant u \leqslant +1$; iar pe de altă parte, cum $f(u) = \dot{u}^2$, trebuie să considerăm numai valori ale lui u care fac $f(u) \geqslant 0$.

Fie u_0 valoarea inițială a lui u; ea este cuprinsă între -1 și $+1$ și satisface condiției $f(u_0) \geqslant 0$.

Vom presupune:

$$k \neq \pm\frac{C\omega_0}{A}.$$

Cum $f(-1) < 0$, $f(u_0) > 0$, $f(+1) < 0$, $f(+\infty) > 0$, între $(-1, u)$, $(u_0, +1)$ și $(+1, +\infty)$ există trei rădăcini reale, u_1, u_2 și u_3 ale ecuației $f(u) = 0$. Putem scrie:

$$f(u) = \frac{2mgr_G}{A}(u - u_1)(u_2 - u)(u_3 - u). \qquad (17.9)$$

Tabloul următor rezumă succesiunea semnului lui $f(u)$.

u	$-\infty$		-1		rădăcină u_1		(v. inițială) rădăcină u_0		rădăcină u_2	$+1$			rădăcină u_3		$+\infty$
$\dot{u}^2 = f(u)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
θ					θ_1		$>$		θ_2						

După cum reiese din acest tablou, pentru ca $f(u)$ să fie pozitiv, trebuie ca u să varieze numai între u_1 și u_2, pornind dela valoarea inițială u_0; atunci, unghiul θ va varia între $\theta_1 > \theta_2$, valori ce corespund lui $\cos\theta_1 = u_1$ și $\cos\theta_2 = u_2$. Pentru

$$\dot{u} = \pm\sqrt{f(u)},$$

vom lua semnul $(+)$ sau $(-)$ după cum u crește sau descrește.

O imagine a mișcării se obține dacă trasăm pe o sferă de rază egală cu unitatea avînd centrul în O, curba descrisă de punctul P unde semiaxa pozitivă Oz' $(\overline{k}')$ legată de solid, întîlnește sfera. Pentru aceasta, limităm regiunea în care poate varia P ducînd conurile C_1 și C_2 cu vîrful comun O, avînd ca axă comună axa fixă Oz și ca unghiuri la vîrf pe θ_1 și θ_2.

Scanned with OKEN Scanner

Axa Oz', legată de rigid, va executa o mișcare de oscilație în jurul punctului fix O, adică în jurul axei fixe în spațiu Oz, astfel încît punctul P, unde ea înțeapă sfera de rază unu, va descrie curba cuprinsă între cei doi paraleli C_1 și C_2 după care conurile extreme, de unghiuri la vîrf θ_1 și θ_2, taie sfera. Putem determina punctul P prin coordonatele sale sferice, anume $P\left(\widehat{zOz'} = \theta;\ \chi = \psi + \frac{\pi}{2}\right)$.

χ este unghiul diedru format de planul zOP cu planul fix zOx, căci linia nodurilor OI este perpendiculară pe planul zOz', deci pe zOP și face unghiul ψ cu axa fixă Ox; așadar, unghiul diedru χ al planului zOz' cu planul zOx este măsurat pe ecuator de arcul Qx, astfel încît $\hat{QI} = \frac{\pi}{2}$.

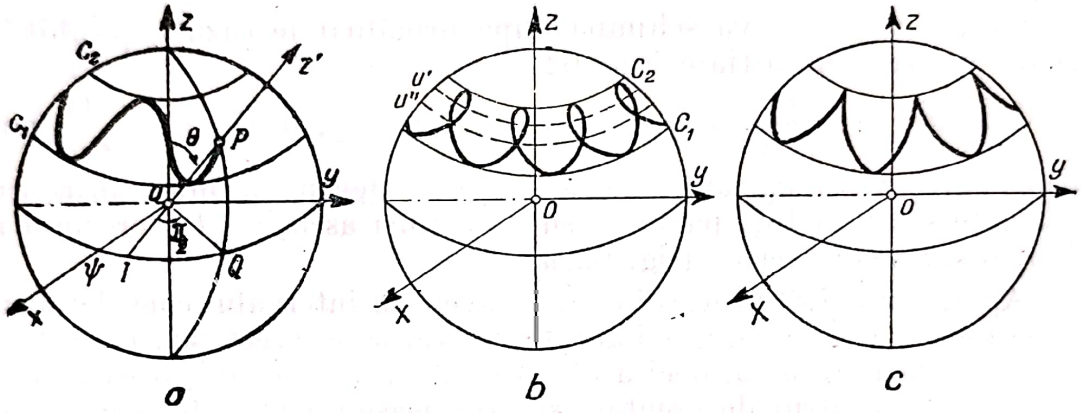

Fig. 62

Ecuația diferențială a curbei pe sferă se obține eliminînd timpul între ecuația (17.7), ce ne dă pe θ și ecuația (17.8), care dă pe $\dot{\psi} = \dot{\chi}$.

Prin diviziune, se obține ecuația diferențială a curbei căutate, anume:

$$\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{d\chi} = \pm \frac{\sqrt{f(u)}}{k - \frac{C}{A}\omega_3 u}. \tag{17.10}$$

După semnificația lui $u = \cos\theta$, putem scrie imediat:

$$\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{d\chi} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{d\theta}{d\chi}. \tag{17.11}$$

Apoi, dacă însemnăm cu α unghiul făcut de tangenta la curba considerată, cu tangenta la paralelul punctului de contact, se vede imediat că:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d\theta}{d\chi}. \tag{17.12}$$

În adevăr, să luăm pe paralelul prin P un punct imediat vecin P_0, corespunzător unghiului $\widehat{P_0zP} = d\chi$, și fie P_1 punctul unde meridianul zP_0 taie curba; atunci $\widehat{P_1OP} = d\theta$; iar triunghiul P_1P_0P ne dă:

$$\text{arc } P_0P = \sin\theta\, d\chi = \frac{\text{arc } P_1P}{\operatorname{tg}(P_0P_1, P_1P)} = \frac{d\theta}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Rezultă aşadar, din (17.10) şi (17.11):

$$\operatorname{tg}\alpha = \mp \frac{\sqrt{f(u)}}{k - \frac{C}{A}\omega_0 u} \tag{17.13}$$

Această relaţie ne arată că $\operatorname{tg}\alpha$ se anulează pentru cele două rădăcini $u = u_1$ şi $u = u_2$ ale lui $f(u) = 0$. Curba este tangentă la paralelii C_1 şi C_2 daţi de:

$$u = u_1 \ (\theta = \theta_1) \text{ şi } u = u_2 \ (\theta = \theta_2).$$

Această mişcare oscilantă între cei doi paraleli limită, a punctului P, adică a extremităţii libere a axei Oz' legată de solid, corespund *mişcării de nutaţie* a axei Oz'.

Forma curbei se va schimba după următoarele cazuri, posibile, prin varierea condiţiilor iniţiale (fig. 62).

a) Dacă $k - \frac{C\omega_0}{A} u \neq 0$, cînd $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$, deci, $u' = \frac{Ak}{C\omega_0}$ nu este cuprins între u_1 şi u_2, atunci $\operatorname{tg}\alpha$ nu poate deveni infinită; prin urmare, curba intersectează toţi paralelii sub unghiuri ascuţite. Ea prezintă forma (17.1): o *sinusoidă* sferică (fig. 62, *a*).

Apoi, din (17.8) urmează că $\dot{\psi}$ va avea, în intervalul considerat, mereu acelaşi semn; deci unghiul azimutal ψ va varia, în acest caz, în acelaş sens. Această variaţie a lui ψ, deci a planului zOz', produce mişcarea de *precesie*. Cînd $\omega_0 > 0$, centrul de greutate se află deasupra planului (xy), mişcarea se efectuează în sensul pozitiv. Cînd $\omega_0 < 0$, centrul de greutate este sub planul (x,y) şi mişcarea are sensul negativ.

b) Dacă însă, $u' = \frac{Ak}{C\omega_0}$ este cuprins în intervalul (u_1, u_2), dar este diferit de u_1 şi u_2, curba ajunge normală la paralelul $u = u'$ $(\theta = \theta')$, bine înţeles atîta vreme cît aceeaşi valoare $u = u'$ nu anulează şi numărătorul expresiei (17.13), deci cînd $u' \neq u_1$. Unghiul azimutal ψ va varia într-un sens de la u_1 la u' şi în sens contrar de la u' la u_2. În acest caz curba formează în vecinătatea fiecărui punct de contact cu cercul limită inferior, bucle cu puncte duble (noduri) situate pe un paralel $u = u'$ (fig. 62, *b*).

În ambele cazuri mai există şi alte puncte duble, distribuite peste tot dens în zona (C_1C_2). Este de remarcat însă că punctele duble nu sînt cuspidale, pentru că aceasta are loc numai cînd $\operatorname{tg}\alpha$ este nederminată.

c) Rămîne să mai tratăm cazul cînd expresia $k - \frac{C\omega_0}{A} u$ se anulează pentru una din valorile u_1 sau u_2. Să arătăm mai întîi că valoarea cea mică u_1 este exclusă. În adevăr, din relaţia:

$$k - \frac{C\omega_0}{A} u_1 = 0$$

rezultă, după expresia (17.7) a lui $f(u)$, că:

$$f(u_1) = 0 = \left(h - \frac{2mgr_G}{A} u_1\right)(1 - u_1^2)$$

aşadar:

$$h = \frac{2mgr_G}{A} u_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar atunci, după (17.7) avem:

$$f'(u_1) = -\frac{2mgr_G}{A}(1 - u_1^2) < 0. \tag{17.14}$$

Pe de altă parte, după (17.9) trebuie să avem, în același timp:

$$f'(u_1) = \frac{2mgr_G}{A}(u_2 - u_1)(u_3 - u_1) > 0. \tag{17.15}$$

Relațiile (17.14) și (17.15) se exclud reciproc deoarece $u_1^2 < 1$. Rămîne așadar numai posibilitatea ca expresia $k - \frac{C\omega_3}{A}u$ să fie nulă pentru cercul superior. Curba atinge, în acest caz, normal cercul superior în puncte cuspidale.

În adevăr, pentru $u = u_2$, dacă $u_2 = \frac{kA}{C\omega_0}$, (prin condițiile inițiale posibile) expresia lui tg α prezintă forma nedeterminată $\frac{0}{0}$.

Pentru ridicarea nedeterminării formăm expresia:

$$\frac{f'(u)}{2\sqrt{f(u)}} : \left(-\frac{C\omega_0}{A}\right)$$

care, pentru $u = u^2$, cum $f'(u^2)$ este diferită de zero, devine infinită. Curba atinge deci normal cercul superior C_2. Mai mult, aceste puncte sînt puncte de întoarcere (fig. 62, *c*; *cicloidală*). În adevăr:

$$\dot{\psi} = \frac{k - \frac{C\omega_0}{A}u}{1 - u^2} \geqslant 0$$

căci $u \leqslant u_2 < 1$ și $k = \frac{C\omega_0}{A}u_2$. Prin urmare ψ crește mereu.

d) Cînd $k = \pm\frac{C\omega_0}{A}$, $u_1 = -1$ sau $u_2 = +1$, unul din paralelii limită se reduce la un punct. Presupunem că $u_2 = +1$. Cercul superior se reduce la punctul z'. Acest caz are loc atunci cînd în momentul inițial Oz' se confundă cu verticala ascendentă.

197. **Cazul de integrabilitate Sofia Kowalevski.** Fie $Ox'y'z'$, sistemul de coordonate solidar cu corpul, centrul de greutate G găsindu-se pe axa x, astfel încît $OG = r$ (constant). Corpul rigid, *greu*, fiind astfel construit încît între momentele de inerție să existe relația:

$$A = B = 2C. \tag{17.16}$$

a) În aceste condiții, *integrala energiei* (17.1), ținînd seamă de relațiile (16.4), § 182, se scrie:

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}\sin^2\theta + \frac{1}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 - \frac{mgr}{C}\sin\theta\cos\varphi = h \text{ (const)}.$$

b) În mod analog, ecuația *momentului cinetic* (17.2), ia forma:

$$2\dot{\psi}\sin^2\theta + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta = k \text{ (const)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Pentru a găsi o a treia integrală S. K o w a l e v s k i consideră prima și a doua din ecuațiile lui E u l e r (§ 185 formula 16.7), în care se fac substituțiile date de relațiile (13.9), § 163. Obținem:

$$2\ddot{\psi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\theta + 3\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\varphi\cos\theta +$$

$$+ 2\ddot{\theta}\cos\varphi - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}^2\cos\theta\sin\theta\cos\varphi = \frac{mgr}{C}\cos\theta,$$

$$2\ddot{\psi}\cos\varphi\sin\theta - \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta + 3\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta - 2\ddot{\theta}\sin\varphi - \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\varphi +$$

$$+ \dot{\psi}^2\cos\theta\sin\theta\sin\varphi = 0.$$

Înmulțind prima ecuație cu $\cos\varphi$, iar a doua cu $\sin\varphi$ și scăzîndu-le, se obține:

$$2\ddot{\theta} = \dot{\psi}\sin\theta\,(\dot{\psi}\cos\theta - \dot{\varphi}) + \frac{mgr}{C}\cos\theta\cos\varphi.$$

Înmulțind prima ecuație cu $\sin\varphi$, iar a doua cu $\cos\varphi$ și adunîndu-le, se capătă:

$$2\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\sin\theta) = (\dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta)\,\dot{\theta} + \frac{mgr}{C}\cos\theta\sin\varphi.$$

Înmulțim acum penultima ecuație cu $i = \sqrt{-1}$, și o adunăm cu ultima; obținem:

$$2\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\sin\theta + i\dot{\theta}) = i(\dot{\psi}\cos\theta - \dot{\varphi})(\dot{\psi}\sin\theta + i\dot{\theta}) + i\frac{mgr}{C}\cos\theta\,e^{-i\varphi}$$

ceea ce se mai poate scrie:

$$\frac{d}{dt}\left[(\dot{\psi}\sin\theta + i\dot{\theta})^2 + \frac{mgr}{C}\sin\theta\,e^{-i\varphi}\right] =$$

$$= i(\dot{\psi}\cos\theta - \dot{\varphi})\left[(\dot{\psi}\sin\theta + i\dot{\theta})^2 + \frac{mgr}{C}\sin\theta\,e^{-i\varphi}\right].$$

Facem notația:

$$f_1 = (\dot{\psi}\sin\theta + i\dot{\theta})^2 + \frac{mgr}{C}\sin\theta\,e^{-i\varphi}.$$

Ultima ecuație ia forma:

$$\frac{1}{f_1}\frac{df_1}{dt} = i(\dot{\psi}\cos\theta - \dot{\varphi}).$$

Făcînd aceeași operație prin înmulțirea cu $-i$ și notînd:

$$f_2 = (\dot{\psi}\sin\theta - i\dot{\theta})^2 + \frac{mgr}{C}\sin\theta\,e^{i\varphi}$$

putem scrie:

$$\frac{1}{f_2}\frac{df_2}{dt} = -i(\dot{\psi}\cos\theta - \dot{\varphi}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ultimile două relații diferențiale deducem:

$$\frac{1}{f_1}\frac{df_1}{dt} + \frac{1}{f_2}\frac{df_2}{dt} = 0$$

sau:

$$f_1 f_2 = \text{const.}$$

care constituie o integrală nouă a problemei. Înlocuind pe f_1 și f_2 prin expresiile lor, obținem:

$$\left[(\dot{\psi}\sin\theta + i\dot{\theta})^2 + \frac{mgr}{C}\sin\theta\, e^{-i\varphi}\right] \times \left[(\dot{\psi}\sin\theta - i\dot{\theta})^2 + \frac{mgr}{C}\sin\theta\, e^{i\varphi}\right] = \text{const}$$

sau:

$$(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta)^2 + \left(\frac{mgr}{C}\right)^2\sin^2\theta +$$

$$+ \frac{mgr}{C}\sin\theta\left\{e^{i\varphi}(\dot{\psi}\sin\theta + i\dot{\theta})^2 + e^{-i\varphi}(\dot{\psi}\sin\theta - i\dot{\theta})^2\right\} = \text{const}$$

care constituie a treia integrală algebrică, dată de S o f i a K o w a l e v s k i. Integrarea se face prin funcții hipereliptice. În memoriul original S. K o w a l e v s k i completează integrarea prin dezvoltări în serii [1]).

Alte cazuri de integrabilitate se pot obține numai prin particularizarea condițiilor inițiale. Citățm mai jos cîteva exemple.

198. Cazuri particulare de integrabilitate

a) *Cazul Hess*[2]). Se presupune că:

1. Cele trei momente principale de inerție în raport cu punctul fix nu sînt egale între ele.

2. Centrul de masă al solidului se află pe perpendiculara dusă din punctul fix pe una din secțiunile circulare ale elipsoidului de inerție.

3. Momentul cinetic inițial al rigidului se află în planul secțiunii circulare de mai sus.

b) *Cazul Bobîlev-Steklov*[3]).

Se admite că între momentele principale de inerție relative la punctul fix, există relația $J_{\eta\eta} = 2J_{\xi\xi}$ și că centrul de greutate se găsește pe axa η, adică $\xi_0 = \xi_c = 0$.

Ambele cazuri se găsesc pe larg tratate în *G.K. Suslov*, „Mecanica rațională", II, p. 238, Editura Tehnică, 1950. Diverse cazuri remarcabile se găsesc tratate în:

c) *A. Signorini*, „Mecanica razionale"; Zanichelli, 1947.

d) *G. Grioli*, „Precessioni regolari di un solido pesante asimetrico", Rend. Ac. Naz. d. Lincei, p. 420, 1948.

---

[1]) *Sofia Kowalevski.* Acta Mathematica, v. XII., 1888.

[2]) Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines Körpers um einen festen Punk" (Math. Ann. B, vol. d. 37).

[3]) *D. Bobîlev*, „Despre o soluție particulară a ecuațiilor diferențiale de rotație a unui solid rigid greu în jurul unui punct fix" vol. VII, Operele științifice fizice, 1896; *D. Steklov*, „Un caz de mișcare a solidului rigid greu, avînd un punct fix" (idem).

Scanned with OKEN Scanner

e) *A. Signorini* și *J. Hadamard*, C.R. Ac. Sc. Paris, 226, p. 1504, 1948.

f) *I. Manacorda*, „Sul moto di un solido asimetrico attorno ad un punto fisso", R.Ac. Naz. d. Lincei, p. 711, 1949.

199. **Giroscopul fixat într-un punct.** Giroscopul este un rigid care are o axă de simetrie. Să presupunem că acest corp se mișcă în jurul unui punct fix al axei sale; de pildă, fiind obligat să se sprijine pe o mică sferă în atingere cu o suprafață foarte aspră care nu-i permite să alunece pe ea, centrul de greutate al giroscopului fiind deasupra suprafeței de sprijin. Drept condiții inițiale să presupunem că fixăm, pentru un moment, un al doilea punct O' al axei sale (care să fie Oz' în solid). Așa fixată, îi aplicăm o rotație inițială ω_0, foarte mare, în jurul axei Oz'. Giroscopul execută mișcarea unui rigid în jurul unei axe fixe. Lăsăm apoi punctul O' liber. Prin aceasta, condițiile inițiale se exprimă în forma:

$$\dot{\psi}_0 = 0;\ \dot{\theta}_0 = 0, 0 < \theta_0 < \pi \text{ și } \omega^0_{x'} = \omega^0_{y'} = 0;\ \dot{\varphi}_0 = \omega_0 \gg 1. \qquad (17.17)$$

Atîta vreme cît țineam fix și punctul O', giroscopul se rotea cu viteza unghiulară ω_0 în jurul axului principal Oz'; presiunile asupra punctului O și asupra punctului O' (ținut, de exemplu, între degete), vor fi aceleași ca și cum giroscopul ar fi în repaus (teorema demonstrată la § 190).

Din relațiile (17.6), scriind drept valori inițiale $\dot{\psi} = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$, rezultă, după (17.16):

$$h = \frac{2mgr_G}{A} u_0 \text{ și } k = \frac{C}{A} \omega_0 u_0 \qquad (17.18)$$

constantele h și k sînt astfel determinate prin condițiile inițiale. Ecuația (17.7) ne arată că $f(u_0) = 0$, sub condițiile (17.17). Așadar, valoarea inițială u_0 este una din rădăcinile u_1 sau u_2 ale ecuației $f(u) = 0$. A doua relație (17.17) arată că acum ne găsim în cazul c), § 196, unde am stabilit că $u_0 = u_2$ (rădăcina cea mai mare). Curba descrisă de punctul P pe sfera de rază unu are puncte de întoarcere pe paralelul superior C_2.

Ecuația (17.7) devine, înlocuind pe h și k din (17.17):

$$\dot{u}^2 = (u_2 - u)\left[\frac{2gmr_G}{A}(1 - u^2) - \frac{C^2}{A^2}\omega_0^2(u_2 - u)\right] \qquad (17.19)$$

factorul al doilea din membrul al doilea trebuie să se anuleze pentru o valoarea $u = u_1 < u_2$.

De aici deducem:

$$\frac{2Agmr_G}{C^2\omega_0^2} = \frac{u_2 - u_1}{1 - u_1^2}$$

ceea ce înseamnă că diferența $u_2 - u_1$ este cu atît mai mică, cu cît cantitatea $\frac{C^2\omega_0^2}{2mgr_G A}$ este mai mare, deci, cu cît este mai mare viteza inițială și cu cît centrul de greutate este mai aproape de punctul fix. Pentru:

$$\frac{\omega_0^2}{r_G} \gg \frac{2mgA}{C^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

cei doi paraleli extremi între cari poate varia extremitatea axei Oz' din solid, pe sfera de rază unu, tind să se confunde; *nutația* devine extrem de mică în amplitudine, dar foarte iute. În adevăr, în acest caz putem simplifica (17.18), punînd $u = u_2 - u'$ unde u' este foarte mic: $u' \ll 1$.

Atunci (17.18) devine ($u_2 \to u_0$):

$$\dot{u}'^2 = \frac{h\left(1-u_0^2\right)}{u_0} \cdot \left[1 - \frac{k^2}{hu_0\left(1-u_0^2\right)} u'\right] u'$$

ecuație care se integrează[1]) printr-o cuadratură simplă și ne dă:

$$u' = \frac{hu_0\left(1-u_0^2\right)}{k^2} \cdot \sin^2\left(\frac{C\omega_0}{2A} t\right)$$

ceea ce exprimă că u' oscilează în jurul valorii u_0 periodic, avînd însă perioada proporțională cu $\frac{1}{\omega_0}$, deci foarte mică. Prin urmare, trepidațiile mișcării de nutație se efectuează foarte repede, amplitudinea lor fiind, precum se vede din expresia lui u', foarte mică $\left(\text{proporțională cu } \frac{r_G}{\omega_0}\right)$.

Pe de altă parte, linia nodurilor efectuează mișcarea de precesie cu viteza [a doua ecuație (17.6)]:

$$0 < \dot{\psi} = \frac{C\omega_0}{A} \cdot \frac{u_2 - u}{1-u^2} < \frac{C\omega_0}{A} \cdot \frac{u_2 - u_1}{1-u_1^2} = \frac{2gmr_G}{C\omega_0}$$

deci foarte mică. Așadar, dacă dăm o rotație inițială foarte mare giroscopului în jurul axei Oz' și apoi îl lăsăm să oscileze liber în jurul punctului fix O, giroscopul își va continua mișcarea în jurul axei inițiale, care va efectua la rîndul ei o rotație foarte înceată în jurul lui Oz (amîndouă mișcările efectuîndu-se în același sens).

200. **Giroscopul adormit.** Presupunem $u_0 = 1$, deci $\theta_0 = 0$. Ne aflăm în cazul d) § 196. Axa giroscopului este verticală în momentul inițial, centrul de greutate fiind deasupra vîrfului de sprijin O. În acest caz, formulele (17.17), valabile și pentru $\theta_0 = 0$, ne dau:

$$h = \frac{2mgr_G}{A}; \quad k = \frac{C}{A}\omega_0; \quad u_0 = u_2 = 1.$$

Ecuația (17.18) devine:

$$\dot{u}^2 = (1-u)^2\,[h\,(1+u) - k^2]. \tag{17.20}$$

Teorema de unicitate ne asigură că singura integrală a ecuației diferențiale precedente, care verifică condițiile inițiale $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$, $u_0 = 1$, $\dot{u}_0 = 0$, este $u = 1$.

În aceste condiții, axa giroscopului fiind în momentul inițial verticală, va rămîne mereu verticală. În adevăr, mărimea u fiind un cosinus

[1]) Se face substituția $\frac{k^2}{hu_0\left(1-u_0^2\right)} u' = \sin^2 z$.

și pornind de la valoarea 1 trebuie să descrească sau să rămînă constantă. Dar atunci $\dot{u}$ trebuie să fie negativ. Deci, timpul necesar pentru ca u să ia o valoare diferită de 1 este, după (17.19):

$$t = -\int_1^u \frac{du}{(1-u)\sqrt{h(1+u)-k^2}} \tag{17.21}$$

Integrala din membrul al doilea fiind infinită, din cauză că posedă pe $1-u$ la numitor, rezultă că u va rămîne mereu egal cu 1; deci, axa giroscopului rămîne mereu verticală: giroscopul „doarme"!

Să analizăm condițiile de stabilitate a mișcării. În acest scop să aplicăm giroscopului, în momentul inițial, o înclinare foarte mică față de verticală (deci θ_0 foarte puțin diferit de zero, iar u_0 foarte puțin diferit de 1). Dacă u rămîne mereu în vecinătatea valorii 1, mișcarea este *stabilă*; în caz contrar, nestabilă.

Mișcarea verifică ecuația (17.18) care, în acest caz, se scrie:

$$\dot{u}^2 = (u_2 - u)\,[h\,(1-u^2) - k^2\,(u_2 - u)],$$

$u_0 = u_2$ avînd o valoare foarte apropiată de 1 (și mai mică).

Să punem $u_2 = 1 - \varepsilon$ și $u = 1 - u'$, unde ε și u' au același ordin de mărime, fiind cîtimi foarte mici. Avem:

$$\dot{u}^2 = (u' - \varepsilon)\,[h\,u'^2\,(2-u') - k^2\,(u' - \varepsilon)].$$

Păstrînd numai termenii de ordin cel mult pătratici în ε, u' și $\dot{u}'$, rezultă:

$$\dot{u}'^2 = (2h - k^2)\,u'^2 + 2\,(k^2 - h)\,\varepsilon u' - k^2\varepsilon^2.$$

Prin derivare, deducem ecuația diferențială:

$$\ddot{u}' + (k^2 - 2h)\,u' = (k^2 - h)\,\varepsilon. \tag{17.22}$$

Se pot distinge două cazuri:

a) $k^2 < 2h$; ecuația diferențială (17.22) reprezintă o mișcare aperiodică. Amplitudinea mișcării va crește mereu cu timpul; mișcarea este nestabilă.

b) $k^2 > 2h$; ecuația diferențială (17.22) reprezintă o mișcare periodică de amplitudine foarte mică în jurul poziției inițiale; mișcarea este stabilă.

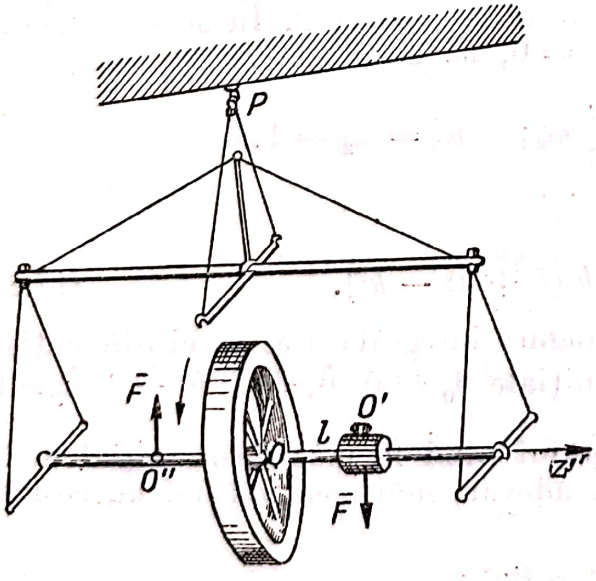

Fig. 63

201. **Efecte giroscopice.** Să considerăm un solid de rotație în jurul unui ax Oz' trecînd prin punctul fix O, sub forma unei roți omogene suspendată în O printr-o suspensie Cardan (fig. 63). Simetria dispozitivului ne dă $A = B \neq C$. Să raportăm mișcarea la sistemul de axe $O(x', y', z')$ legat de corp, axa z' (vector unitar $\overline{k'}$) coincidînd cu axul de ro-

tație al corpului. Admitem de la început ipoteza că aplicăm roții o rotație inițială foarte mare ω_0 în jurul axului Oz', ținut fix în momentul inițial; apoi lăsăm roata să efectueze mișcarea în jurul axului liber ($\omega_x^0=0$, $\omega_y^0=0$).

Vom face uz de ecuațiile lui E u l e r [§ 182, form. (16.3)], care, din cauza simetriei corpului, se scriu (pentru simplificarea scrisului nu se mai pun accentele pe x', y', z'):

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C-A)\,\omega_y\omega_z &= M_x \\ A\dot{\omega}_y + (A-C)\,\omega_z\omega_x &= M_y \\ C\dot{\omega}_z &= M_z \end{aligned} \qquad (17.23)$$

unde $\overline{M}$ este momentul forțelor exterioare în raport cu punctul O.

Vom considera în cele ce urmează două cazuri de mișcare: a) roata nu este solicitată de nici o forță exterioară în afară de greutate; corpul fiind suspendat în centrul de greutate; b) corpul este solicitat de o forță normală pe axul Oz, într-un punct Q' de pe acest ax. În ambele cazuri $M_z=0$, iar sistemul (17.23) devine:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C-A)\,\omega_0\omega_y &= M_x \\ A\dot{\omega}_y - (C-A)\,\omega_0\omega_x &= M_y \\ \omega_z &= \omega_0 \gg 1. \end{aligned} \qquad (17.24)$$

a) În sistemul (17.24) $M_x=0$ și $M_y=0$, căci greutatea trecînd prin centrul de greutate în care este suspendat corpul, $\overline{M}=0$.

Înmulțind atunci prima ecuație cu ω_x și a doua cu ω_y și adunînd, obținem integrînd:

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega_x^{02} + \omega_y^{02} = 0 \qquad (17.25)$$

conform condițiilor inițiale; rezultă $\omega_x=0$, $\omega_y=0$ pentru tot timpul mișcării (membrul întîi fiind o sumă de pătrate).

Așadar, în acest caz rigidul își va continua mișcarea inițială de rotație în jurul axului său Oz', care este o axă spontană de rotație.

Relația (17.25) transcrisă în funcție de unghiurile lui E u l e r (§ 162) ne dă:

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin\theta = 0,$$

ceea ce înseamnă $\theta=\theta_0$ (const), $\psi=\psi_0$ (const). Dar atunci $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0=\omega_0 \gg 1$. Aceste condiții exprimă faptul că axa de rotație Oz' rămîne, în tot timpul mișcării, fixă în spațiu, roata efectuînd o rotație uniformă, foarte repede, în jurul acestei axe devenită axă spontană de rotație. (În adevăr, cosinusurile directoare ale lui Oz' față de sistemul de coordonate fix în spațiu sînt date de $\sin\theta\sin\psi$, $-\sin\theta\cos\psi$, $\cos\theta$; deci constante).

b) Să aplicăm în O', astfel încît $OO'=l$ (constant), o forță $\overline{F}$ perpendiculară pe axa Oz'. Momentul acestei forțe, în raport cu O, va avea componentele:

$$lF_y\,; \quad lF_x\,; \quad 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

În sistemul (17.24) cîtimile ω_x, ω_y și derivatele lor nu vor mai fi nule ca în cazul precedent; totuși, prin comparație cu viteza inițială ω_0, derivatele lor pot fi neglijate. În aceste condiții, sistemul (17.24) devine:

$$(A - C)\,\omega_0\,\omega_y = l F_y \;;\; (A - C)\,\omega_0\,\omega_x = l F_x. \tag{17.26}$$

Poziția punctului O' este dată de $\bar{r} = l\bar{k}$, față de O. Fie:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

viteza punctului O' datorită mișcării ce-i este imprimată de forța $\bar{F}$. Vom avea:

$$\bar{v} = (\omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_0 \bar{k}) \times l\,\bar{k}.$$

Dar, ținînd seamă de relațiile (17.26):

$$\bar{v} = (F_x \bar{i} + F_y \bar{j}) \times \bar{k}\,\frac{l^2}{(A - C)\,\omega_0}$$

sau:

$$\bar{v} = \frac{l^2 F}{(C - A)\,\omega_0}\left(\overrightarrow{Oz'} \times \frac{\bar{F}}{F}\right). \tag{17.27}$$

Așadar, punctul O', după aplicarea forței exterioare $\bar{F}$ perpendiculară pe axul Oz', în loc să se miște în direcția forței, cum ar fi de așteptat, capătă o viteză (17.27) care-i imprimă o mișcare perpendiculară pe planul făcut de axul $\overrightarrow{Oz'}$ și de forța $\bar{F}$, în sensul pozitiv al produsului vectorial (17.27). Acest efect este cu atît mai mare cu cît viteza inițială unghiulară de rotație în jurul axului, ω_0, este mai mică. Dimpotrivă, reacțiunea asupra mîinii, dacă ținem fixat cu mîna axul Oz', va fi dată de forța $\bar{F}$, care după (17.27), este cu atît mai puternică, cu cît viteza unghiulară este mai mare.

Dacă roata ar fi, inițial, în repaus și i s-ar aplica numai forța $\bar{F}$ în O' asupra axului Oz' trecînd prin punctul fix O, axul ar căpăta o rotație în jurul unui ax perpendicular pe planul făcut de Oz' cu $\bar{F}$ și în sensul $\overrightarrow{Oz'} \times \bar{F}$.

Deci, efectul (17.27) tinde să ducă axul Oz' în direcția și sensul axului de rotație al solidului dacă ar fi fost supus, din repaus, acțiunei forței $\bar{F}$ (presupunînd $\omega_0 > 0$).

Din această pricină efectul (17.27) se numește „tendința spre paralelism a axelor".

Acest efect se întrebuințează în tehnică pentru asigurarea stabilității. Așa, de pildă, s-a încercat aplicarea acestui efect la vapoare spre a se micșora tangajul; pentru menținerea direcției torpilelor; la mersul trenurilor pe o singură șină etc.

Observații: Dacă într-un punct O'' al axei z', astfel încît $\overrightarrow{OO''} = -\overrightarrow{OO'}$, aplicăm o forță $\bar{F}$ egală, paralelă și de sens contrar cu $\bar{F}$ aplicat în O', momentul total față de O este $2lF_y$, $2lF_x$, 0, iar formula (17.27) devine:

$$\bar{v} = \frac{\overline{O'O''}^2}{(C - A)\,\omega_0}(\overrightarrow{Oz'} \times \bar{F}). \tag{17.28}$$

Scanned with OKEN Scanner

Admitem că ne găsim în cazul (a), deci roata are o viteză de rotaţie $\overline{\omega}_0 = \omega_0 \overline{k}' \gg 1$, şi că nici o forţă nu solicită axul OO'. Să aplicăm corpului o rotaţie de viteză unghiulară $\overline{\omega}_1 = \omega_1 \overline{k} \perp \overline{k}'$, în jurul axului $\overrightarrow{OP} \approx \overline{k}$, ce trece prin O. Efectul produs este identic cu efectul giroscopic; deci ca şi cum s-ar fi aplicat corpului un cuplu $(+\overline{F}, -\overline{F})$. După (17.28) va trebui să avem în valoare:

$$v_1 = \omega_1 \cdot \overline{O'O''} = \frac{\overline{O'O''}^2}{(C-A)\,\omega_3} F.$$

De unde rezultă:

$$F = \frac{\omega_0\,\omega_1}{2l}(C-A)$$

sau, dacă $A \ll C$:

$$F = C\,\frac{\omega_0\,\omega_1}{2l}$$

relaţie care se aplică în problema stabilităţii unei nave.

Capitolul XVIII

MIŞCAREA RIGIDULUI LIBER

202. **Ecuaţiile mişcării.** Rigidul liber posedînd şase grade de libertate, mişcarea lui va fi determinată de teorema centrului de greutate şi de teorema momentului cinetic, în raport cu un sistem de axe de coordonate fix în spaţiu, $Oxyz$.

a) Teorema centrului de greutate este:

$$m\,\ddot{\overline{r}}_G = \overline{F} + \overline{R} \tag{18.1}$$

unde $\overline{F}$ este rezultanta forţelor exterioare, $\overline{R}$ rezultanta reacţiunilor, iar $\overline{r}_G$ este poziţia centrului de greutate faţă de polul O.

b) Teorema momentului cinetic scrisă cu ajutorul unghiurilor lui E u l e r este dată de ecuaţiile (16.3) § 182 raportate la un sistem de axe $Gx'y'z'$ paralele cu axele fixe în spaţiu $Oxyz$:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_{x'} + (C-B)\,\omega_{y'}\omega_{z'} &= M_{x'} \\ B\dot{\omega}_{y'} + (A-C)\,\omega_{z'}\omega_{x'} &= M_{y'} \\ C\dot{\omega}_{z'} + (B-A)\,\omega_{x'}\omega_{y'} &= M_{z'} \end{aligned} \tag{18.2}$$

$\overline{M}$ fiind momentul rezultant al forţelor exterioare şi reacţiunilor, în raport cu centrul de greutate G, întrucît problema revine la mişcarea în jurul unui punct fix (G).

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, relațiile (13.9) și (13.10) de la § 163, care leagă viteza unghiulară $\overline{\omega}$ de unghiurile lui Euler, permit introducerea acestor unghiuri, în ecuațiile de mișcare, ca necunoscute dependente.

Dacă rezultanta forțelor exterioare $\overline{F}$ depinde numai de poziția centrului de greutate, sistemul (18.1) se poate integra separat și ne dă mișcarea acestui punct. Dacă momentul $\overline{M}$ în raport cu centrul de greutate este nul, mișcarea va fi, în raport cu acest punct, o mișcare Poinsot.

Dacă sistemul $Gx'y'z'$ solidar cu corpul este un sistem de axe principale relativ la G, energia cinetică în mișcare relativă în jurul centrului de greutate este:

$$2E_c = A\omega_{x'}^2 + B\omega_{y'}^2 + C\omega_{z'}^2. \tag{18.3}$$

203. **Exemplu: mișcarea pământului.** a) În primă aproximație, pământul poate fi considerat ca un rigid având forma unui elipsoid turtit, de rotație în jurul axei polilor, mișcîndu-se liber în spațiul intra-planetar sub acțiunea gravitației newtoniene aplicată în centrul de greutate. Odată cunoscută mișcarea centrului de greutate, mișcarea pământului va fi descrisă prin rostogolirea conului polodic, interior, peste conul herpolodic, exterior, ca și cum s-ar mișca în jurul unui punct fix. În adevăr, cele două mișcări: a centrului de greutate și mișcarea în jurul centrului de greutate, sînt independente între ele. Această proprietate rezultă din independența ecuațiilor (18.1) și (18.2). De altfel, energia cinetică a mișcării totale având forma:

$$\frac{1}{2}\left(m\dot{r}_G^2 + A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2\right) \tag{18.4}$$

ceea ce se mai poate scrie:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}_G^2 + f(\theta, \varphi, \psi; \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}) \tag{18.5}$$

se compune din doi termeni independenți. Lucrul mecanic al forțelor exterioare, pentru o deplasare arbitrară:

$$\bar{F}\delta\bar{r}_G + \Theta\delta\theta + \Phi\delta\varphi + \Psi\delta\psi, \tag{18.6}$$

precizează independența dintre cele două deplasări: a centrului de greutate $(\delta\bar{r}_G)$ și relativă la centrul de greutate $(\delta\theta, \delta\varphi, \delta\psi)$. Această proprietate reiese clar din expresia ecuațiilor de mișcare sub forma analitică dată de Lagrange [1]) distincte pentru cele două mișcări, ecuații care reproduc, de fapt, sistemele (18.1) și (18.2).

Cum axa momentană de rotație coincide sensibil cu direcția momentului cinetic $\bar{K}$, putem considera, în primă aproximație, rotația pământului în jurul axei polilor ca o rotație uniformă. Așa ar fi dacă am putea considera cîmpul gravitațional ca fiind uniform în interiorul pământului. În realitate, atracția lunei și a soarelui nu dau o rezultantă aplicată exact în centrul pământului, din cauza nesimetriei față de planul eclipticei și al orbitei lunei. Acest moment produce, ca și în cazul Lagrange-Poisson, o mișcare de precesie pseudo-regulată foarte înceată, a axei pământului în

[1]) *J. Lagrange* [2], Cap. II.

Scanned with OKEN Scanner

jurul unei axe fixe în spaţiu (axa eclipticei) cu o perioadă sensibil egală cu 26 000 ani siderali, numită *an platonic*.

Intersecţia planului ecuatorial al pământului cu planul eclipticei, după linia nodurilor, determină *punctul vernal* γ, numit şi *echinocţiul de primăvară*.

Mişcarea de precesie, definită mai sus, este cunoscută în Astronomie sub numele de *precesia echinocţiilor*: linia nodurilor execută o mişcare *retrogradă* în planul eclipticei cu o viteză unghiulară, foarte mică, dată de variaţia unghiului azimutal, $\dot{\psi}$.

b) *Ciclul lui Euler*. Să facem în ecuaţia (18.2) pe $M_{x'}, = 0$, $M_{y'}, = 0$, $M_{z'}, = 0$ şi $A = B$; aceasta înseamnă o primă aproximaţie, admiţînd că elipsoidul inerţial este de rotaţie. Obţinem din ecuaţiile (18.2), nemaiscriind accentele:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C - A)\,\omega_y\omega_z &= 0 \\ A\dot{\omega}_y + (C - A)\,\omega_z\omega_x &= 0 \\ C\dot{\omega}_z &= 0, \end{aligned} \tag{18.7}$$

aşadar:

$$\dot{\omega}_z = \omega_0 \,(\text{constantă}).$$

Deci, pământul efectuează o rotaţie uniformă în jurul axei sale (luată ca axă z). Restul sistemului (18.7) se integrează prin:

$$\omega_x = k\cos(nt + \delta); \quad \omega_y = k\sin(nt + \delta)$$

unde $k > 0$. Axa instantanee de rotaţie descrie conul polodic în perioada de timp:

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{\omega_3}\frac{A}{C - A} \approx 305^z \tag{18.8}$$

adică 305 zile solare medii, — numită *Ciclul lui Euler*. Valoarea raportului $A/(C - A)$ se determină prin observaţii asupra valorii precesiei.

c) *Calculul precesiei regulate* (variaţia seculară). Trebuie să se renunţe la ipoteza simplificatoare a primei aproximaţii $(\bar{M}=0)$ şi să se admită că momentul forţelor exterioare este diferit de zero. Pentru calcularea acestui moment, se fac totuşi ipoteze simplificatoare suficiente pentru a evidenţia calitativ şi cantitativ efectul căutat. Admitem că forţa care produce un moment diferit de zero, provine de la soare. Considerăm pământul drept o sferă omogenă de rază R egală cu raza medie pământească, masa fiind m_0.

Presupunem, apoi, că axa de rotaţie a pământului este Oz, iar conul polodic se reduce la o dreaptă (ipoteză justificată prin faptul că unghiul de deschidere al conului polodic este foarte mic). În aceste condiţii, momentul cinetic $\overline{K}$ va avea direcţia Oz. Fie $\overline{M}$ momentul perturbator îndreptat pe linia nodurilor, spre echinocţiul de toamnă Ω. În adevăr, acţiunea datorită atracţiei solare tinde să micşoreze înclinarea ecuatorului pe ecliptică — deci momentul acestei forţe va fi îndreptat pe linia nodurilor, spre echinocţiul de toamnă, (prin efectul giroscopic).

Avem, aşadar:

$$J_\omega\dot{\overline{\omega}} = \dot{\overline{K}} = \overline{M} \tag{18.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Extremitatea vectorului $\overline{K}$ se deplasează aşadar cu acceleraţia unghiulară M/J_ω.

Să calculăm momentul $\overline{M}$. Facem ipotezele simplificatoare: soarele este o masă materială răspîndită omogen pe *cercul ecliptic*, cu centrul O (centrul pămîntului) şi de rază r. Potenţialul atracţiei unui element de masă dm_1 asupra elementului de masă dm, este:

$$dV = f\frac{dm_1\,dm}{\rho} \tag{18.10}$$

unde:

$$\rho^2 = r^2 + R^2 - 2R_r\cos(\overline{R},\overline{r})$$

sau:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{R\cos(\overline{R},\overline{r})}{r} + \frac{3}{2}\frac{R^2\cos^2(\overline{R},\overline{r})}{r^2} - \frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}\right) + \ldots. \tag{18.11}$$

Rezultă din (18.10):

$$V = f\int\frac{dm_1\,dm}{\rho} = f\left[\frac{1}{r}\int dm_1\,dm + \frac{R}{r^2}\int\cos(\overline{R},\overline{r})\,dm\,dm_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2}\frac{R^2}{r^3}\int\cos^2(\overline{R},\overline{r})\,dm\,dm_1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{r^3}\int dm\,dm_1 + \ldots\right]. \tag{18.12}$$

Dar:

$$\int dm\int dm_1 = m_1 m_0$$

unde m_1 = masa soarelui; m_0 = masa pămîntului. Apoi avem evident: $\int\cos(\overline{R},\overline{r})\,dm\,dm_1 = 0$, pentru motive de simetrie. Rămîne de calculat în expresia (18.12) termenul $\int\cos^2(\overline{R},\overline{r})\,dm\,dm_1$. Pentru a efectua acest calcul, vom considera un triedru fix $Ox'y'z'$ faţă de care dm are coordonatele x, y, z, iar dm_1 are coordonatele x_1, y_1, z_1. Fie axa Ox' (şi Ox) dirijată pe linia nodurilor spre nord. Fie ε_1 unghiul vectorului de poziţie al lui dm_1 cu Ox'; avem:

$$x_1 = r\cos\varepsilon_1;\quad y_1 = r\sin\varepsilon_1;\quad z_1 = 0. \tag{18.13}$$

Fie ε unghiul vectorului de poziţie al lui dm cu Ox; avem:

$$r = R\cos\varepsilon;\quad y = R\sin\varepsilon\cos\theta;\quad z = R\sin\varepsilon\sin\theta$$

unde θ = unghiul lui Oz', cu Oz (axă legată de corp).

Rezultă:

$$\cos(\overline{R},\overline{r}) = \cos\varepsilon_1\cos\varepsilon + \sin\varepsilon_1\sin\varepsilon\cos\theta$$
$$2\pi\,dm_1 = m_1\,d\varepsilon_1;\quad 2\pi\,dm = m_0\,d\varepsilon.$$

Aşadar:

$$\int\cos^2(\overline{R},\overline{r})\,dm_1\,dm = \frac{m_0 m_1}{4\pi^2}\int(\cos\varepsilon\cos\varepsilon_1 + \sin\varepsilon\sin\varepsilon_1\cos\theta)^2\,d\varepsilon\,d\varepsilon_1 =$$
$$= \frac{m_0 m_1}{4}(1 + \cos^2\theta).$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu această valoare, potențialul devine:

$$V = f\frac{m_0 m_1}{r}\left[1 + \frac{3}{8}\frac{R^2}{r^2}(1 + \cos^2\theta) - \frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2} + \ldots\right]. \qquad (18.14)$$

Cum $\overline{M} = -\operatorname{grad} V$, rezultă:

$$M = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{3}{4} f \frac{m_0 m_1 R^2}{r^3} \sin\theta\cos\theta. \qquad (18.15)$$

Extremitatea vectorului $\overline{K}$ se proiectează pe planul eclipticii într-un punct care se deplasează cu viteza unghiulară:

$$\dot{\psi} = -\frac{M}{J\sin\theta}$$

unde am însemnat cu ψ unghiul de precesie (azimutul față de linia nodurilor). Deci:

$$\dot{\psi} = -\frac{3}{4} f \frac{m_0 m_1 R^2 \cos\theta}{J r^3}$$

dar:

$$J = C\omega_0 = \text{const.}$$

Așadar:

$$\dot{\psi} = -\frac{3}{2}\frac{f}{\omega_0}\frac{C-A}{C}\frac{m_1}{r^3}\cos\theta.$$

Se calculează însă $(C - A) : C = 1 : 306$; $\theta = 23°27'$ (înclinarea ecuatorului pe ecliptică).

Așadar:

$$\dot{\psi} = -16'' \text{ pe an}$$

care este precesia anuală datorită acțiunii solare.

În mod analog se calculează precesia anuală datorită acțiunii lunei la $-34''$ pe an. În total precesia anuală este, în sens retrograd, de $50''$. Înconjurul complet al eclipticei se va face, așadar, în:

$$\frac{360 \times 3\,600}{50} = 26\,000 \text{ ani},$$

în sens retrograd, — după cum am afirmat mai sus.

Nu putem dezvolta prea mult calculele, specifice *Mecanicii cerești*; exemplul precedent ilustrează suficient metoda de lucru.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XIX

SISTEME DE CORPURI RIGIDE

Mişcarea sistemelor formate din corpuri rigide se studiază aplicînd separat ecuaţiile de mişcare rigidelor care constituie sistemul, ţinînd seamă de reacţiunile şi de legăturile care iau naştere din construcţia mecanică a sistemului. Aceste forţe trebuie considerate ca forţe exterioare pentru corpurile constituente. Acest principiu l-am aplicat mai înainte la studiul maşinei lui A t w o o d.

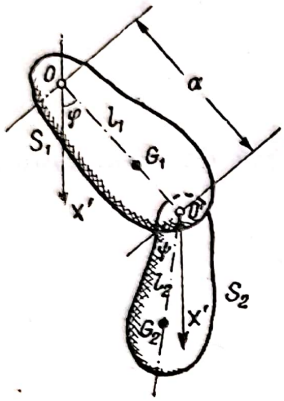

Fig. 64

204. **Pendulul dublu.** Ca un prim sistem de două mase oscilante tratăm *problema clopotului.* Un solid greu S_1 (fig. 64) se roteşte în jurul axei orizontale Oz'. Centrul său de greutate să fie G_1. Planul $x'Oy'$ trece prin punctul G_1, iar axa x' este verticală în jos. Pe OG_1 luăm un punct O' prin care ducem un ax $O'z''$ paralel cu Oz', legat solidar de solidul S_1. În jurul axei $O'z''$ se roteşte un alt solid greu S_2 cu centrul de greutate în G_2 aşezat tot în planul (x',y'). Să studiem mişcarea acestui sistem format din două corpuri, pe care le presupunem simetrice faţă de planul (x',y').

Fie :

$$\varphi = \widehat{x'OO'}\,;\ \psi = \widehat{G_2O'x'}\,;\ l_1 = OG_1\,;\ a = OO'\,;\ l_2 = O'G_2\,;$$

m_1 şi m_2 masele solidelor S_1 şi S_2.

Fie $m_1k_1^2$ momentul de inerţie al solidului S_1 în raport cu Oz'; $m_2k_2^2$ este momentul de inerţie al solidului S_2 în raport cu axa $O'z''$.

Să considerăm separat, pentru moment, mişcarea solidelor S_1 şi S_2.

Pentru solidul S_1, să aplicăm teorema „momentului cinetic" în raport cu axa Oz'. Momentul cinetic al lui S_1 în raport cu Oz', este $m_1k_1^2\dot{\varphi}$.

Forţele exterioare sînt: 1. Greutatea, aplicată în G_1 al cărei moment în raport cu Oz' este $m_1gl_1 \sin\varphi$;

2. Calcularea reacţiunii, provocată de solidul S_2 asupra axei Oz'. Fie $\overline{R}$ $(R_{x'},\ R_{y'},\ R_{z'})$ această reacţiune pe care o putem presupune aplicată în punctul O'. Momentul rezultant al lui $\overline{R}$ în raport cu axa Oz' este:

$$\overline{k}'\left(\overrightarrow{OO'} \times \overline{R}\right) = a\cos\varphi\, R_{y'} - a\sin\varphi\, R_{x'}.$$

Prin urmare, teorema momentului cinetic ne dă:

$$m_1k_1^2\,\ddot{\varphi} = -\,m_1gl_1\sin\varphi + a\,(\cos\varphi\, R_{y'} - \sin\varphi\, R_{x'}). \qquad (19.1)$$

Pentru solidul S_2 aplicăm teorema „centrului de greutate" în planul (x', y'), ținînd seamă că reacțiunea lui S_1 asupra lui S_2 este $-\overline{R}$. Ecuațiile mișcării centrului de greutate G_2 sînt:

$$\begin{aligned} m_2 \frac{d^2}{dt^2}(a\cos\varphi + l_2\cos\psi) &= m_2 g - R_{x'}, \text{ pe } Ox'; \\ m_2 \frac{d^2}{dt^2}(a\sin\varphi + l_2\sin\psi) &= -R_{y'}, \text{ pe } Oy'. \end{aligned} \tag{19.2}$$

Ecuația „momentului cinetic" în raport cu centrul de greutate G_2 (adică cu axa $G_2 z'' \parallel Oz'$) ne dă:

$$m_2(k_2^2 - l_2^2)\ddot{\psi} = l_2(\cos\psi \cdot R_{y'} - \sin\psi \cdot R_{x'}). \tag{19.3}$$

Aceste patru ecuații, (19.1), (19.2) și (19.3), ne permit să determinăm cele patru necunoscute $R_{x'}$, $R_{y'}$, ψ și φ.

Eliminînd reacțiunile $R_{x'}$ și $R_{y'}$ între ecuațiile (19.1), (19.2) și (19.3) obținem sistemul care ne va da mișcarea, adică pe φ și ψ:

$$\begin{aligned} h^2\ddot{\varphi} + al_2\cos(\varphi-\psi)\ddot{\psi} + al_2\sin(\varphi-\psi)\dot{\psi}^2 + bg\sin\varphi &= 0 \\ al_2\cos(\varphi-\psi)\ddot{\varphi} + k_2^2\ddot{\psi} + al_2\sin(\varphi-\psi)\dot{\varphi}^2 + l_2 g\sin\psi &= 0 \end{aligned} \tag{19.4}$$

unde am pus, spre prescurtare:

$$k_1^2 m_1 + m_1 a^2 = m_2 h^2 \quad \text{și} \quad m_1 l_1 + m_2 a = m_1 b.$$

Integrarea sistemului (19.4) nu se poate efectua complet și general cu mijloacele analitice actuale. Pentru acest motiv și pentru motivul că în practică se obțin mai cu seamă dispozitive de pendul dublu, cum este „clopotul", care efectuează numai oscilații foarte mici, se consideră soluția în cazul oscilațiilor de *amplitudine foarte mică*. Din această ipoteză urmează ca φ, ψ, precum și derivatele lor să fie păstrate numai la gradul întîi.

Așadar, în cazul oscilațiilor foarte mici, sistemul (19.4) devine, neglijînd termenii pătratici și punînd $\varphi \approx \psi$:

$$\begin{aligned} h^2\ddot{\varphi} + al_2\ddot{\psi} + bg\varphi &= 0 \\ al_2\ddot{\varphi} + k_2^2\ddot{\psi} + l_2 g\psi &= 0. \end{aligned} \tag{19.5}$$

După metoda cunoscută, să căutăm o soluție particulară de forma:

$$\varphi = e^{\sigma t}; \quad \psi = \lambda e^{\sigma t}.$$

Substituind în (19.5), găsim condițiile:

$$\begin{aligned} (h^2\sigma^2 + bg) + al_2\sigma^2\lambda &= 0 \\ al_2\sigma^2 + (k_2^2\sigma^2 + l_2 g)\lambda &= 0 \end{aligned}$$

de unde, prin eliminarea lui λ, se obține ecuația pentru σ:

$$(h^2k_2^2 - a^2l_2^2)\sigma^4 + (h^2l_2 + k_2^2 b)g\sigma^2 + bl_2 g^2 = 0 \tag{19.6}$$

care este ecuația caracteristică a sistemului (19.5). Această ecuație bipătrată în σ are în general două rădăcini reale și negative pentru σ^2. În adevăr, discriminantul este pozitiv:

$$D = g^2[(h^2l_2 - k_2^2 b)^2 + 4a^2 b l_2^3] > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

și coeficientul lui σ^4 e de asemenea pozitiv:

$$m_2(b^2k_2^2 - a^2l_2^2) = k_2^2(m_1k_1^2 + m_2a^2) - m^2a^2l_2^2 =$$
$$= m_1k_2^2k_1^2 + m_2a^2(k_2^2 - l_2^2) > 0.$$

Să însemnăm cele două rădăcini: $\sigma_1^2 = -\nu^2$ și $\sigma_2^2 = -\mu^2$. Integralele particulare vor fi funcții periodice, și în general, distincte. Să considerăm soluțiile periodice care corespund rădăcinilor $\pm i\nu$:

$$\varphi_1 = C_1al_2\nu^2 \sin(\nu t + \gamma_1)$$
$$\psi_1 = C_1(lg - h^2\nu^2)\sin(\nu t + \gamma_1), \tag{19.7}$$

sau rădăcinilor $\pm i\mu$:

$$\varphi_2 = C_2al_2\mu^2 \sin(\mu t + \gamma_2)$$
$$\psi_2 = C_2(bg - h^2\mu^2)\sin(\mu t + \gamma_2) \tag{19.8}$$

unde C_1, C_2, γ_1, γ_2 sînt constante arbitrare.

Integrala generală a sistemului diferențial (19.5) este suma soluțiilor (19.7) și (19.8). Prin ipoteză, C_1 și C_2 sînt foarte mici. Sistemul format de cele două corpuri S_1 și S_2 poate oscila astfel încît amplitudinile oscilațiilor să fie foarte mici, iar frecvența să aibă două valori ν, μ, în general distincte.

Un astfel de sistem, numit pendul dublu, îl formează un clopot împreună cu limba lui. Clopotul cu limba, oscilează, în ansamblu, cu una din frecvențele ν sau μ; să considerăm, pentru a fixa ideile, frecvența ν. Pentru ca să sune, este necesar ca limba și clopotul să *nu* oscileze ca un corp rigid *unitar*, căci în acest caz limba nu va putea izbi clopotul. Pentru ca acest fapt să aibă loc e necesar ca $\dot{\varphi}_1$ și $\dot{\psi}_1$ să fie diferite. Dacă însă $\dot{\varphi}_1 = \dot{\psi}_1$ ceea ce înseamnă că, prin condițiile de construcție, avem egalitatea:

$$al_2^2\nu^2 = bg - h^2\nu^2, \text{ adică } \nu^2 = \frac{bg}{al_2^2 + h^2} \tag{19.9}$$

atunci clopotul *nu va suna*. Faptul acesta s-a petrecut, în realitate, și a rămas celebru, în anul 1876 cu clopotul Catedralei din *Köln*, în ziua inaugurării lui, clopot turnat din tunurile cucerite de la francezi.

Este ușor de verificat că, dacă relația (19.9) are loc, atunci $\varphi = \psi$ chiar și pentru oscilații oarecare finite, (nu numai foarte mici). Aceasta înseamnă că ecuațiile generale (19.4) trebuie să admită, sub condiția (19.9) soluția $\varphi = \psi$. În adevăr:

$$-\nu^2 = -\frac{bg}{al_2^2 + h^2}$$

este o rădăcină a ecuației (19.6); înlocuind această valoare în (19.6) deducem condiția suplimentară:

$$b(al_2 + k_2^2) = l_2(al_2 + h^2) \tag{19.10}$$

de care, ținînd seamă, verificăm că soluția $\varphi = \psi$, introdusă în (19.5), ne dă ecuația diferențială a lui $\varphi = \psi$, sub forma:

$$\ddot{\varphi} + \frac{bg}{al_2^2 + h^2}\sin\varphi = 0, \text{ sau } \ddot{\varphi} + \nu^2 \sin\varphi = 0$$

deci, ecuația pendulului matematic cu oscilații finite.

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul întreg oscilează ca un rigid formînd un pendul simplu (matematic). Clopotul nu va suna, așadar, nici pentru astfel de oscilații finite.

În acest caz, dacă considerăm limba clopotului (solidul S_2) redusă la un punct material G_2, acest punct material se va găsi în centrul de oscilație al clopotului (solidului S_1).

În adevăr, relația (19.10) ne dă, înlocuind valorile lui h^2 și b:

$$m_2 a\,(k_2^2 - l_2^2) = m_1 (l_2 k_1^2 - l_1 k_2^2 - a l_1 l_2). \tag{19.11}$$

Dar, cînd S_2 se reduce la punctul G_2 de masă m_2, momentul de inerție se reduce la $m_2 l_2^2$; așadar, raza de giratie $k_2 = l_2$. Rezultă, din (19.11).

$$\frac{k_1^2}{l_1} = a + l_2 = l'$$

unde l' este distanța pînă la O a centrului de oscilație al pendulului fizic S_1 (punctul pe unde trece axa de oscilație corespunzătoare axei de suspensie din O).

205. **Pendule simpatice**[1]). Al doilea exemplu pentru un sistem de două mase oscilante simultan, îl constituie pendulele simpatice, care sînt un model mecanic pentru un proces electric cunoscut, anume, dispozitivul format de două circuite electrice (unul primar și unul secundar) legate inductiv — cum se întrebuințează în telegrafia fără fir.

Modelul mecanic constă din două pendule identice (acordate) sau neidentice (dezacordate) legate între ele mai puternic sau mai slab.

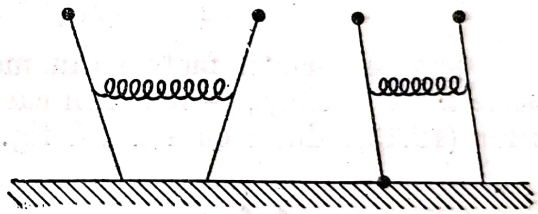

Fig. 65

După principiul că un sistem cu n grade de libertate posedă n oscilații fundamentale, cazul de față are două grade de libertate, — deci vom avea două oscilații fundamentale ilustrate prin dispozitivele din fig. 65.

Pentru discuția problemei tratăm pe scurt două cazuri: a) ambele pendule sînt în rezonanță completă și perfect *acordate*, neglijînd efectele de amortizare; b) pendulele sînt *dezacordate*.

a) Fie x_1 elongația primului pendul și x_2 elongația celui de-al doilea pendul, și K factorul de legătură (același pentru pendulele acordate) definit prin masa împărțită prin tensiunea spiralei la o lungire de o unitate. Ecuațiile diferențiale ale problemei sînt, în aceste condiții:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= -K(x_1 - x_2), \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 &= -K(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{19.12}$$

ω_0 fiind frecvența proprie pentru ambele pendule.

Introducînd schimbarea de variabile:

$$\xi_1 = x_1 - x_2\,; \quad \xi_2 = x_1 + x_2 \tag{19.13}$$

[1]) *v. A. Sommerfeld*, [43] VI, p. 101.

obținem, adunînd și scăzînd ecuațiile (19.12):

$$\ddot{\xi}_1 + (\omega_0^2 + 2K)\,\xi_1 = 0; \quad \ddot{\xi}_2 + \omega_0^2 \xi_2 = 0. \tag{19.14}$$

Aceste două oscilații fundamentale se execută cu frecvențele:

$$\omega_1 = \omega_0^2 + 2K \approx \omega_0 + \frac{K}{\omega_0}; \qquad \omega_2 = \omega_0. \tag{19.15}$$

Integrarea ecuațiilor (19.14) este simplă. Se obține:

$$\xi_1 = a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t$$
$$\xi_2 = a_2 \cos \omega_0 t + b_2 \sin \omega_0 t. \tag{19.16}$$

Admitem că în momentul inițial ($t = 0$) avem:

$\dot{x}_1 = 0, x_1 = c; \; x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0;$ așadar, $\xi_1 = \xi_2 = c; \; \dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2 = 0.$

În aceste condiții, soluțiile sistemului (19.12) devin:

$$x_1 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) = c \cos \frac{\omega_1 - \omega_0}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 - \omega_0}{2} t$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(\xi_2 - \xi_1) = c \sin \frac{\omega_1 - \omega_0}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 - \omega_0}{2} t. \tag{19.17}$$

Dar după (19.15)

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{2} = \frac{K}{2\omega_0} \ll 1 \text{ în legătură slabă;}$$

prin urmare, primii factori din membrii doi ai ecuațiilor (19.17) *variază foarte încet* în timp, — fenomen care produce efectul de *fluctuații* ale oscilațiilor (19.12), după cum arată fig. 66.

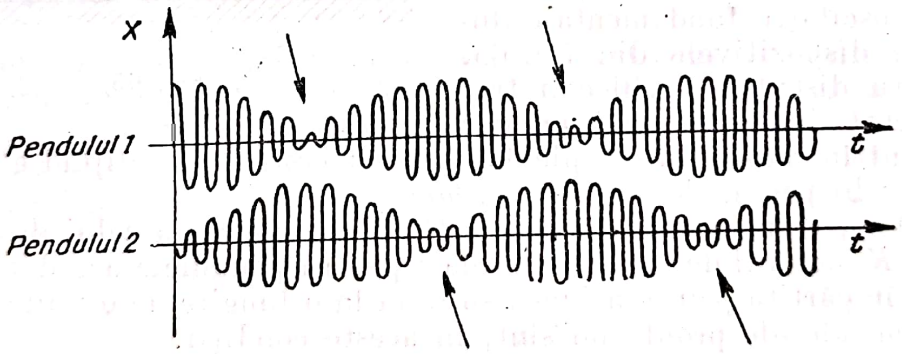

Fig. 66

b) În cazul pendulelor *dezacordate*, putem considera că lungimile și masele lor diferă; deci vor diferi și frecvențele proprii ($\omega_1 \neq \omega_2$) de factorii de legătură ($K_1 \neq K_2$). În aceste condiții ecuațiile oscilațiilor fundamentale sînt:

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = -K_1 (x_1 - x_2)$$
$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = -K_2 (x_2 - x_1). \tag{19.18}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile se integrează după procedeul general, punînd:

$$x_1 = Ae^{irt}, \quad x_2 = Be^{irt}. \tag{19.19}$$

Introducînd aceste valori în (19.18) se obțin relațiile:

$$\begin{aligned} A(\omega_1^2 - r^2 + K_1) = K_1 B = 0, \\ B(\omega_2^2 - r^2 + K_2) = K_2 A = 0; \end{aligned} \tag{19.20}$$

sistem omogen a cărui condiție de compatibilitate conduce la ecuația seculară în r^2 (de gradul doi):

$$\begin{vmatrix} r^2 - (\omega_1^2 + K_1) & K_2 \\ K_1 & r^2 - (\omega_2^2 + K_2) \end{vmatrix} = 0 \tag{19.21}$$

Considerăm cazul că ambii K_1 și K_2 sînt foarte mici. Astfel, obținem:

$$r^2 = \begin{cases} \omega_1^2 + K_1 + \dfrac{K_1 K_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \equiv \omega^2, \\ \omega_2^2 + K_2 + \dfrac{K_1 K_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \equiv \omega'^2. \end{cases} \tag{19.22}$$

Folosim aceste două frecvențe pentru a scrie soluția (19.19) sub formă reală completată:

$$\begin{aligned} x_1 &= a\cos\omega t + b\sin\omega t + a'\cos\omega' t + b'\sin\omega' t \\ x_2 &= \alpha a\cos\omega t + \alpha b\sin\omega t + \alpha' a'\cos\omega' t + \alpha' b'\sin\omega' t \end{aligned} \tag{19.23}$$

în care am însemnat prin α și α' valorile lui B/A din (19.20) cînd înlocuim pe r^2 cu ω^2 respectiv ω'^2.

Pentru condițiile inițiale ($t = 0$), $x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \dot{x}_1 = 0, x_1 = c$, se obțin soluțiile:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{c}{\alpha' - \alpha}(\alpha'\cos\omega t - \alpha\cos\omega' t) \\ x_2 &= \frac{c}{\alpha' - \alpha}\alpha'\alpha(\cos\omega t - \cos\omega' t) \end{aligned} \tag{19.24}$$

sau încă:

$$x_2 = \frac{2\alpha'\alpha c}{\alpha - \alpha'}\sin\frac{\omega' - \omega}{2}t\sin\frac{\omega' + \omega}{2}t. \tag{19.25}$$

Din expresiile (19.24) și (19.25) constatăm că numai pendulul al doilea revine în repaus (nu și primul) la intervalele:

$$\frac{\omega' - \omega}{2}t = n\pi \tag{19.26}$$

graficul oscilațiilor fiind redat de fig. 67.

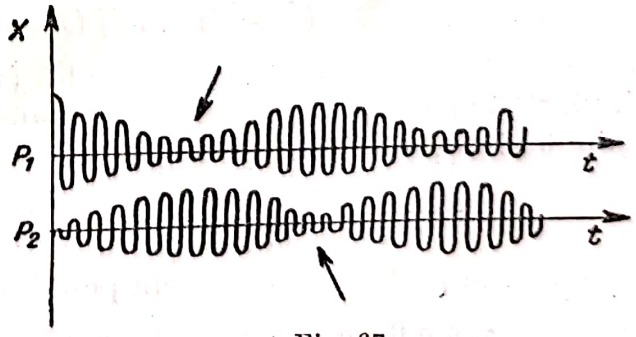

Fig. 67

Capitolul XX

MIŞCAREA UNUI RIGID ÎN CONTACT CU UN PLAN FIX

206. **Ecuaţiile mişcării.** Acest caz se deosebeşte de mişcarea rigidului liber prin condiţia suplimentară de a rămîne mereu în contact cu planul fix considerat. Prin această condiţie rămîn solidului numai *cinci* (în loc de şase) grade de libertate. Pentru definirea mişcării, să alegem un sistem de coordonate fix în spaţiu $Oxyz$, avînd planul fix (x,y) pe care se găseşte originea O şi ca axă z $(\bar{k})$ perpendiculara pe acest plan, cu sensul pozitiv spre regiunea unde se găseşte solidul. Acesta poate aluneca *fără frecare* pe planul fix, avînd în contact cu planul fix, un punct, reprezentat tehnic printr-o sferă foarte mică perfect lucioasă.

Să ducem prin centrul de greutate al solidului G două sisteme de coordonate: unul avînd ca axe axele principale de inerţie ale elipsoidului inerţial central $Gx'y'z'$ legat de solid; al doilea să aibă axele $Gx_1y_1z_1$ paralele cu axele sistemului de coordonate fix în spaţiu. Faţă de sistemul $Gxyz$, rigidul (deci şi sistemul $Gx'y'z'$ legat de rigid) se raportează cu ajutorul unghiurilor lui E u l e r θ, φ, ψ.

Pentru studiul mişcării vom deduce unghiurile lui E u l e r (trei variabile) faţă de sistemul de direcţii fixe,cu originea în centrul de greutate; în al doilea rînd, vom căuta mişcarea centrului de greutate (alte trei variabile) faţă de sistemul fix $(Oxyz)$, în spaţiu, al cărui vector de poziţie fie $\bar{r}_G$.

Avem în total şase parametri variabili. În realitate, pentru mişcarea considerată în cazul de faţă, rigidul are numai cinci grade de libertate, pe care le calculăm din cinci ecuaţii de mişcare. Este uşor de văzut că al şaselea parametru este funcţie de ceilalţi, deci nu este independent.

În adevăr, raportînd suprafaţa care limitează solidul la sistemul $Gx'y'z'$, ecuaţia acestei suprafeţe se scrie:

$$f(x', y', z') = 0.$$

Fie, faţă de G ca pol, $\bar{\rho}$ şi $\bar{r}'$ (x', y', z') vectorii de poziţie: al unui punct P de pe planul tangent şi al punctului de contact M (x', y', z'). Ecuaţia acestui plan tangent va fi (faţă de x', y', z')

$$(\bar{\rho} - \bar{r}') \operatorname{grad} f(x', y', z') = 0. \tag{20.1}$$

Pentru ca rigidul să fie tangent planului (x,y), trebuie să existe un punct (x', y', z') de pe suprafaţa lui, în care planul tangent să fie perpendicular pe $\bar{k}$ $(\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)$, adică:

$$\frac{\operatorname{grad}_{x'} f}{\sin\theta\sin\varphi} = \frac{\operatorname{grad}_{y'} f}{\sin\theta\cos\varphi} = \frac{\operatorname{grad}_{z'} f}{\cos\theta} = \Phi(x', y', z', \theta, \psi, \varphi) \tag{20.2}$$

şi, pe de altă parte, să treacă prin punctul O, adică:

$$\rho_x \sin\theta\sin\varphi + \rho_y \sin\theta\cos\varphi + \rho_z \cos\theta = \bar{k} \cdot \bar{\rho} = -r_{Gz}. \tag{20.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțind numărătorii și numitorii din (20.2) respectiv cu ρ_x, ρ_y, ρ_z și adunînd, obținem ținînd seamă de (20.1) și (20.3),

$$\Phi(x', y', z', \theta, \psi, \varphi) = \frac{\bar{\rho}\,\mathrm{grad}\, f}{\bar{k}\bar{\rho}} = \frac{\bar{r}'\,\mathrm{grad}\, f}{-r_{Gz}}. \tag{20.4}$$

Eliminînd x', y', z', între ecuațiile (20.4), (20.2) și ecuația suprafeței, obținem o relație de forma:

$$r_{Gz} = r_{Gz}(\theta, \psi, \varphi) \tag{20.5}$$

între r_{Gz} și unghiurile lui E u l e r , numită *relația de condiție.*

Prin urmare, ne rămîn numai *cinci* parametri variabili independenți. Ecuațiile de mișcare pentru aflarea acestor parametri vor fi, însemnînd cu $\bar{F}$ rezultanta forțelor exterioare și ținînd seama că *reacțiunea* $\bar{R}$ este *normală pe planul fix* (x,y):

1) ecuația centrului de greutate; ea ne va da mișcarea proiecției centrului de greutate pe planul fix (x,y):

$$m\ddot{\bar{r}}_G = \bar{F} + \bar{R}, \text{ unde } R_x = R_y = 0. \tag{20.6}$$

A treia ecuație ne permite să calculăm reacțiunea.

2) teorema energiei, care ne dă, după teorema lui K ö n i g:

$$d\frac{1}{2}\left(m\dot{r}_G^2 + A\omega_{x'}^2 + B\omega_{y'}^2 + C\omega_{z'}^2\right) = \bar{F}d\bar{r}_G. \tag{20.7}$$

3) teorema momentului cinetic, în raport cu axa Gz', care revine la ecuația treia a lui E u l e r:

$$C\dot{\omega}_{z'} + (B - A)\,\omega_{x'}\,\omega_{y'} = M_{z'}. \tag{20.8}$$

4) teorema momentului cinetic, în raport cu axa Gz:

$$\frac{d}{dt}(A\omega_{x'}\sin\theta\sin\varphi + B\omega_{y'}\sin\theta\cos\varphi + C\omega_{z'}\cos\theta) = M_z. \tag{20.9}$$

Aceste ecuații sînt suficiente pentru descrierea mișcării. Interesant este cazul cînd solidul este de rotație în jurul axei Gz'. Atunci ecuația (20.8) se simplifică mult, căci $A = B$. Apoi, cazul cînd nu sînt alte forțe exterioare decît greutatea. Atunci, luînd axa Oz (deci Gz) verticală, M_z este nul, căci forța de greutate e paralelă cu $\bar{k}$ și $M_{z'} = 0$.

207. **Aplicație.** *Giroscopul liber* este un corp solid greu de rotație în jurul unei axe care trece prin centrul său de greutate. Singura forță exterioară ce-l solicită este greutatea, de direcție verticală. O alegem ca axă Oz; ea este deci fixă în spațiu (fig. 68).

Giroscopul se rotește cu o viteză unghiulară ω, în jurul axei z' $(\bar{k}')$ care trece prin centrul ei de greutate G așezat deasupra planului fix. El rămîne în contact cu planul fix, luat ca plan (x,y), orizontal, printr-un punct A așezat pe axa de simetrie AG. În aceste condiții, vom avea:

$$F_x = 0,\ F_y = 0,\ F_z = -mg.$$

Să raportăm mișcarea la un sistem de coordonate paralel cu sistemul fix din spațiu O, avînd însă originea în punctul de contact A.

Relația de condiție (20.5) se exprimă, în această problemă, foarte simplu, anume, prin relația:

$$r_{Gz} = l \cos \theta \tag{20.10}$$

dacă $r_G = l$ este poziția fixă a centrului de greutate față de punctul de sprijin A și $\theta = (\widehat{\bar{k}, \bar{k}'})$.

Teorema centrului de greutate (20.6) ne dă:

$$m\ddot{r}_{Gx} = 0, \quad m\ddot{r}_{Gy} = 0$$

de unde rezultă:

$$r_{Gx} = v^0_{Gx}\, t + r^0_{Gx}; \quad r_{Gy} = v^0_{Gy}\, t + r^0_{Gy}. \tag{20.11}$$

Prin urmare, centrul de greutate descrie, în planul $P(x, y)$, dreapta:

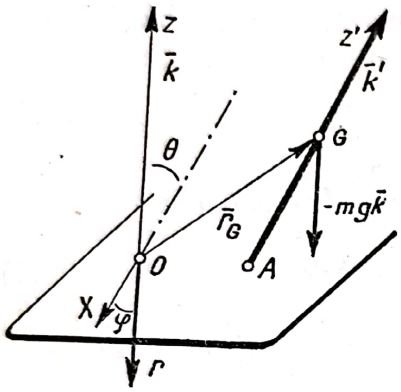

Fig. 68

$$\frac{y - r^0_{Gy}}{x - r^0_{Gx}} = \frac{v^0_{Gy}}{v^0_{Gx}}$$

cu mișcare uniformă având viteza (constantă):

$$v_P = \sqrt{v^2_{Gx} + v^2_{Gy}} = \sqrt{v^{02}_{Gx} + v^{02}_{Gy}}.$$

A treia ecuație (20.6), ținînd seama de relația (20.10), ne dă:

$$ml \frac{d^2}{dt^2}(\cos \theta) = -mg + R.$$

Ea ne permite să calculăm reacțiunea $\bar{R}$, verticală în punctul A, după ce am rezolvat ecuația care ne dă unghiul $\theta = \theta(t)$. Să căutăm această ecuație.

Momentul forțelor exterioare, în raport cu A, este:

$$\bar{M} = \bar{r}_G \times (-mg\bar{k}) = -mg \cdot r_G (\bar{k}' \times \bar{k}). \tag{20.12}$$

Ținînd seamă de simetria rigidului, $A = B$ și pe de altă parte, după (20.12):

$$M_{z'} = \text{const} \cdot \bar{k}' (\bar{k}' \times \bar{k}) = 0,$$

a treia din ecuațiile lui Euler (20.8), ne dă:

$$\omega_{z'} = \omega_0 \,(\text{const}).$$

Din teorema energiei (20.7) rezultă:

$$m\dot{r}^2_G + A\omega^2_{x'} + A\omega^2_{y'} + C\omega^2_0 + 2mgr_G \cdot \cos \theta = \text{const}. \tag{20.13}$$

Teorema impulsului (20.9) devine:

$$A\omega_{x'} \sin \theta \sin \varphi + A\omega_{y'} \sin \theta \cos \varphi + C\omega_0 \cos \theta = \text{const} \tag{20.14}$$

căci și:

$$\bar{M}_z = \text{const} \cdot \bar{k} (\bar{k}' \times \bar{k}) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să fixăm *condițiile inițiale*: în momentul $t = 0$, avem:

$$\omega^0_{x'} = 0; \quad \omega^0_{y'} = 0; \quad \omega^0_{z'} = \omega_0 \neq 0; \quad \theta = \theta_0, \quad \psi = \psi_0. \tag{20.15}$$

Fiziceşte aceste condiţii exprimă faptul că am imprimat giroscopului o rotaţie iniţială de viteză unghiulară ω_0 în jurul axei sale de simetrie Gz', axă pe care o ţinem fixă în momentul iniţial, în poziţia (θ_0, ψ_0), faţă de axa fixă din spaţiu. Punctul G fiind fix în momentul iniţial, ecuaţiile (21.11) ne dau:

$$v_P = 0 \ (v_{Gx} = v_{Gy} = 0).$$

Observăm că, în aceste condiţii:

$$\dot{r}^2_G = v^2_P + \dot{r}^2_{Gz} = l^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\theta}^2$$

după relaţia (20.10).

Ţinînd seamă de relaţiile lui Euler (§ 182) şi de condiţiile (20.15), ecuaţiile (20.13) şi (20.14) precum şi a treia relaţie Euler, devin:

$$\dot{\theta}^2 \left(1 + \frac{ml^2}{A} \sin^2\theta\right) + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta = \frac{2mgl}{A} (\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

$$\dot{\psi} \sin^2\theta = \frac{C}{A} \omega_0 (\cos\theta_0 - \cos\theta) \tag{20.16}$$

$$\dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi} = \omega_0.$$

Din prima şi a doua ecuaţie (20.16) eliminînd $\dot{\psi}$, obţinem ecuaţia diferenţială pentru θ. Avem:

$$\dot{\theta}^2 = 2mgl \frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{A + ml^2 \sin^2\theta} \left(1 - \frac{C^2\omega_0^2}{2mglA} \frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin^2\theta}\right) \tag{20.17}$$

de unde θ se deduce ca funcţie uniformă de t printr-o integrală eliptică. Ecuaţia diferenţială (20.17) poate fi integrată prin funcţii elementare în cazul particular, care de fapt este cazul important din punct de vedere experimental, anume, cînd imprimăm giroscopului în momentul iniţial, o rotaţie foarte mare, astfel încît:

$$C^2\omega_0^2 \gg 2mglA. \tag{20.18}$$

Din prima ecuaţie (20.16) rezultă că totdeauna $\cos\theta_0 - \cos\theta > 0$, căci toţi ceilalţi termeni din acea ecuaţie sînt esenţial pozitivi. Dar atunci, ecuaţia (20.17) implică şi ea condiţia ca paranteza din membrul al doilea să fie pozitivă; deci

$$\frac{C^2\omega^2}{2mglA} \frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin^2\theta} < 1$$

condiţie, care unită cu (20.18) ne dă:

$$\cos\theta_0 - \cos\theta \ll 1.$$

Atunci, putem pune $\theta = \theta_0 + \theta'$, unde $\theta' \ll 1$. Rezultă:

$$\cos\theta_0 - \cos\theta = \theta' \cdot \sin\theta_0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să facem notaţiile, pentru prescurtare:

$$a = \frac{2\,mgl\sin\theta_0}{A + ml^2\sin^2\theta_0}\,; \qquad b = \frac{C^2\omega_0^2}{2\,mgl\,A\sin\theta_0}\,. \tag{20.19}$$

Ecuaţia (20.17) devine în aceste condiţii:

$$\dot\theta'^2 = a\theta'(1 - b\theta')$$

care se integrează prin substituţia $b\theta' = \sin^2 z$. Se obţine:

$$\theta' = \frac{1}{b}\sin^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{ab}\,t\right) \tag{20.20}$$

ţinînd seamă că $\theta_0' = 0$.

Expresia (20.20) ne arată că $\theta = \theta_0 + \theta'$ este o funcţie periodică de timp, variind între θ_0 şi o valoare vecină dată de maximul lui θ', care este, după (20.20):

$$\theta'_{max} = \frac{1}{b} = \frac{2\,mglA\,\sin\theta_0}{C^2\omega_0^2}$$

deci, după (20.18), foarte mică.

Aşadar, extremitatea giroscopului (Oz') descrie pe sfera cu centrul în A şi rază egală cu unitatea, în mişcarea de *nutaţie*, o curbă cuprinsă în interiorul coroanei limitată de cercurile $\theta = \theta_0$ şi $\theta = \theta_0 + \theta'_{max}$ (acesta din urmă fiind cercul inferior). Perioada mişcării este, după (20.20) şi (20.19):

$$2\pi\frac{2}{\sqrt{ab}} = \frac{4\pi}{C\omega_0}\sqrt{A^2 + ml^2 A\sin\theta_0}$$

aşadar, cu atît mai mică (prin urmare, oscilaţiile vor fi cu atît mai repezi) cu cît este mai mare viteza unghiulară iniţială ω_0. Amplitudinea oscilaţiilor este invers proporţională cu ω_0^2.

Să vedem ce se întîmplă cu planul zOz', deci cum variază unghiul ψ. Din a doua ecuaţie (20.16), în condiţiile iniţiale date, rezultă:

$$\dot\psi = \frac{C\omega_0}{A\sin\theta_0}\,\theta' = \frac{2\,mgl}{C\omega_0}\sin^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{ab}\,t\right).$$

Integrînd, rezultă:

$$\psi = \frac{mgl}{C\omega_0}\left(t - \frac{1}{\sqrt{ab}}\sin\left(\sqrt{ab}\,t\right)\right) + \psi_0. \tag{20.21}$$

Aşadar, axa giroscopului execută şi o mişcare de *precesie*, întrucît planul vertical ce o conţine se roteşte în acelaşi sens ($\omega_0 > 0$), cu o viteză unghiulară care variază periodic între valoarea zero şi o valoare maximă:

$$\dot\psi_{max} = \frac{2mgl}{C\omega_0} \tag{20.22}$$

independentă de înclinarea iniţială a axei, θ_0. Oscilaţiile sînt cu atît mai repezi şi cu atît mai mici cu cît ω_0 este mai mare. Sensul mişcării de precesie este dat de sensul lui ω_0. Acestei mişcări i se suprapune efectul giroscopic (§ 201).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\omega_0 > 0$, greutatea avînd sensul verticalei descendente, axa Oz' suferă o mișcare de precesie în sensul lui ψ pozitiv, care tinde să așeze axa Oz' peste momentul (pozitiv) produs de forța exterioară; deci, în cazul figurii, spre dosul figurii.

Curba descrisă în mișcarea de *nutație* între cei doi paraleli extremi θ_0 și $\theta_0 + \theta'_{max}$, este de natura curbei *(c)* din mișcarea Lagrange-Poisson, deci cu puncte de întoarcere pe paralelul superior (θ_0) și este tangentă la paralelul inferior ($\theta_0 + \theta'_{max}$).

În adevăr, fie α unghiul făcut de tangentă la curba de nutație cu tangenta geometrică la paralelul corespunzător. Avem (ca și în discuția cazului Lagrange-Poisson):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\theta}{d\psi} = \frac{1}{\sin\theta_0}\frac{\dot{\theta}'}{\dot{\psi}} \approx \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\sqrt{ab}\,t\right)$$

valori care devin infinite pentru $\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{ab}\,t\right) = 0$, pentru care, după (20.20), $\theta' = 0$, deci $\theta = \theta_0$ (paralelul superior); și dimpotrivă, pe cercul inferior $\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{ab}\,t\right) = 0$, unde θ' este maxim, $\operatorname{tg}\alpha$ se anulează, curba atingînd tangențial paralelul inferior.

În proiecție pe planul orizontal, mișcarea se efectuează „în jurul centrului de greutate", astfel încît, proiectînd cei doi paraleli θ_0 și $\theta_0 + \theta'_{max}$, vîrful giroscopului execută mișcările oscilatorii, descrise mai sus, în corcana cuprinsă între două cercuri concentrice.

Capitolul XXI

MIȘCAREA RIGIDELOR, CU FRECARE

208. **Reacțiunea normală.** În studiul mișcării punctului material, am considerat cazul cînd un mobil se poate deplasa pe o curbă sau o suprafață dată, *cu frecare*, și am analizat caracterul specific al acestui efect. (§ 103 ș.a.). Pentru punctul material nu exista decît un singur fel de frecare, *frecarea de alunecare*, punctul neavînd mișcări de rotație, mișcări, care se pot descompune în „rostogolire" și „pivotare" (sau „sfredelire"); punctul material reprezentînd idealizarea unui corp material de dimensiuni extrem de mici.

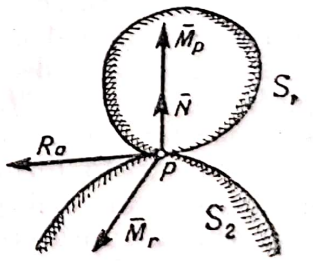

Fig. 69

În realitate, efectul de frecare apare numai atunci cînd două *corpuri* materiale de dimensiuni finite, solide sau chiar lichide, se mișcă unul față de celălalt, astfel încît să rămînă mereu în contact. Pentru fixarea ideilor, presupunem (fig. 69) că unul din corpuri este un rigid fix, mărginit de o suprafață convexă S_2. Un alt rigid mărginit de suprafața convexă S_1 se mișcă astfel încît S_1 rămîne în fiece moment în contact cu S_2 într-un punct P, punct pe care-l considerăm ca abstractizarea unui element de suprafață

infinitezimal, după care se ating cele două solide. Cînd cele două suprafețe sînt *perfect netede*, nu există frecare; cînd ele sînt *aspre*, avem frecare; cînd sînt *complet aspre*, corpurile rămîn în contact permanent și nu se pot mișca. În aceste condiții, efectul de frecare se distinge prin elementele caracteristice analizate mai jos.

Observăm, mai întîi, că între două corpuri care se află în contact, se dezvoltă o *reacțiune normală* $\overline{N}$ datorită presiunii reciproce a celor două corpuri, exercitată normal pe suprafețele de contact. Această reacțiune are rolul de a împiedica pătrunderea (penetrarea) celor două corpuri rigide din cauza presiunii ce exercită unul asupra celuilalt. Această mărime apare în ecuațiile de mișcare ca *o forță de reacțiune*, care trebuie calculată; ea apărea și în mișcarea punctului material, putînd fi interpretată ca presiunea punctului asupra suprafeței de sprijin. Ea este pozitivă $N>0$, în sensul normalei exterioare la suprafața de sprijin.

209. **Frecarea de alunecare.** Cînd corpul S_1 execută o mișcare de alunecare față de corpul fix S_2, punctul de contact al suprafețelor celor două rigide se consideră ca și cum ar fi legat de unul din rigide, cel puțin pentru un moment foarte scurt δt; efectul frecării de alunecare se poate, deci, asimila cu efectul mișcării ideale a unui punct material pe o suprafață.

În mișcarea de alunecare, cu frecare, punctul material de contact al rigidului (mobil) coincide, în permanență, cu punctul geometric de contact al rigidului cu suprafața fixă.

Putem, așadar, admite că legile frecării de alunecare pentru solide sînt aceleași ca pentru punctul material. E necesar totuși să introducem, în expresiile legilor frecării, elementul nou σ care înseamnă elementul superficial, foarte mic, dar finit, al suprafețelor în contact.

Legile frecării de alunecare (v. § 104):

a) Frecarea *statică* (aderența) este dată de condiția:

$$R_a = f_0 \sigma N \tag{21.1}$$

unde f_0 este „coeficientul de frecare statică", σ suprafața de contact, iar N reacțiunea normală, cîtime esențial pozitivă.

b) Frecarea *dinamică* este dată de legea lui *Coulomb* și *Morin*:

$$\overline{R} = -\frac{\overline{v}}{v} f \sigma N \tag{21.2}$$

unde $f < f_0$, este „coeficientul de frecare dinamică", coeficient, în general, mai mic decît cel de frecare statică. Coeficienții f_0 și f sînt constante de material. Starea de asprime a suprafețelor în contact influențează valorile coeficienților f_0 și f, astfel încît f poate varia, pentru suprafețe care nu sînt perfect uscate, cu viteza relativă a celor două corpuri.

Nu există formule precise care să ne dea aceste variații. Coeficienții de frecare sînt deduși experimental, prin încercări. Legea lui *Coulomb-Morin*, pentru suprafețe perfect uscate, consideră pe f independent de viteză.

Conul de frecare. O imagine geometrică a relațiilor între coeficienții de frecare, se obține considerînd conul de frecare cu vîrful în punctul de contact P; anume, conul de rotație avînd unghiul la vîrf φ_0 dat de relația:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = f_0$$

și ca axă, normala suprafeței fixe (de sprijin).

Scanned with OKEN Scanner

Cînd rigidul S_1 se mișcă astfel încît să rămînă mereu în contact cu suprafața S_2, reacțiunea suprafeței în punctul de contact P (rezultanta reacțiunei normale și frecării), va fi cuprinsă totdeauna în interiorul conului de frecare, căci:

$$\operatorname{tg}\varphi = f < f_0.$$

Așadar, cînd reacțiunea suprafeței ajunge pe o generatoare a conului de frecare, mișcarea încetează. Această proprietate ne procură o condiție de echilibru (sau de repaus).

210. **Fenomenul de „autoblocare".** În problemele de Mecanică se studiază fenomenele de mișcare continuă determinate *univoc* prin legile de mișcare ale Mecanicii, inclusiv *legile frecării*, și prin condițiile inițiale. Există totuși împrejurări cînd efectul de frecare întrerupe complet o mișcare, posibilă din punct de vedere geometric dacă nu ar fi fost frecarea. Un astfel de efect de discontinuitate este cunoscut sub numele de „autoblocare", cînd se produce o stare de echilibru care persistă oricît de mari sînt forțele exterioare solicitante.

211. **Obiecțiile lui P. Painlevé.** În celebrele sale „Leçons sur le frottement", *Painlevé* prezintă unele exemple de contradicție între concluziile teoretice ale legilor frecării, așa cum sînt date de regulile și legile empirice, și rezultatele experimentale. S-ar părea că ne-am afla în situația de a renunța la principiul *determinismului mecanic* (T. Levi-Civita, vol. II, p. 60). Să ilustrăm, printr-un exemplu datorit lui Painlevé, contradicția semnalată de acest autor: mișcarea unui disc circular greu, *neomogen*, care se rostogolește și alunecă, într-un plan vertical, sprijinindu-se pe o dreaptă orizontală fixă (aspră) astfel încît reacțiunea normală $N > 0$.

Avem o mișcare plană. Luăm planul vertical drept plan (x,y) și ca axă x, dreapta Ox, fixă, pe care este obligat să se miște discul. Fie r_0 raza cercului și m masa discului. Fie v_0 viteza orizontală a centrului geometric C al discului și ω viteza unghiulară, avînd ca sens pozitiv sensul pozitiv de rotație în jurul unei axe Oz perpendiculară pe planul discului, astfel încît triedrul O,x,y,z să fie drept. Discul nefiind omogen, centrul său de greutate G va avea coordonatele x_0, y_0, față de un sistem de axe trecînd prin C și paralele cu Oxy. Fie r_G distanța $\overline{CG}$. Avem:

$$r_0 = r_G \cos\theta\,; \quad y_0 = r_G \sin\theta$$

θ fiind unghiul făcut de $\overline{CG}$ cu direcția fixă (axa x). Cum:

$$\bar{v}_0 = \bar{\omega} \times \bar{r}_G$$

rezultă:

$$\dot{x}_0 = -\omega y_0\,; \quad \dot{y}_0 = \omega x_0.$$

Fie R frecarea de alunecare. După ecuațiile (7.6) § 103, vom avea, pentru mișcare, ecuațiile deduse din teorema impulsului:

$$m\frac{d}{dt}(v_0 - \omega y_0) = R\,; \quad m\frac{d}{dt}(\omega x_0) = N - mg. \tag{21.3}$$

Teorema momentului cinetic în raport cu centrul de greutate G ne dă:

$$J\dot{\omega} = (r_0 + y_0)\, R - x_0 N, \tag{21.4}$$

căci singurele forţe aplicate, care dau un moment diferit de zero, sînt reacţiunea normală N şi frecarea R, exercitate asupra punctului de contact P ($\overrightarrow{PG} = \bar{r}_0 + \bar{r}_G$). Fie $J = mk^2$ momentul de inerţie al discului relativ la G.

Eliminînd pe $\dot{\omega}$ între (21.3) şi (21.4) se obţine ecuaţia:

$$y_0\omega^2 - \frac{x_0}{J}[(r_0 + y_0)\, R - x_0 N] - \frac{N}{m} + g = 0. \tag{21.5}$$

Se poate arăta că este posibil să se realizeze tehnic (şi anume, într-o infinitate de noduri) un disc *neomogen* căruia să i se imprime o mişcare de aşa natură încît ecuaţia (21.5) să fie incompatibilă cu legile frecării (P. P a i n l e v é).

În adevăr, să admitem că satisfacem următoarele condiţii iniţiale: 1) poziţia discului în planul vertical să fie astfel încît $x_0 = r_G$, $y_0 = 0$; 2) viteza de translaţie a discului să fie $v_0 > 0$, iar viteza unghiulară $\omega_0 = 0$. În momentul iniţial după relaţia fundamentală (21.1) să admitem legea frecării statice:

$$R = -fN.$$

Din relaţia (21.5) deducem, spre a satisface condiţiile iniţiale astfel fixate:

$$\frac{N}{m}\left[1 - \frac{r_G}{k^2}(r_G + fr_0)\right] = g. \tag{21.6}$$

Să arătăm că se poate construi discul aşa fel încît expresia:

$$C = \frac{r_G}{k^2}(r_G + fr_0) \tag{21.7}$$

să aibă o valoare mai mare decît unitatea. Din această condiţie de construcţie tehnică rezultă după (21.6) că N ar urma să fie negativ, ceea ce contrazice legea experimental-empirică a frecării.

În acest scop este suficient să ne aranjăm astfel încît neomogenitatea discului să fie produsă prin adăugarea la masa m, a unui disc omogen, de masă m_1, aşezată într-un punct excentric M al discului. Masa aditivă şi poziţia ei pe disc să satisfacă la condiţiile:

$$r_M = \overline{CM} < r_G\,; \qquad mr_G = m_1 r_M\,.$$

Să punem $m = m_0 + m_1$ şi $\varepsilon = \frac{m_1}{m_0}$. Rezultă:

$$r_G = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} r_M\,. \tag{21.8}$$

Raza de giraţie k se calculează aplicînd teorema lui H u y g e n s (§ 172): momentul de inerţie al masei m_0 în raport cu C este $\frac{1}{2} mr_0^2$, iar momentul de inerţie în raport cu G este $\frac{m_0}{2} r_0^2 + m_0 r_G^2$. Aşadar:

$$mk^2 = m_0\left(\frac{1}{2} r_0^2 + r_G^2\right) + m_1 (r_M - r_G)^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind valoarea lui r_G din (21.8), obținem:

$$k^2 = \frac{1}{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{2}r_0^2 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}r_M^2\right);$$

de unde rezultă pentru cîtimea (21.7) expresia:

$$C = 2\varepsilon r_M \frac{\varepsilon r_M + (1+\varepsilon) f r_0}{2\varepsilon r_M^2 + (1+\varepsilon) r_0^2}.$$

Din momentul ce, prin construcție, sînt fixate mărimile r_0 (raza discului), f (coeficientul de frecare statică) și r_M (poziția masei aditive pe disc), cîtimea C apare ca o funcție (rațională) și pozitivă de ε; și anume, cîtimea C crește peste orice limită odată cu ε. Este suficient deci să luăm pe m_1 suficient de mare, pentru ca, începînd de la o valoare dată finită a lui m_1, cîtimea C să fie mai mare ca unitatea.

Putem așadar, să găsim un dispozitiv tehnic, care să contrazică legile frecării (Paradoxul lui P a i n l e v é).

Rezolvarea acestui paradox se datorește lui F e l i x K l e i n [1]). Acest autor consideră mișcarea imaginată de P a i n l e v é ca o mișcare ce nu satisface premiselor de continuitate admise în structura ecuațiilor Mecanicii clasice și implicate în dispozitivul experimental pentru stabilirea legilor frecării. Totul depinde, în problema citată mai sus, de modul cum este lansat discul, în momentul inițial: sîntem, de fapt, în prezența unei *mișcări impulsive*, care produce, în momentul lansării discului, fenomene complicate de elasticitate, care modifică legile statice admise pentru frecare.

Nu poate fi vorba, în nici un caz, de o lezare a principiului de cauzalitate, care stă încă neclintit la baza întregii Fizici actuale.

212. **Echilibrul scării.** Să considerăm, pentru simplificare, scara AB de lungime invariabilă, așezată în planul vertical și sprijinită cu frecare pe sol în A (plan orizontal) și pe zid (plan vertical) în B, avînd în cele două puncte de sprijin A și B același coeficient de frecare statică $f_0 = \operatorname{tg}\varphi_0$. Pe această scară se deplasează o persoană, astfel încît centrul de greutate comun al scării și al persoanei să fie în punctul G, variabil (fig. 70).

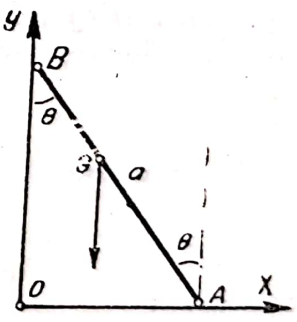

Fig. 70

Luăm ca axe x și y chiar dreptele după care cele două plane de sprijin sînt tăiate de planul vertical al scării.

Să construim în A și B conurile de frecare în jurul normalelor din A și B. Forțele care acționează asupra scării sînt reacțiunile din A și B și greutatea din G. Condițiile ca A și B să rămînă în repaus sînt, după cele spuse mai sus, ca reacțiunile în A și B să rămînă în interiorul conurilor de frecare. Apoi, pentru ca scara să nu se deplaseze, teorema centrului de greutate cere ca toate forțele să aibă o rezultantă nulă; așadar, reacțiunile trebuie să facă echilibru greutății din G.

Prin urmare, reacțiunile se întîlnesc în punctul M interior patrulaterului comun celor două unghiuri de frecare. Acest punct, pentru ca echilibrul să existe, trebuie să se găsească și pe verticala dusă prin G (direcția greutății)[2]). Această

---

[1]) *F. Klein.* Zur Painlevé-s Kritik der Coulombischen Reibungskräfte; Gesamm. math. Abh. II. Berlin 1922.

[2]) Conform teoremei: „cînd trei vectori își fac echilibru, ei sînt concurenți" (Anexa I, § 23).

condiție este și suficientă, căci, dacă verticala prin G traversează aria patrulaterului, putem lua pe ea un punct M și să transportăm în el greutatea G; după care, putem descompune această forță după direcțiile MA și MB, astfel încît componentele respective să fie anihilate de reacțiunile în A și B ale solului și ale zidului.

Fie θ unghiul $(\widehat{BA}, \widehat{BO})$ sau unghiul lui AB cu direcția normală în A. Dacă $\theta < \varphi_0$, segmentul AB se va afla în întregime în interiorul conului de frecare din A. De asemenea, o parte a unghiului de frecare din B se va găsi în interiorul conului de frecare din A. Există deci un domeniu comun, iar verticala prin punctul G (așezat pe AB) trece prin interiorul acestui domeniu. Așadar, în acest caz echilibrul este posibil.

În cazul cînd $\theta > \varphi_0$ domeniul comun celor două unghiuri de frecare din A și B este un patrulater. Abscisa punctului P cel mai apropiat de verticala OB va fi dată de ecuațiile celor două drepte BP și AP:

$$y - a\cos\theta = \operatorname{tg}\varphi_0 \cdot x$$

$$y = -\operatorname{ctg}\varphi_0 (x - a\sin\theta).$$

Abscisa punctului P va fi $a\sin(\theta - \varphi_0)\cos\varphi_0$.

Prin urmare, ca să existe echilibru, abscisa centrului de greutate trebuie să verifice relația:

$$r_{Gx} > a\sin(\theta - \varphi_0)\cos\varphi_0.$$

Dar, dacă m și m_1 sînt masele scării și a persoanei de pe scară, iar x_1 abscisa persoanei pe scară, avem:

$$r_{Gx} = \frac{m\frac{a}{2}\sin\theta + m_1 x_1}{m + m_1}$$

Pentru ca echilibrul să existe, ori unde s-ar afla persoana pe scară, trebuie ca relația precedentă să fie verificată pentru $x_2 = 0$; ceea ce ne dă condiția:

$$\operatorname{ctg}\theta > \frac{m_1}{(m + m_1)\sin 2\varphi_0} + \operatorname{ctg} 2\varphi_0.$$

Deci, $\varphi_0 < \theta_{max} < 2\varphi$, unde θ_{max} este o limită superioară pentru θ.

213. **Dispersia energiei.** Frecarea dinamică produce o pierdere de energie. În adevăr, din ecuația de mișcare:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F} - \bar{t} f N$$

pentru punctul de contact al celor două corpuri, rezultă, prin integrare:

$$m\frac{v^2}{2} = \int \bar{F} d\bar{r} - \int f N ds + h$$

sau încă:

$$E_c + E_p = h - \int f N ds.$$

Cum ultima integrală este totdeauna pozitivă, rezultă o scădere a energiei totale a rigidului (imaginat ca fiind redus la un punct material) care alunecă pe suprafața unui alt rigid fix. Această energie se pierde, transformîndu-se în energie degradată; de exemplu, căldură.

214. **Frecarea de rostogolire.** În mișcarea unui rigid care rămîne mereu în contact cu o suprafață fixă, pe lîngă frecarea de alunecare, ia naștere și

Scanned with OKEN Scanner

un cuplu al cărui moment $\overline{M}_r$ este așezat în planul tangent comun celor două suprafețe în contact, vector localizat în punctul de contact P. Acest moment se opune mișcării de rostogolire, în timpul căreia punctul material de contact al rigidului variază mereu, căci mereu alt punct al rigidului vine în punctul geometric de contact. Deci, momentul cuplului frecării de rostogolire este normal pe curba descrisă de punctul de contact și îndreptat în sens contrar rotației instantanee care produce rostogolirea.

Experiența dovedește că se poate determina, și în acest caz, un coeficient al frecării de rostogolire f_r astfel încît:

$$M_r = f_r N.$$

După experiențele lui Coulomb și Morin acest coeficient este independent de curbura normală a suprafeței care se rostogolește.

Momentul cuplului frecării de rostogolire este echivalent cu un sistem de două forțe, una egală cu $-\overline{N}$ și așezată în punctul de contact P și una egală cu $+\overline{N}$ și așezată la o distanță f_r de prima. A compune momentul $\overline{M}_r$ cu reacțiunea $\overline{N}$, înseamnă a compune $\overline{N}$ cu sistemul de forțe echivalent cuplului $\overline{M}_r$; rezultă o forță egală cu $+\overline{N}$, dar aplicată într-un punct P' al corpului așezat la o distanță f_r de $\overline{N}$ înspre regiunea punctelor rigidului care se apropie de suprafața pe care se efectuează rostogolirea: efectul frecării de rostogolire constă în deplasarea reacțiunii $\overline{N}$ din punctul de sprijin P „înainte" la o distanță de normala în P egală cu f_r.

215. **Frecarea de pivotare.** Un cuplu de moment $\overline{M}_p$ normal suprafeței de contact al celor două corpuri este frecarea de pivotare. Acest moment se opune mișcării de pivotare în jurul normalei la suprafață și este dirijat după normala suprafeței în sens contrar mișcării de pivotare instantanee.

Dacă rigidul mobil are tendința să efectueze o mișcare de *sfredelire*, (pivotare și pătrundere), această mișcare va fi stînjenită atît de momentul frecării de pivotare cît și de reacțiunea normală a suprafeței, (care se opune pătrunderii).

Experiența conduce, și în cazul pivotării, la stabilirea empirică a unei legi de forma:

$$M_p = f_p N$$

permițînd determinarea unui coeficient f_p al frecării de pivotare.

216. **Observație.** Din cele ce preced s-ar părea că frecarea este o forță capabilă, exclusiv, să împiedice mișcarea. Este însă cunoscut din aplicațiile practice că, deseori, efectul de frecare este folosit, dinpotrivă, la *generarea* unei mișcării: de exemplu, prin transmiterea mișcării unui corp A altui corp B cu ajutorul unei curele de transmisie. La începutul mișcării cureaua alunecă pe axul corpului B pînă cînd, prin frecare, devine aderentă și antrenează corpul B în mișcare.

În general, concepțiile fizice asupra fenomenului de frecare sînt destul de complicate și nu permit formularea unei teorii exacte și complete. Coulomb pornea de la ideia că efectul de frecare la solide ar fi analog fenomenelor de capilaritate de la lichide, deci că am avea de a face cu efecte superficiale, extrem de complicate. M. Brillouin încearcă o teorie

cinetică a frecării, făcînd să intervină forţele centrale intermoleculare, fără însă a reuşi să construiască o teorie satisfăcătoare a acestui fenomen. Chestiunea a fost reluată de M a x B o r n, cu rezultate importante.

217. **Aplicaţie. Mişcarea de pornire a trenului.** Să aplicăm consideraţiile noastre la mişcarea unui tren în momentul pornirii din repaus (fig. 71). Să considerăm „roţile de tracţiune" de rază r ale locomotivei reprezentate prin roata O de masă m, legată de perechea ei prin axul orizontal care trece prin O, în jurul căruia se roteşte cu viteza ω. Fie $\overline{G}$ greutatea proprie a trenului şi încărcării.

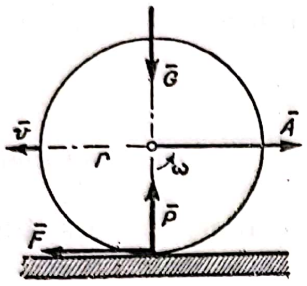

Fig. 71

Cînd trenul porneşte în direcţia $\overline{v}$, asupra axului se exercită reacţiunea $\overline{A}$. Fie $\overline{P}$ presiunea şinelor în direcţia normală şi fie $\overline{F}$ frecarea de alunecare ce are loc între roţi şi şine, pozitivă spre $\overline{v}$ [1]). Fie, în raport cu axul, $\overline{M_R}$ momentul rezistenţei angrenajelor şi $\overline{M}$ momentul exercitat de motor asupra roţilor; mărimi cunoscute.

Vom aplica, pentru studiul mişcării, teoremele generale. Teorema centrului de greutate ne dă componentele pe direcţia paralelă şi normală mişcării:

$$mr\dot{\omega} = F - A; \quad 0 = G - P. \tag{21.9}$$

Ecuaţia a doua din (21.9) ne dă forţa P. Teorema impulsului în raport cu O, ne dă ecuaţia (J fiind momentul de inerţie al roţilor de tracţiune considerate):

$$J\dot{\omega} = M - M_R - Fr. \tag{21.10}$$

Momentul de rostogolire, fiind paralel cu axa de rotaţie, nu intervine. Momentul de pivotare este nul. Avem deci trei ecuaţii pentru necunoscutele P, $\dot{\omega}$, F şi A. Mai putem găsi o ecuaţie dacă scriem teorema centrului de greutate pentru tren (fără roţile de tracţiune). Cum trenul are acceleraţia $r\dot{\omega}$, avem:

$$m''r\dot{\omega} = \Sigma A - T \tag{21.11}$$

unde m'' este masa trenului fără roţile de tracţiune; Σ se extinde la toate perechile de roţi de tracţiune şi T (cunoscut) este rezistenţa suferită de tren din cauza aerului şi frecării (cu excluderea roţilor de tracţiune).

Din prima ecuaţie (21.9) şi ecuaţia (21.10) deducem pe A:

$$A = \frac{1}{r}[M - M_R - (J + mr^2)\,\dot{\omega}]. \tag{21.12}$$

Dacă ducem valoarea (21.11) în (21.12), obţinem:

$$\Sigma A = \frac{1}{r}[\Sigma M - \Sigma M_R - \Sigma (J + mr^2)\,\dot{\omega}] = T + m''r\dot{\omega}$$

de unde:

$$\dot{\omega} = \frac{\Sigma M - \Sigma M_R - rT}{m''r^2 + \Sigma (J + mr^2)} \tag{21.13}$$

ecuaţie care ne dă pe ω.

[1]) Aceasta să nu pară în contrazicere cu legea frecării. În adevăr, punctul de contact dintre şină şi roată, prin mişcarea de rotaţie în jurul axului, imprimată roţii prin dispozitive speciale, tinde să alunece în direcţia $-\overline{v}$. Acestei tendinţei se opune frecarea de alunecare.

Scanned with OKEN Scanner

După aceasta, din (21.10) deducem şi pe $\overline{F}$:

$$F = \frac{1}{r}(M - M_R - J\dot{\omega}). \tag{21.14}$$

Teorema centrului de greutate, pentru întregul tren, se obţine înlocuind $\Sigma M - \Sigma M_R$ din (21.13); anume:

$$\Sigma F = T + \left(m'' + \Sigma \frac{J}{r^2}\right) r\dot{\omega}. \tag{21.15}$$

În această relaţie ΣF este o cantitate pozitivă. În adevăr, putem lua pe M suficient de mare, astfel încît

$$M > M_R + (J + mr^2)\,\dot{\omega}\,.$$

Din (21.12) rezultă atunci că A este o mărime pozitivă. Relaţia (21.9) ne arată că, în acest caz, şi cîtimea F va fi pozitivă.

Aşadar, în momentul plecării trenului, frecarea $\overline{F}$ este îndreptată în sensul mişcării $\overline{v}$. În ceea ce priveşte rezistenţa totală T, ea se descompune în rezistenţa aerului R_a şi a frecării F' a „roţilor libere" de rază r'; deci:

$$T = R_a + \Sigma F'.$$

Pentru o singură roată liberă de masă m' aplicăm aceleaşi ecuaţii (21.12) pentru A' şi (22.14) pentru F', ţinînd seamă numai că, pentru aceste roţi, $M = O$. Vom avea înlocuind M_R prin momentul rezistenţelor roţilor libere $-M'_R$ (pozitiv în sens contrar mişcării):

$$A' = \frac{1}{r'}\left[M'_R - (J' + m'r'^2)\,\dot{\omega}\right]; \quad F' = \frac{1}{r'}(M'_R - J'\dot{\omega})$$

şi deci:

$$T = R_a + \Sigma \frac{1}{r'}(M'_R - J'\dot{\omega}). \tag{21.16}$$

Acceleraţia trenului va fi după (21.13) şi (21.16), eliminînd pe T:

$$a = r\dot{\omega} = r\,\frac{\Sigma M - \Sigma M_R - rR_a - \dfrac{r}{r'}\Sigma M'_R}{(m'' + \Sigma m)\,r^2 + \Sigma J - \dfrac{r}{r'}\Sigma J'} \tag{21.17}$$

Termenii ΣJ şi $\Sigma J'$, la numitor, sînt foarte mici în raport cu termenul $(m'' + \Sigma m)\,r^2$, unde apare masa totală a trenului $m'' + \Sigma m$. Putem deci scrie, pentru (21.17):

$$a = r\dot{\omega} = \frac{\Sigma M - \Sigma M_R - rR_a - \dfrac{r}{r'}\Sigma M'_R}{(m'' + \Sigma m)\,r^2} \tag{21.17'}$$

Din această expresie scoatem concluziile următoare, care au deosebită însemnătate tehnică.

1. Pentru ca rezistenţele roţilor libere $\Sigma M'_R$ să nu influenţeze mişcarea, micşorînd acceleraţia, este necesar ca r' să fie mare; deci cu cît roţile libere sînt de diametru mai mare cu atît vor micşora mai puţin acceleraţia, prin frecare.

2. Roţile de tracţiune trebuie să fie mici pentru ca acceleraţia să fie mare.

Scanned with OKEN Scanner

Partea a patra

IMPULSII ȘI CIOCNIRI DE CORPURI RIGIDE

Capitolul XXII

IMPULSII

218. **Generalități.** În cazul punctului material și al sistemelor de puncte materiale, am stabilit ecuațiile de mișcare sub acțiunea unei forțe foarte puternice care durează însă un interval de timp extrem de scurt. O asemenea acțiune am numit-o „impulsie". Pentru durata unei impulsii, forțele obișnuite, finite, cum este în special gravitatea, vor putea fi neglijate față de forțele de impulsie.

În cazul rigidului, putem aplica teoremele generale pe care le-am scris pentru sistemul de puncte materiale, ținînd mereu seamă de faptul că, în această problemă, nu avem de deosebit coordonatele legate de solid, de cele fixe în spațiu, deoarece pentru durata foarte mică a unei impulsii, sistemul de axe mobil suferă o deplasare suficient de mică și poate fi considerat ca fix.

Ca aplicație a teoremelor generale ale sistemului de puncte materiale, vom trata mai întîi cazul rigidelor acționate la mișcare sub influența unei impulsii date.

219. **Impulsii aplicate unui rigid mobil în jurul unei axe fixe.** Axa fixă Oz este determinată în solid, prin fixarea a două puncte O și O' ale solidului. În momentul $t=t_0$ aplicăm solidului impulsiile $\overline{P}_s$, în fiecare punct (x_s, y_s, z_s) raportat la un sistem de axe legat de solid, avînd originea în O și axa z pe OO'. Dacă la începutul efortului viteza unghiulară a solidului ω_0 era cunoscută , după aplicarea impulsiilor, ea va deveni ω_1, necunoscută. Datorită reacțiunilor, rigidul va exercita asupra punctelor O și O' două impulsii $\overline{P}_0$ și $\overline{P}'$. Dacă luăm în considerație aceste două impulsii, putem considera rigidul drept liber, deci ca un sistem material, și-i putem aplica teoremele generale.

Teorema impulsului ne dă:

$$\delta \sum_s m_s \dot{\overline{r}}_s = \sum \overline{P}_s + \overline{P}_0 + \overline{P}' \tag{22.1}$$

unde am însemnat cu δ variația finită a impulsului $m_s \dot{\overline{r}}_s$ a fiecărui punct în care este aplicată impulsia. $\overline{P}_s$ în intervalul de timp foarte scurt, cît durează efectul impulsiei. $\overline{r}_s$ este vectorul de poziție în raport cu O.

Teorema momentului cinetic ne dă, de asemenea:

$$\delta \sum_s (\overline{r}_s \times m_s \dot{\overline{r}}) = \sum_s \overline{r}_s \times (\overline{P}_s + \overline{P}') \tag{22.2}$$

căci impulsia $\overline{P}_0$ aplicată punctului O, în care am luat momentul, este nulă.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă proiectăm ecuația (22.2) pe axa z, și însemnăm cu mk^2 momentul de inerție al solidului în raport cu Oz, obținem:

$$mk^2\delta\omega = \bar{k}\sum_s (\bar{r}_s \times \bar{P}_s) \tag{22.3}$$

căci $\bar{P}'$ întîlnește axa Oz și are moment nul în raport cu această axă.

Proiectînd pe axele x și y (notînd $\overline{OO'} = h$), ecuația (22.2) ne dă:

$$\begin{aligned} \bar{i}\,\delta\sum_s (\bar{r}_s \times m_s\dot{\bar{r}}_s) &= \bar{i}\sum_s (\bar{r}_s \times \bar{P}_s) - hP'_y \\ \bar{j}\,\delta\sum_s (\bar{r}_s \times m_s\dot{\bar{r}}_s) &= \bar{j}\sum_s (\bar{r}_s \times \bar{P}_s) + hP'_x \end{aligned} \tag{22.4}$$

Ecuațiile (22.1), (22.3) și (22.4) rezolvă problema; ecuația (22.3) reprezentînd ecuația mișcării, adică relația de determinare a lui $\delta\omega$, iar celelalte folosind la determinarea impulsiilor de reacțiuni $\bar{P}_0$ și $\bar{P}'$.

Aceste ecuații pot fi scrise sub o formă mai convenabilă, dacă observăm că:

$$\bar{v}_s = \dot{\bar{r}}_s = \bar{\omega} \times \bar{r}_s$$

deci:

$$\dot{x}_s = -\omega y_s\,; \quad \dot{y}_s = \omega x_s\,; \quad \dot{z}_s = 0.$$

Avem atunci sistemul scalar:

$$\begin{aligned} -(\Sigma_s m_s x_s z_s)\,\delta\omega &= \Sigma_s (y_s P_{sz} - z_s P_{sy}) - hP'_y \\ -(\Sigma_s m_s y_s z_s)\,\delta\omega &= \Sigma_s (z_s P_{sx} - x_s P_{sz}) + hP'_x \\ mk^2\delta\omega &= \Sigma_s (x_s P_{sy} - y_s P_{sx}) \end{aligned} \tag{22.5}$$

dedus din ecuațiile (22.3) și (22.4) ale momentului cinetic, și:

$$\begin{aligned} -(\Sigma_s m_s y_s)\,\delta\omega &= \Sigma_s P_{sx} + P_{0x} + P'_x\,, \\ +(\Sigma_s m_s x_s)\,\delta\omega &= \Sigma_s P_{sy} + P_{0y} + P'_y\,, \\ 0 &= \Sigma_s P_{sz} + P_{0z} + P'_z\,; \end{aligned} \tag{22,5'}$$

dedus din ecuația (22.1) a impulsului. Ultima ecuație (22.5), a mișcării, determină pe $\delta\omega$, iar celelalte determină impulsiile reacțiunii.

Scanned with OKEN Scanner

220. **Caz particular: o singură impulsie.** Presupunem că avem o singură impulsie $\overline{P}$, aplicată solidului în punctul (x, y, z) (fig. 72). Să cercetăm dacă este posibil ca să alegem această impulsie astfel încît impulsiile suportate de punctele O și O' să dispară:

$$\overline{P}_0 = 0 \quad \text{și} \quad \overline{P}' = 0.$$

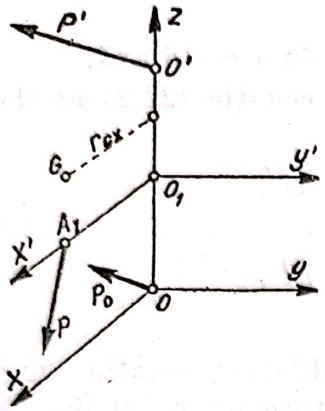

Fig. 72

A treia ecuație (22.5′) ne dă (suprimînd indicele „prim"):

$$P_z = 0$$

ceea ce înseamnă că impulsia trebuie să fie perpendiculară pe axa de rotație. Luăm planul (x,y) astfel ca să conțină impulsia $\overline{P}$. În acest plan să luăm axa x' perpendiculară pe impulsia $\overline{P}$. Vom avea:

$$P_x = 0; \quad P_y = P \neq 0; \quad \text{iar} \quad z_1 = 0.$$

În acest sistem de coordonate ecuațiile (22.5), (22.5′) devin:

$$\begin{aligned} &\sum_s m_s y'_s = 0; \qquad \sum_s m_s x'_s \delta\omega = P \\ &\sum_s m_s x'_s z'_s = 0; \qquad \sum_s m_s y'_s z'_s = 0 \\ &\text{(căci } \delta\omega \neq 0) \end{aligned} \tag{22.6}$$

și ecuația de mișcare:

$$mk^2\,\delta\omega = x_1 P. \tag{22.7}$$

Cum momentele de deviație sînt nule, rezultă că axa Oz trebuie să fie o axă principală de inerție pentru O_1. Prima ecuație (22.6) exprimă condiția ca centrul de greutate G să fie așezat în planul zOx'_1 perpendicular pe impulsie. În sfîrșit, cum:

$$\sum_s m_s x'_s = m r_{Gx},$$

din ecuația (22.7) și a doua ecuație (22.6) scoatem condiția:

$$x_1 = \frac{mk^2}{P_1}\,\delta\omega = \frac{mk^2}{P_1}\,\frac{P_1}{m r_{Gx}} = \frac{k^2}{r_{Gx}} = \overline{O_1 A_1}.$$

221. **Centru de impulsie.** Din cele de mai sus rezultă că, pentru ca o impulsie asupra solidului să nu acționeze asupra axei, este necesar și suficient ca rigidul mobil în jurul unei axe fixe să posede ca axă principală, pentru unul din punctele axei O_1, însăși această axă de rotație. Dacă această condiție este împlinită, atunci impulsia trebuie să fie așezată în planul dus prin punctul O_1, și perpendicular pe axa de rotație Oz. Ea trebuie să fie normală pe planul determinat de centrul de greutate al solidului și axă, într-un punct A_1 al acestui plan, situat în direcția și sensul poziției centrului de greutate, la o distanță de axă egală cu $\frac{k^2}{r_G}$, dacă r_G este distanța centrului de greutate la axă.

Punctul A_1 se numește „centru de impulsie" relativ la axul Oz.

Scanned with OKEN Scanner

222. **Aplicație: pendulul balistic.** Acesta este un aparat destinat, între altele, măsurării vitezei proiectilelor. El este un pendul suspendat în punctul O, care se termină cu un receptor din fontă, plin cu un material vîscos și moale (de pildă, pămînt) care primește proiectilul și-l oprește (fig. 73). Fie θ unghiul pe care-l face pendulul cu verticala după impulsia datorită ciocnirii cu proiectilul de masă m, de viteză v și la distanță a de O.

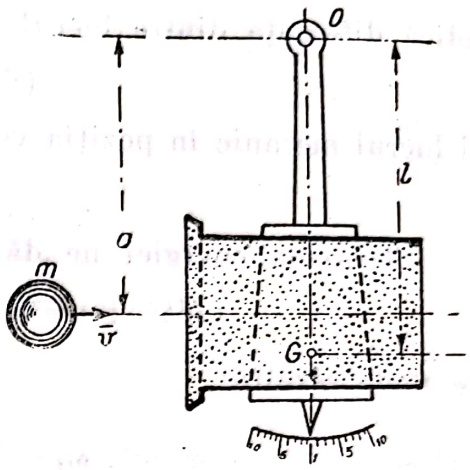

Fig. 73

Fie Mk^2 momentul de inerție al pendulului relativ la punctul O, și l distanța centrului său de greutate la axul de suspensie proiectat în O.

Teorema momentului cinetic, aplicată sistemului format din pendul și proiectil, ne dă următorul rezultat. Fie ω_1 viteza unghiulară de rotație a pendulului după aplicarea impulsiei. Cum pendulul este în repaus înaintea impulsiei și numai proiectilul este în mișcare, momentul cinetic înaintea impulsiei va fi mva în raport cu punctul O.

După impulsie, momentul cinetic mva în raport cu punctul O devine:

$$Mk^2\omega_1 + ma^2\omega_1.$$

Impulsia imprimată de proiectil este, pentru sistemul proiectil + pendul, o impulsie interioară sistemului. Alte impulsii exterioare nu există. Aceasta înseamnă, după teoremele generale, că variația momentului cinetic este nulă. Rezultă că momentul cinetic este constant, deci:

$$mva = Mk^2\omega_1 + ma^2\omega_1$$

de unde deducem valoarea vitezei proiectilului:

$$v = \frac{Mk^2 + ma^2}{ma}\omega_1$$

dacă am cunoaște pe ω_1. Această viteză unghiulară se măsoară observîndu-se unghiul maxim θ de deviație a pendulului față de poziția de echilibru, din cauza impulsiei.

Pentru a găsi relația dintre ω_1 și mărimea observabilă θ, vom aplica teorema energiei.

Energia cinetică, obținută cînd pendulul trece de la poziția verticală la poziția dată de unghiul maxim θ este:

$$\frac{1}{2} M k^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m a^2 \omega_1^2.$$

În momentul opririi sistemului „proiectil plus pendul" energia cinetică devine zero. Prin urmare, această expresie reprezintă variația energiei cinetice.

Lucrul mecanic al forţelor exterioare (greutatea pendulului şi a proiectilului) este:

$$-(Mgl + mga)(1 - \cos\theta)$$

adică diferenţa dintre lucrul mecanic în poziţia de deviaţie maximă:

$$(Mgl + mga)\cos\theta$$

şi lucrul mecanic în poziţia verticală:

$$Mgl + mga\,.$$

Teorema energiei ne dă, aşadar:

$$(Mk^2 + ma^2)\ \omega_1^2 = 2g\,(Ml + ma)(1 - \cos\theta)$$

de unde rezultă:

$$\omega_1 = 2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{g\,(Ml + ma)}{Mk^2 + ma^2}}$$

ceea ce ne dă pentru viteza proiectilului:

$$v = \frac{2}{ma}\sqrt{g\,(Ml + ma)\,(Mk^2 + ma^2)}\sin\frac{\theta}{2}$$

care se determină prin citirea deviaţiei maxime θ pe cadranul indicator.

Este util ca pendulul să primească proiectilul la o distanţă a de axul de suspensie O, astfel încît axul să nu sufere nici o impulsie. Acest ax este ax principal pentru punctul O, dacă pendulul este simetric în raport cu planul vertical în care se mişcă centrul său de greutate.

În aceste condiţii, pentru ca axul să nu suporte impulsii, trebuie ca proiectilul să se fixeze în centrul de impulsie, adică într-un punct al verticalei care conţine centrul de greutate, la o distanţă a de ax, dată de:

$$al = k^2.$$

Aceste condiţii sînt menite să producă o cît mai mică uzare a aparatului, nezdruncinînd axul de suspensie; viteza este dată, atunci, de expresia:

$$v = \frac{2}{m}(Ml + ma)\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\frac{\theta}{2}\,.$$

223. **Impulsii aplicate unui rigid mobil în jurul unui punct fix.** Un corp rigid, mobil în jurul punctului fix O, este supus în momentul t_0 unor impulsii $\overline{P}_s$, care-i vor schimba, în intervalul infinit de scurt (t_0, t_1), starea de mişcare iniţială.

Impulsiile exterioare, aplicate, sînt impulsiile $\overline{P}_s$ şi impulsia $\overline{P}_0$, datorită reacţiunii punctului fix O. Luăm ca axe de coordonate, axele principale de inerţie relative la punctul O, pe care le putem considera ca fixe în timpul cît acţionează impulsia. Fie ω_0 viteza unghiulară înainte şi ω_1 după aplicarea impulsiei; $\overline{M}$ momentul impulsiilor exterioare şi A, B, C, momentele de inerţie principale relative la cele trei axe.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema momentului cinetic ne spune că variația momentului cinetic este egală cu momentul total al impulsiilor exterioare, care se reduce la momentul lui $\overline{P}_s$, căci $\overline{P}_0$ trece prin punctul O.

Ecuația de mișcare va fi, așadar:

$$\overline{K}_1 - \overline{K}_0 = \overline{M}$$

sau, $\overline{K}$ având componentele $A\omega_x$, $B\omega_y$, $C\omega_z$

$$\begin{aligned} A(\omega_{1x} - \omega_{0x}) &= M_x \\ B(\omega_{1y} - \omega_{0y}) &= M_y \\ C(\omega_{1z} - \omega_{0z}) &= M_z. \end{aligned} \tag{22.8}$$

care determină pe ω_1; aceste valori devin „condiții inițiale" pentru mișcarea ulterioară.

Pentru calculul reacțunii $\overline{P}_0$ în punctul O, aplicăm teorema impulsului:

$$\delta \sum_s m_s \dot{\overline{r}}_s = \sum_s \overline{P}_s + \overline{P}_0. \tag{22.9}$$

În cazul unei singure impulsii de moment $\overline{M}$, corpul plecînd din repaus ($\omega_0 = 0$), se vede ușor că direcția vectorului de rotație instantanee $\overline{\omega}_1$ după impulsie este diametrul conjugat, prin raport cu elipsoidul de inerție, al planului ce trece prin M și punctul fix O.

În adevăr, însemnăm cu X, Y, Z coordonatele curente. Ecuația elipsoidului de inerție este:

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 1 = 0.$$

Planul ce trece prin O și $\overline{M}$ are ecuația:

$$XM_x + YM_y + ZM_z = 0$$

sau:

$$A\omega_{1x} X + B\omega_{1y} Y + C\omega_{1z} Z = 0.$$

Diametrul conjugat al acestui plan față de elipsoidul de inerție are deci ecuațiile:

$$\frac{X}{\omega_{1x}} = \frac{Y}{\omega_{1y}} = \frac{Z}{\omega_{1z}}$$

ecuații care sînt, în adevăr, ecuațiile analitice ale direcției vectorului $\overline{\omega}_1$.

224. **Impulsii aplicate unui rigid complet liber.** Rigidul să fie animat de o mișcare cunoscută, în momentul inițial t_0. În acest moment t_0 îi aplicăm impulsiile $\overline{P}_s$, care-i vor schimba starea de mișcare. Să raportăm mișcarea la trei axe fixe O, x, y, z.

Teorema impulsului ne dă, pentru mișcarea centrului de greutate, relația:

$$m(\overline{r}_G)_1 - m(\overline{r}_G)_0 = \sum_s \overline{P}_s. \tag{22.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm acum un sistem de coordonate $(G; x_1, y_1, z_1)$ cu originea în centrul de greutate G și direcțiile a trei axe principale relative la G. Fie $\overline{M}$ momentul impulsiilor $\overline{P}_s$ în raport cu G.

Teorema momentului cinetic ne dă atunci, însemnînd cu ω_x, ω_y, ω_z, proiecțiile pe acest sistem de coordonate [suprimînd, pentru simplificarea scrisului, indicele (1)]

$$\begin{aligned} A(\omega_x)_1 - A(\omega_x)_0 &= \sum M_x \\ B(\omega_y)_1 - B(\omega_y)_0 &= \sum M_y \\ C(\omega_z)_1 - C(\omega_z)_0 &= \sum M_z. \end{aligned} \tag{22.11}$$

Aceste ecuații determină cele șase necunoscute $\overline{r}_G$ și $\overline{\omega}$.

225. **Fixări subite.** Problema inversă impulsiilor se pune în cazul cînd un corp posedă o mișcare oarecare și, printr-o intervenție bruscă, imobilizăm unele din punctele sale. În acest caz, vitezele tuturor punctelor sistemului vor suferi variații finite subite, exprimate prin impulsii.

Aceste impulsii se deosebesc însă de cele *aplicate* prin faptul că nu sînt cunoscute, decît doar prin *efectul* lor. Dar este de observat că impulsia nu va fi măsurată numai de variația dată impulsului unui punct în care am aplicat impulsia inhibitoare, ci intervine și efectul necunoscut al reacțiunilor necunoscute.

Să lămurim acest efect printr-un exemplu:

Un corp rigid care se mișcă liber să fie fixat subit într-un punct A.

Cum se va mișca ulterior și cît de mare va fi impulsia necesară în acest scop?

Fie $\overline{v}$ viteza, înainte de fixare, a centrului de greutate; fie $\overline{\omega}$ și $\overline{\omega}'$ vitezele unghiulare înainte și după fixare; fie $\overline{K}_G$ momentul cinetic relativ la centrul de greutate și $\overline{K}_A$, $\overline{K}'_A$ momentele cinetice relative la A înainte și după impulsie; fie $\overline{GA} = \overline{r}_G$; atunci:

$$\overline{K}_A = \overline{K}_G - m\,\overline{r}_G \times \overline{v}. \tag{22.12}$$

După aplicarea impulsiei, G va avea viteza $-\overline{r}_G \times \overline{\omega}'$.

Teorema centrului de greutate ne dă:

$$m\left(-\overline{r}_G \times \overline{\omega} - \overline{v}\right) = -\overline{P} \tag{22.13}$$

însemnînd cu $\overline{P}$ impulsia aplicată pentru a produce fixarea.

Pe de altă parte, teorema momentului cinetic (relativ la punctul A) ne dă:

$$\overline{K}'_A - \overline{K}_A = 0. \tag{22.14}$$

Ecuația (22.13) ne dă valoarea impulsiei:

$$\overline{P} = m\left(\overline{v} + \overline{r}_G \times \overline{\omega}'\right)$$

dacă cunoaștem pe $\overline{\omega}'$.

Scanned with OKEN Scanner

Or, putem exprima energia de rotaţie în jurul punctului A după aplicarea impulsiei. Fie $E'_A = E'_A(\overline{\omega}')$ această energie. Ştim că, formal, (§ 38)

$$\overline{K}'_A = \frac{\partial E'_A}{\partial \overline{\omega}'}. \tag{22.14}$$

Această ecuaţie ne va da valoarea lui:

$$\overline{\omega}' = \overline{\omega}'(\overline{K}_A)$$

sau după (22.14):

$$\overline{\omega}' = \overline{\omega}'(\overline{K}'_A)$$

iar după (22.12):

$$\overline{\omega}' = \overline{\omega}'(\overline{K}_A - m\overline{r}_G \times \overline{v}) \tag{22.15}$$

valoare, care înlocuită în (22.4) ne dă mărimea impulsiei.

226. **Aplicaţie: mecanisme de orologerie.** Aceste mecanisme constau din dispozitive de roţi dinţate şi arcuri, care fac posibilă reîmprospătarea periodică a mişcării, la intervale foarte scurte, spre a nu se stinge prin frecare şi rezistenţe pasive.

Mişcarea unui ceasornic este o mişcare oscilatorie (perioadă $T_0 = 2\pi:\omega_0$) amortizată (coeficient $\varkappa$), dar întreţinută prin intervenţia unei forţe $F(t)$ care trebuie să fie periodică (perioada T), menţinută astfel cu ajutorul mecanismelor special imaginate în acest scop. Ele produc, la intervale foarte scurte ε, impulsii:

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{t_0 + (n-1)T}^{t_0 + nT + \varepsilon} F(u)\, du. \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Ecuaţia de mişcare a oscilatorului liniar poate fi scrisă:

$$\ddot{x} + 2\varkappa\dot{x} + (\omega_0^2 + \varkappa^2)\, x = F(t). \tag{22.16}$$

Integrala generală a acestei ecuaţii poate fi scrisă sub forma:

$$x(t) = x_0(t) + \varphi(t),$$

unde:

$$x_0(t) = \omega_0^{-1} e^{-\varkappa t} \sin \omega_0 t;\ \varphi(t) = \int_{t_0}^{t} F(u) \cdot x(t-u)\, du \tag{22.17}$$

dacă alegem condiţiile iniţiale $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 1$; ceea ce se verifică imediat.

Se ştie că după un timp suficient de lung faţă de o perioadă, dar destul de scurt din punct de vedere practic, $x(t)$ devine egală cu $\varphi(t)$. Pentru ca oscilaţia să rămînă periodică, trebuie să ne asigurăm că impulsia P întreţine caracterul periodic al funcţiei $\varphi(t)$. Pentru aceasta observăm că, intervalele ε fiind foarte mici faţă de perioadele T_0 şi T, în acest interval $x(t)$ rămîne constantă. Deci, din (22.16) şi (22.17) rezultă:

$$\varphi(t) = P \sum_n x(t - t_0 - nT).$$

Să considerăm diferenţa:

$$\varphi(t+T) - \varphi(t) = P \sum \{x[t - t_0 - (n-1)T] - x[t - t_0 - nT]\}.$$

Termenii din membrul al doilea formează o serie absolut convergentă. În adevăr, soluțiile $x(t)$ ale ecuației omogene a oscilatorului tind la zero cu timpul, iar raportul a doi termeni consecutivi tinde spre un număr mai mic decît unu. Atunci, termenii sumei se distrug doi cîte doi și rămîne:

$$\varphi(t+T) - \varphi(t) = Ix(t - t_0 + T).$$

Dar, cum $x(t) \to 0$, cînd $t \to \infty$, rezultă că $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ este o funcție periodică.

Capitolul XXIII

CIOCNIRI MECANICE

227. Ciocnirea directă a două sfere. Fie două sfere rigide de masă m și m', care se ciocnesc într-un moment $t = t_0$, fără să se rostogolească, astfel încît vitezele lor sînt îndreptate după linia centrelor. În momentul ciocnirii, care durează foarte puțin (intervalul cît durează ciocnirea (t_0, t_1) este extrem de scurt) sferele își imprimă impulsii reciproce, care au ca efect schimbarea stării de mișcare inițială. Forțele exterioare sînt neglijabile față de impulsiile dezvoltate prin ciocnire. Aceste impulsii, pentru sistemul format de cele două sfere, sînt impulsii interioare.

Teorema impulsului ne dă, însemnînd cu indicele (0) faza anterioară și cu indicele (1) faza posterioară ciocnirii:

$$(mv)_1 - (mv)_0 + (m'v')_1 - (m'v')_0 = 0,$$

de unde rezultă teorema conservării impulsului:

$$(mv + m'v')_1 = (mv + m'v')_0, \tag{23.1}$$

relație care are loc în orice problemă de ciocnire.

Fenomenul de ciocnire se petrece în mai multe faze intermediare între starea inițială (0) și starea finală (1).

În prima fază, care începe în momentul t_0, există un moment cînd centrele de greutate (centrele sferelor) se află la distanță minimă între ele. Fie x și x' abscisele acestor centre. Deoarece diferența $x - x' = d$ este minimă în acest moment, avem:

$$\dot{x} - \dot{x}' = 0$$

deci:

$$\dot{x} = \dot{x}' = V.$$

În momentul t', cînd se termină prima perioadă, sferele au viteza comună (a centrului de greutate) dedusă din:

$$\bar{r}_G = \frac{m\bar{r}_1 + m'\bar{r}_1'}{m + m'} \quad \text{și} \quad \bar{r}_G' = \bar{r}_G + d$$

anume:

$$V = \frac{mv_1 + m'v_1'}{m + m'} = \frac{mv_0 + m'v_0'}{m + m'}. \tag{23.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Distanța $x - x' = d$ la care se găsesc cele două centre se numește *raza de acțiune*. Prima fază ține, deci, un interval de timp (t_0, t'). În acest interval sfera întîia produce asupra sferei a doua o acțiune sub forma unei impulsii $\overline{P}_1$, a cărei valoare o deducem astfel: ecuația de mișcare a centrului de greutate este:

$$m\ddot{\overline{r}} = \overline{F}$$

însemnînd cu $\overline{F}$ forța exercitată asupra sferei întîia de către sfera a doua, prin ciocnire. Teorema reacțiunii ne arată că sfera întîia va exercita asupra sferei a doua forța $-\overline{F}$. Teorema impulsului aplicată primei faze ne dă:

$$mV - mv_0 = \int_{t_0}^{t'} F dt = P_1.$$

Introducînd valoarea (23.2) pentru V, avem:

$$P_1 = \frac{mm'}{m + m'}(v_0' - v_0) \tag{23.3}$$

pe cînd impulsia datorită forței $-\overline{F}$, va fi evident:

$$p_1 = -\frac{mm'}{m + m'}(v_0' - v_0). \tag{23.3'}$$

Faza a doua durează de la t' la t_1 și constituie efectul caracteristic ciocnirii. Această fază prezintă două posibilități extreme:

a) Ciocnirea este perfect *neelastică* (moale, plastică); atunci, cele două corpuri rămîn lipite, posedînd după ciocnire viteza comună V, obținută după scurgerea fazei întîia. În faza doua impulsia este nulă.

b) Ciocnirea este perfect *elastică*; atunci în faza doua impulsia este egală și de sens contrar (principiul reacțiunii) cu impulsia din faza întîia. În acest caz, mișcarea revine la starea inițială ca și cum corpul întîi s-ar „reflecta" din corpul al doilea:

$$P_2 = \int_{t'}^{t_1} F dt = \int_{t_0}^{t'} F dt = P_1 \quad \text{și} \quad p_2 = p_1.$$

În realitate nu are loc nici unul din aceste două cazuri extreme; efectul real este intermediar acestor două posibilități teoretice. Aceasta revine la a spune că P_2 nu este egal chiar cu P_1 și nici p_2 cu p_1, ci în realitate vom avea relații de forma :

$$P_2 = \varepsilon P_1 \text{ și } p_2 = \varepsilon p_1$$

unde $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Cîtimea ε se numește *coeficient de restituire*, sau *coeficientul lui Newton*.

În acest caz, în faza doua, teorema impulsului ne dă, pentru fiecare corp:

$$mv_1 - mV = P_2 = \varepsilon P_1$$

$$m'v_1' - m'V = p_2 = \varepsilon p_1$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde, înlocuind valorile (23.3) și (23.3′) rezultă:

$$v_1 = \frac{(m - m'\varepsilon)\, v_0 + (1 + \varepsilon)\, m' v_0'}{m + m'}$$
$$v_1' = \frac{(m' - m\varepsilon)\, v_0' + (1 + \varepsilon)\, m v_0}{m + m'} \qquad (23.4)$$

ceea ce ne dă valorile vitezelor celor două corpuri după ciocnire. Se verifică imediat, că *pentru ciocnirea neelastică*:

$$\varepsilon = 0,\ v_1 = v_1' = V;$$

pentru ciocnirea elastică $\varepsilon = 1$. În adevăr:

$$v_1 = V + \frac{m'}{m + m'}(v_0' - v_0) \text{ și } v_1' = V - \frac{m}{m + m'}(v_0' - v_0)$$

iar diferențele vitezelor vor fi: $v_1 - v_1' = v_0' - v_0$; așadar egale și de semne contrarii.

228. **Bilanțul energiei.** Variația energiei cinetice în ciocnire reală va fi:

$$\delta E_c = E_1 - E_0 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m' v_1'^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m' v_0'^2$$

de unde, înlocuind valorile lui v_1 și v_1' din (23.4), deducem:

$$\delta E_c = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon^2)\frac{mm'}{m + m'}(v_0' - v_0)^2. \qquad (23.5)$$

Această relație ne dă rezultatul următor extrem de important.

229. **Ciocnirea neelastică.** Această ciocnire se face cu pierdere de energie mecanică; anume, pentru $\varepsilon = 0$ energia pierdută este, după (23.5):

$$\delta E_c = \frac{1}{2}\frac{mm'}{m + m'}(v_0' - v_0)^2. \qquad (23.6)$$

Această energie se transformă în energie degenerată, de exemplu, căldură; sau poate fi interpretată drept energie internă de coeziune, necesară corpului rezultant pentru a exista ca atare.

230. **Teorema lui Carnot.** *Energia cinetică pierdută prin ciocnire neelastică, este egală cu energia cinetică a sistemului format din cele două corpuri care se ciocnesc, dacă fiecare are ca viteză, viteza pe care a pierdut-o prin ciocnire.*

În adevăr, vitezele pierdute de cele două sfere sînt respectiv:

$$v_0 - V = \frac{m'}{m + m'}(v_0 - v_0') \quad \text{și} \quad v_0' - V = \frac{m'}{m + m'}(v_0' - v_0);$$

energia cinetică totală a corpurilor m și m', de viteze $v_0 - V$ și $v_0' - V$, este:

$$\frac{1}{2} m \frac{m'^2}{(m + m')^2}(v_0 - v_0')^2 + \frac{1}{2} m' \frac{m^2}{(m + m')^2}(v_0 - v_0')^2 = \frac{1}{2}\frac{mm'}{m + m'}(v_0' - v_0)^2,$$

așadar egală cu expresia (23.6); ceea ce demonstrează teorema.

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că teorema lui Carnot nu este, în realitate, decît o formulare diferită a ecuaţiilor de mişcare.

231. **Ciocnirea elastică.** În acest caz $\varepsilon = 1$, $\delta E_c = 0$, deci se efectuează cu conservarea energiei. Pentru ciocnirea perfect elastică este satisfăcută teorema conservării impulsului (23.1):

$$mv_1 + m'v_1' = mv_0 + m'v_0'$$

şi teorema conservării energiei:

$$\frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} m'v_1'^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} m'v_0'^2.$$

232. **Exemplu: ciocanul şi cuiul.** Fie m masa ciocanului şi m' masa cuiului. Viteza finală a cuiului este V_1'. Viteza iniţială a cuiului fie $v_0' = 0$. Substituind această valoare în (23.4) avem:

$$v_1' = \frac{m}{m + m'} (1 + \varepsilon)\, v_0 \qquad (23.7)$$

v_0 fiind viteza iniţială a ciocanului. ε este determinat prin natura substanţei din care e făcut ciocanul şi cuiul.

Pierderea de energie cinetică este:

$$\delta E_c = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^2) \frac{mm'}{m + m'} v_0^2$$

energia cinetică întrebuinţată (de ciocan) fiind $\frac{1}{2} mv_0^2$; pierderea în unităţi de energie întrebuinţată (pierderea procentuală) va fi:

$$\pi = (1 - \varepsilon^2) \frac{m'}{m + m'}. \qquad (23.8)$$

Această fracţiune se pierde, fiind uzată, pentru deformarea şi încălzirea cuiului. Cîtimea π este cu atît mai mică, cu cît m este mai mare faţă de m', deci cu cît ciocanul este mai masiv. Prin urmare, este mai convenabil să folosim un ciocan greu cu viteză mică, decît un ciocan uşor cu viteză mare, pentru producerea aceluiaşi lucru mecanic.

Scanned with OKEN Scanner

Partea a cincea

STATICA

Capitolul XXIV

CONDIȚIILE DE ECHILIBRU

Tradițional, „Statica" constituie un capitol inițial sau izolat al expunerilor de Mecanică. Cum însă problema Staticii constă în studierea condițiilor de echilibru al forțelor care solicită un corp, chestiunea revine la studiul *sistemelor de vectori*, capitol dezvoltat în Anexa I (după cartea noastră) [1]), la care ne vom referi.

În concepția mecanică a fenomenului fizic, starea statică trebuie tratată, consecvent, drept un caz particular al stării dinamice. Acest punct de vedere mecanic — teoretic nu stînjenește posibilitățile de expunere a aplicațiilor tehnice care-și găsesc tot materialul ajutător în capitolul citat asupra sistemelor de vectori.

233. **Condițiile generale de echilibru.** Una din problemele de mare importanță în Mecanică este studiul condițiilor de echilibru al sistemelor materiale, al rigidelor și al diferitelor dispozitive mecanice. Principiul universal sună:

Condiția *necesară* pentru ca să existe stare de echilibru, este ca sistemul de forțe interne și externe aplicat, să fie echivalent ca un sistem de vectori identic nul (Anexa I, § 23).

Vom distinge separat cazurile: 1) punctului material; 2) sistemelor materiale și 3) rigidelor, fiindcă aceste formații mecanice se comportă diferit față de condițiile de echilibru.

234. **Punctul material liber**, Să considerăm o mulțime de puncte materiale libere solicitate de un sistem de forțe. Acest cîmp de forțe se reduce la o rezultantă aplicată punctelor mulțimii, libere a se mișca după legea fundamentală a Mecanicii:

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_i$$

dacă m_i este masa punctului ce ocupă poziția $\bar{r}_i$ față de un pol fix, $\bar{F}_i$ fiind rezultanta forțelor ce-l solicită. Cum un punct nu posedă mișcări de rotație în jurul unei axe care trece prin el însuși, punctul material nu poate fi solicitat de un cuplu.

Dacă în momentul inițial punctul se afla în repaus, condiția necesară și suficientă ca el să rămînă mereu în repaus este ca rezultanta forțelor exterioare care-l solicită $\bar{F}$ să fie nulă.

---

[1]) *I. I. Plăcinteanu* [34] „Vectori, Potențiali, Tensori".

În cazul cînd, în momentul inițial, punctul avea o mișcare uniformă, dacă $\overline{F} = 0$, el își va păstra această stare de mișcare, mereu (Principiul inerției).

Așadar, condiția necesară și suficientă ca un punct liber sau o mulțime de puncte libere să păstreze o stare de echilibru, este ca rezultanta forțelor aplicate să fie nulă.

235. **Punct mobil, fără frecare, pe o suprafață fixă.** Punctul material fiind obligat să rămînă pe o suprafață, suferă din partea suprafeței o reacțiune normală, care activează asupra punctului ca o forță aplicată, deci care trebuie adăugată forțelor solicitante spre a constitui împreună un sistem identic nul. „Condiția necesară și suficientă pentru a avea o stare de echilibru este ca forțele aplicate să facă echilibru reacțiunii suprafeței". Fie:

$$f(x, y, z) = 0 \tag{24.1}$$

ecuația suprafeței. Reacțiunea normală are drept cosinusuri directoare componentele lui grad f, așa încît condiția ca forța exterioară $\overline{F}$ să facă echilibru reacțiunii este:

$$\overline{F} + \lambda \operatorname{grad} f = 0. \tag{24.2}$$

Condiția (24.2) unită cu (24.1) determină cele patru necunoscute x, y, z și parametrul λ în funcție de timp.

236. **Punct mobil, fără frecare, pe o curbă fixă.** Ecuațiile curbei sînt:

$$f_1(x, y, z) = 0;\ f_2(x, y, z) = 0. \tag{24.3}$$

Cosinusurile directoare ale reacțiunii normale sînt date de componentele lui grad f_1 și grad f_2, așa încît condiția ca forța exterioară să facă echilibru reacțiunii normale se exprimă astfel:

$$\overline{F} + \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2 = 0. \tag{24.4}$$

Relațiile (24.3) și (24.4) rezolvă problema, determinînd poziția (x, y, z) și parametrii λ_1 și λ_2.

237. **Echilibru cu frecare.** Să admitem că punctul material este obligat să se miște, cu frecare, pe o suprafață dată. Fie $\overline{F}$ rezultanta forțelor exterioare; ea se descompune după normala și tangenta la suprafață. Fie F_n componenta normală; ea trebuie să satisfacă la condiția de a nu îndepărta punctul de pe suprafață. Aceasta înseamnă că, dacă normala $\overline{n}$ este exterioară (sens ales ca pozitiv pentru $\overline{N} = N\overline{n}$), trebuie să avem:

$$F_n \leqslant 0. \tag{24.5}$$

Fie F_t componenta tangențială; ea va trebui să fie mai mică, sau cel mult egală, frecării de alunecare:

$$F_t \leqslant f_0 N. \tag{24.6}$$

Relațiile (24.5) și (24.6) exprimă condițiile de echilibru pe o suprafață, cînd mișcarea se face cu frecare.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul unui punct care se mișcă pe o curbă dată, să considerăm una din suprafețele ce trec prin această curbă avînd ca normală direcția normalei principale a curbei. Vom aplica același criteriu ca și la echilibrul pe suprafață. Așadar:

„Condiția necesară și suficientă ca un punct material, constrîns să rămînă pe o suprafață sau o curbă, să ocupe o poziție de echilibru, este ca forța activă să aibă o componentă tangențială mai mică sau cel mult egală frecării de alunecare, și o componentă normală negativă sau nulă".

238. **Stabilitatea echilibrului.** În § 51 etc., am expus un criteriu de apreciere a stabilității unei poziții de echilibru, din punct de vedere calitativ. În cazul frecării se poate da și o măsură cantitativă a stabilității, în mișcarea cu frecare pe o suprafață. În adevăr, se poate alege ca măsură a stabilității unei stări de echilibru (pe unitatea de acțiune normală) expresia:

$$\frac{f_0 N - F_t}{N}$$

care permite să se poată compara pozițiile de echilibru corespunzătoare diferitelor valori ale lui f_0 și N.

239. **Sisteme de puncte materiale.** Din mulțimea de puncte materiale libere se alcătuiește un „sistem" prin introducerea forțelor interne $\overline{\Phi}_s$, care, după considerațiile de la § 120, satisfac la condiția că formează un sistem de vectori legați echivalent cu un sistem identic nul:

$$\sum_s \overline{\Phi}_s = 0\,; \quad \sum_s (\overline{r}_s \times \overline{\Phi}_s) = 0.$$

Trebuie observat că această condiție se aplică oricărui sistem parțial obținut prin secționarea sistemului inițial, cu condiția evidentă de a introduce ca forțe exterioare și acele forțe care mai înainte de secționare erau considerate ca interne și asigurau unitatea sistemului inițial.

Acestea fiind stabilite „condiția *necesară* ca un sistem de puncte materiale să fie în echilibru este ca sistemul forțelor exterioare și de legătură, care formează un sistem de vectori legați, să fie echivalent cu un sistem de vectori identic nul".

În adevăr, ecuațiile dinamicii sînt:

$$\sum_s m_s \ddot{\overline{r}}_s = \sum_s \overline{F}_s\,; \quad \frac{d}{dt}\sum_s m_s\left(\overline{r}_s \times \dot{\overline{r}}_s\right) = \sum_s \left(\overline{r}_s \times \overline{F}_s\right)$$

unde $\overline{F}_s$ este rezultanta forțelor aplicate și de legătură. Pentru ca sistemul material să fie în stare de echilibru este necesar, așadar, ca rezultanta să fie nulă și momentul rezultant relativ la un pol oarecare, să fie nul; deci:

$$\sum_s \overline{F}_s = 0 \quad \text{și} \quad \sum_s (\overline{r}_s \times \overline{F}_s) = 0. \tag{24.7}$$

Observație. Cu toate că ecuațiile de echilibru (24.7) au un caracter universal, prin faptul echivalenței sistemului de forțe aplicate cu un sistem de vectori identic nul, aceste ecuații *nu sînt suficiente*, pentru ca un sistem de puncte materiale, deformabil, să fie în echilibru.

Scanned with OKEN Scanner

În adevăr, fie două puncte P_1 și P_2 ale sistemului material, solicitate pe direcția dreptei ce le unește de două forțe egale și de sens contrar, dînd o rezultantă nulă. Punctele nefiind obligate, prin legături, a păstra o distanță invariabilă între ele, vor fi puse în mișcare, în timp ce condițiile (24.7) sînt totuși satisfăcute.

Așadar, în acest caz, după ce am redus sistemul de forțe aplicate sistemului material la o rezultantă și un cuplu (Anexa I, § 24) și am verificat că este echivalent cu un sistem de vectori identic nul, rămîne ca, din datele speciale ale problemei, să stabilim dacă și în ce măsură condițiile (24.7) sînt și suficiente.

240. **Condițiile necesare și suficiente de echilibru ale rigidului.** Caracterul specific al solidului nedeformabil rezidă în condiția ca distanțele mutuale ale punctelor care-l alcătuiesc să rămînă invariabile, oricare ar fi forțele ce-l solicită. Această împrejurare permite să enunțăm, pentru rigid, *proprietatea I*: „echilibrul unui rigid nu se alterează dacă aplicăm în două puncte P_1 și P_2 ale rigidului două forțe egale și de sens contrar, avînd direcția $\overline{P_1 P_2}$."

Din această cauză sistemul de forțe care solicită un rigid este un sistem de vectori alunecători. Operațiile de reducere a sistemului de forțe primitiv constau din operațiile elementare ale vectorilor alunecători (Anexa I, § 35), care nu pot altera starea de echilibru a rigidului. Așadar, avem *proprietatea II*: „rigidul se găsește în stare de echilibru dacă sistemul de forțe aplicate exterioare și de legătură este echivalent cu un sistem de vectori identic nul".

Aceste două proprietăți permit să se poată formula condițiile necesare și suficiente pentru ca un rigid să se afle în stare de echilibru: „pentru ca un rigid să fie în echilibru este necesar și suficient ca forțele aplicate și de legătură să formeze un sistem echivalent cu un sistem de vectori identic nul, deci ca rezultanta să fie nulă și momentul rezultant, în raport cu un punct oarecare, să fie de asemenea nul".

Observăm că pentru rigid condițiile generale, care pentru sistemele materiale sînt numai *necesare*, devin și *suficiente*, fapt datorit proprietății I.

Dacă $\overline{F}$ este rezultanta forțelor aplicate și de legatură și $\overline{M}$ momentul acestor forțe în raport cu un punct oarecare, condiția necesară și suficientă pentru echilibru se exprimă, așadar:

$$\overline{F} = 0; \qquad \overline{M} = 0; \tag{24.8}$$

ceea ce constituie un sistem vectorial identic nul.

241. **Rigid supus la legături.** Dacă rigidul este supus la legături exterioare, reacțiunile care iau naștere apar ca forțe aplicate, însă necunoscute, urmînd a fi determinate, ele însele, din condițiile de echilibru. Aceasta se efectuează, în adevăr, dacă se scriu mai întîi condițiile de echilibru în care nu figurează toate reacțiunile și apoi ecuațiile, din care deducem toate valorile reacțiunilor (ecuațiile componentelor și ale momentelor).

242. **Rigid avînd un punct fix.** Fie O punctul fix, $\overline{F}$ rezultanta forțelor aplicate și $\overline{R}$ reacțiunea în O. Fie $\overline{M}$ momentul rezultant în raport cu

punctul O, al forţelor aplicate (momentul reacţiunii este nul). Condiţiile necesare şi suficiente pentru ca să existe echilibru sînt:

$$\overline{F} + \overline{R} = 0; \qquad \overline{M} = 0. \tag{24.9}$$

Cum rigidul are numai trei grade de libertate, ultima ecuaţie este suficientă pentru a determina starea de echilibru. Prima ecuaţie permite să calculăm reacţiunea punctului fix.

243. **Rigid avînd o axă fixă.** Fie $\overline{F}$ rezultanta forţelor aplicate. Reacţiunile axei fixe vor trece toate prin axă. Momentul lor în raport cu axa va fi nul. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca rigidul să se afle în echilibru este:

$$\overline{F} + \overline{R} = 0; \qquad \overline{\sigma}\,\overline{M} = 0 \tag{24.10}$$

dacă însemnăm prin $\overline{\sigma}$ vectorul unitate al axei.

Pentru calculul reacţiunilor axei, vom presupune că axa este fixată în două puncte O_1 şi O_2 şi însemnăm cu $\overline{R}_1$ şi $\overline{R}_2$ reacţiunile în aceste două puncte. Luînd momentul în raport cu punctul O_1, condiţiile de echilibru (24.10) devin ($h = O_1 O$):

$$\overline{F} + \overline{R}_1 + \overline{R}_2 = 0; \quad M_x - hR_{1y} = 0; \quad M_y + hR_{1z} = 0; \quad M_z = 0;$$

relaţii care ne permit să calculăm reacţiunile, pînă la aproximaţia cunoscută a sumei componentelor de-a lungul axei z (§ 168).

244. **Rigid sprijinindu-se pe un plan fix.** Fie S suprafaţa de contact, care este mărginită de un „perimetru de sprijin". Reacţiunile sînt normale pe planul fix, îndreptate în acelaşi sens (înspre regiunea unde se găseşte rigidul). Luăm această normală drept axă z, iar planul fix ca plan (x, y). Fie r_s punctul rigidului din planul fix, unde este aplicată reacţiunea R_s. Condiţia generală de echilibru fiind ca sistemul de forţe aplicate şi de reacţiune să fie nul, avem, în primul rînd:

$$F_x = 0; \quad F_y = 0; \quad F_z + \sum_s R_s = 0. \tag{24.11}$$

Fie $\overline{R}$ rezultanta reacţiunilor şi $\overline{r}_0$ punctul ei de aplicare, în planul (x,y), punct definit prin relaţia:

$$\overline{r}_0\, R = \sum_s \overline{r}_s\, R_s. \tag{24.12}$$

Să ducem axa y prin acest punct. Momentul rezultant în raport cu un punct O al planului, luat ca origine a sistemului de coordonate, ne dă condiţiile

$$M_x = r_{Gy}\, F_z + \sum_s r_s\, R_s = 0; \; M_y = 0; \; M_z = 0. \tag{24.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Am presupus că rezultanta forțelor exterioare este aplicată în centrul de greutate al rigidului, de poziție $\overline{r_G}$ față de O.

Prima relație (24.13), ținînd seamă de (24.14) și (24.12), ne dă:

$$r_{Gy} = \frac{\Sigma r_s R_s}{\Sigma R_s} = r_0 \tag{24.14}$$

iar celelalte ecuații (24.13) ne dau $r_{Gx} = 0$. Din acest rezultat deducem următoarea condiție practică, necesară și suficientă pentru starea de echilibru: proiecția centrului de greutate al rigidului trebuie să cadă în interiorul perimetrului de sprijin. În adevăr, punctul de aplicare r_0 al sistemului de forțe $\overline{R_s}$ trebuie să se găsească în interiorul suprafeței de contact, iar, după (24.14), aceeași condiție trebuie să fie satisfăcută și de proiecția centrului de greutate pe planul fix.

245. **Stabilitatea echilibrului unui rigid.** Nu există criterii generale pentru determinarea stabilității echilibrului unui rigid. Se cercetează, anume, de la caz la caz, dacă poziția de echilibru considerată satisface condiției: 1. de stabilitate (dacă îndepărtîndu-l foarte puțin din această poziție, corpul tinde să revină în poziția de echilibru inițială); 2. de indiferență (dacă, îndepărtat foarte puțin din poziția de echilibru inițială, corpul rămîne tot în echilibru); 3. de instabilitate (dacă, îndepărtat foarte puțin din poziția de echilibru inițială, corpul tinde să se îndepărteze din ce în ce mai mult de la această poziție).

Exemple: 1. Un rigid greu atîrnat de o axă orizontală. Dacă centrul său de greutate se găsește sub axa de sprijin, poziția de echilibru este stabilă; dacă se află chiar pe axa de suspensie, echilibrul este indiferent; dacă se află deasupra axei, echilibrul este instabil.

2. Fie un rigid avînd o axă fixă și obligat să se sprijine pe un plan fix trecînd prin axă. Reacțiunea planului contribuie la momentul forțelor aplicate, iar condiția de echilibru este:

$$\overline{M}_F + \overline{M}_R = 0$$

$\overline{M}_F$ fiind momentul forțelor aplicate, iar $\overline{M}_R$, momentul reacțiunii în raport cu axa. Or, este evident că:

$$M_R \geqslant 0$$

deoarece reacțiunea va fi îndreaptată spre regiunea planului spre care se va roti corpul.

Rezultă așadar:

$$M_F \leqslant 0$$

drept condiție necesară pentru echilibru; ea este și suficientă[1]). Din relația precedentă rezultă că rigidul va fi cu atît mai ferit de solicitări menite să-l îndepărteze de poziția de echilibru, cu cît M_F va fi mai mare în valoare absolută. Se poate lua, așadar, mărimea M_F drept măsură a stabilității pentru starea de echilibru considerată. Această mărime poartă numele de „moment de stabilitate".

[1]) *T. Levi — Civita* [4], v. I, p. 559.

PRINCIPIUL DEPLASĂRILOR VIRTUALE

246. **Deplasări virtuale.** Numim deplasare *virtuală* orice deplasare arbitrară pe care o imprimăm unui punct, sistem material sau rigid, alta decît deplasările reale la care este supus sub acţiunea forţelor exterioare care-l solicită. Această deplasare se aplică astfel încît să fie *compatibilă cu legăturile* la care este supus punctul, sistemul sau rigidul.

O deplasare virtuală arbitrară $\delta\bar{r}$ (compatibilă cu legăturile) produce un lucru mecanic virtual, dat de relaţia:

$$\sum_s \bar{F}_s \delta\bar{r}_s .$$

247. **Principiul deplasărilor virtuale.** Acest principiu, numit şi principiul lucrului mecanic virtual, se formulează astfel: condiţia necesară şi suficientă ca un punct material, un sistem sau un rigid să ocupe o stare de echilibru, este ca lucrul mecanic virtual total al forţelor aplicate, pentru o deplasare virtuală, arbitrară, din starea de echilibru, compatibilă cu legăturile, să fie nul; aşadar:

$$\sum_s \bar{F}_s \delta\bar{r}_s = 0 .$$

Trebuie reţinut că *lucrul mecanic al reacţiunilor este nul*, proprietate foarte importantă, deoarece poate fi privită chiar ca o definiţie a noţiunii de „sistem mecanic".

Se poate verifica uşor această proprietate la un corp solid. Fiecare punct P_s stă în interacţiune cu fiecare punct P_k, astfel încît iau naştere forţele interne sub formă de reacţiuni: $\bar{R}_{sk} = -\bar{R}_{ks}$. Privind aceste două puncte ca un sistem de două puncte materiale unite printr-o bară rigidă, descompunem deplasarea virtuală într-o translaţie comună $\delta\bar{r}_s$ şi o rotaţie $\delta\bar{\omega}_k$ a punctul P_k în jurul punctului deplasat P_s, deplasare normală pe dreapta $\overrightarrow{P_sP_k}$. Deci deplasarea totală a punctului P_k este:

$$\delta\bar{r}_k = \delta\bar{r}_s + \delta\bar{\omega}_k .$$

Lucrul mecanic datorit translaţiei $\delta\bar{r}_s$ este:

$$\delta L_{tr} = \bar{R}_{sk}\, \delta\bar{r}_s + \bar{R}_{ks}\, \delta\bar{r}_s = 0$$

iar pentru rotaţia în jurul lui P_s avem lucrul mecanic:

$$\delta L_{rot} = \bar{R}_{ks}\ \delta\bar{\omega}_k = 0$$

căci $\delta\bar{\omega}_k \perp \bar{R}_{ks}$. c.c.t.d.

Acest principiu are importanţă practică, deoarece face inutilă evaluarea greoaie a reacţiunilor.

Scanned with OKEN Scanner

248. **Problema statică.** Este ușor de constatat că, din acest principiu general, se pot deduce toate condițiile de echilibru scrise în Cap. XXIV. Principiul are însă avantajul de a distinge mai profund sensul fizic al legăturilor. În adevăr, fie

a) *punctul material liber*. Avem:

$$\overline{F}\delta\overline{r} = 0$$

oricare ar fi deplasarea virtuală $\delta\overline{r}$; deducem condiția $\overline{F} = 0$;

b) *punctul pe suprafață*. Condiția:

$$\overline{F}\delta\overline{r} = 0$$

unită cu condiția ca deplasarea $\delta\overline{r}$ să se efectueze pe suprafața:

$$f(x, y, z) = 0$$

spre a fi compatibilă cu legătura impusă, ne dă:

$$\delta\overline{r}\cdot\operatorname{grad} f = 0$$

ceea ce ne conduce la condiția (24.2), § 235;

c) *punctul pe o curbă fixă*. Condițiile:

$$\overline{F}\delta\overline{r} = 0; \quad \delta\overline{r}\cdot\operatorname{grad} f_1 = 0; \quad \delta\overline{r}\cdot\operatorname{grad} f_2 = 0$$

ne dau:

$$\overline{F} + \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2 = 0.$$

Observăm că legăturile exprimate prin apariția termenilor $\lambda \operatorname{grad} f$ pot fi interpretate ca reacțiuni.

Lucrul mecanic total al acestor reacțiuni este nul:

$$\delta\overline{r}\cdot\operatorname{grad} f = 0.$$

Așadar, principiul deplasărilor virtuale revine la ipoteza fizică, prin care exprimăm faptul important că lucrul mecanic al reacțiunilor, în deplasările fără frecare, este nul.

249. **Aplicația principiului la mișcarea rigidului.** Mișcarea infinitezimală cea mai generală a rigidului este, precum știm (§ 174), compusă dintr-o translație și o rotație. Vitezele sînt distribuite după relația cunoscută:

$$\dot{\overline{r}}_s = \dot{\overline{r}}_0 + \overline{\omega}\times(\overline{r}_s - \overline{r}_0)\,. \tag{25.1}$$

Dacă, în loc de variațiile care produc deplasări infinitezimale, vom trece la deplasări finite, efectuate în intervalul de timp finit δt, vom putea exprima o astfel de deplasare prin relația:

$$\delta\overline{r}_s = \delta\overline{r}_0 + \delta t\,\overline{\omega}\times(\overline{r}_s - \overline{r}_0)\,.$$

Așadar, o deplasare generală a rigidului este definită prin șase parametri $\delta\overline{r}_0$ (trei) și $\overline{\omega}\delta t$ (trei).

Lucrul mecanic total, virtual, al forţelor aplicate fiind nul, pentru o deplasare virtuală arbitrară, avem condiţia (principiul deplasărilor virtuale):

$$\sum_s \delta \bar{r}_s \bar{F}_s = \delta \bar{r}_0 \sum_s \bar{F}_s + \delta t \sum_s \bar{F}_s \, \bar{\omega} \times (\bar{r}_s - \bar{r}_0) = 0$$

sau încă:

$$\delta \bar{r}_0 \sum_s \bar{F}_s + \bar{\omega} \, \delta t \sum_s (\bar{r}_s - \bar{r}_0) \times \bar{F}_s = 0 \qquad (25.2)$$

relaţie adevărată oricare ar fi deplasările $\delta \bar{r}_0$ şi $\bar{\omega} \delta t$, virtuale. Aşadar, condiţia de echilibru precedentă este echivalentă cu condiţiile:

$$\sum_s \bar{F}_s = 0 \qquad \text{şi} \qquad \sum_s (\bar{r}_s - \bar{r}_0) \times \bar{F}_s = 0 \qquad (25.3)$$

care exprimă teorema: rigidul este în echilibru, dacă sistemul vectorial de forţe aplicate este echivalent cu un sistem identic nul; adică, de rezultantă $\bar{F} = \Sigma_s \bar{F}_s = 0$ şi de moment rezultant al forţelor aplicate, în raport cu un punct *dat* O, anume, $\bar{M} = \Sigma_s \bar{r}_s \times \bar{F}_s$, de asemenea nul.

Observăm însă că a doua condiţie se scrie:

$$\sum_s \bar{r}_s \times \bar{F}_s - \sum_s \bar{r}_0 \times \bar{F}_s = 0$$

ceea ce ne dă, cu $\Sigma_s \bar{F}_s = 0$, condiţia echivalentă:

$$\bar{M} = \sum_s \bar{r}_s \times \bar{F}_s = 0 .$$

Deci, momentul rezultant al forţelor exterioare în raport cu un punct *oarecare* din spaţiu trebuie să fie nul.

Aşadar, în rezumat, regăsim condiţiile de la § 259:

$$\bar{F} = 0 \quad \text{şi} \quad \bar{M} = 0 \qquad (25.4)$$

unde, $\bar{F} = \Sigma \bar{F}_s$ este rezultanta tuturor forţelor aplicate şi legăturilor exterioare, iar $\bar{M}$, momentul rezultant al acestor forţe în raport cu un punct oarecare din spaţiu.

250. **Observaţii asupra echilibrului.** 1. În condiţiile de echilibru (25.4) nu figurează reacţiunile interioare datorite rigidităţii corpului solid nedeformabil, ceea ce este evident, deoarece forţele interne nu produc o deplasare relativă a punctelor rigidului, ci dimpotrivă, aceste forţe asigură rigiditatea.

2. Dacă sistemul material nu ar fi rigid, sistemul ar poseda, pe lîngă deplasările virtuale posibile ale corpului în bloc, ca un rigid [ceea ce ne conduce la condiţiile (25.4)] şi alte deplasări virtuale posibile, interioare.

Rezultă deci: condiţiile (25.4) sînt necesare, dar nu sînt suficiente, pentru un sistem deformabil (§ 258).

3. În lucrarea noastră „Vectori. Potenţiali. Tensori" şi în Anexa I, § 24 am studiat posibilităţile reducerii unui sistem de vectori la un sistem alcătuit dintr-un vector rezultant şi dintr-un cuplu. Aceste teoreme

Scanned with OKEN Scanner

se aplică și permit reducerea forțelor aplicate unui solid, la un sistem vectorial compus dintr-un vector rezultant $\overline{F}$ și un cuplu $\overline{M}$.

Putem determina, pentru sistemul de forțe aplicate rigidului, axa centrală a sistemului de forțe: ea este locul geometric al punctelor față de care momentul rezultant $\overline{M}$ este paralel cu rezultanta $\overline{R}$:

$$\overline{M} = \frac{\overline{F}\,\overline{M}}{F^2}\overline{F}.$$

Sistemul de forțe, redus la o rezultantă $\overline{F}$, acționînd în direcția axei centrale, și un cuplu $\overline{M}$, situat în planul perpendicular pe axa centrală, formează un torsor.

251. **Aplicarea principiului la echilibrul rigidului supus la legături.**

a) *Rigid mobil în jurul unui punct fix.* Dacă vom considera reacțiunea punctului fix, după condițiile cerute de aplicarea principiului deplasărilor virtuale, drept o forță exterioară, solidul poate fi tratat ca un solid liber, iar condițiile de echilibru se vor scrie, după cazul precedent:

$$\overline{R} + \sum_s \overline{F}_s = 0\,; \quad \sum_s \overline{r}_s \times \overline{F}_s = 0$$

luînd punctul fix O ca pol.

b) *Rigid mobil în jurul unei axe fixe.* Pornind de la aceeași concepție și notînd cu $\overline{R}_0$ și $\overline{R}_1$ reacțiunile în O și O_1 luate pe axă, astfel încît $OO_1 = h$, condițiile de echilibru se scriu, luînd OO' ca axa z și O ca pol:

$$\overline{R}_0 + \overline{R}_1 + \sum_s \overline{F}_s = 0\,; \quad h\overline{k} \times \overline{R}_1 + \sum_s \overline{r}_s \times \overline{F}_s = 0$$

relații care coincid cu condițiile scrise la § 242.

c) *Rigid mobil paralel cu un plan fix.* Deplasările virtuale sînt de forma:

$$\delta\overline{r}_s = \delta\overline{r}_0 + \overline{\omega}\,\delta t \times (\overline{r}_s - \overline{r}_0)$$

unde $\overline{r}_0$ este vectorul de poziție al unui punct fix al solidului, punct pe care-l putem presupune situat în planul dat. Luăm originea axelor în planul dat, atunci $\overline{r}_0$ și $\delta\overline{r}_0$ vor fi tot în plan. Principiul deplasărilor virtuale ne dă:

$$\overline{F}\,\delta\overline{r}_0 = 0 \quad \text{și} \quad \overline{k}\sum_s (\overline{r}_s - \overline{r}_0) \times \overline{F}_s = 0$$

deci, rezultanta forțelor trebuie să fie perpendiculară pe plan, iar momentul rezultant în raport cu o axă perpendiculară pe plan, dusă prin pol, este nul.

d) *Rigid mobil în contact cu un plan fix.* Reacțiunile fiind normale la plan și ducînd axa y în plan prin punctul de aplicare a rezultantei, regăsim condițiile scrise la § 244.

e) *Sisteme de corpuri solide.* Se aplică metoda generală considerînd fiecare corp rigid în echilibru sub acțiunea forțelor aplicate și a reacțiunilor datorite legăturilor cu celelalte solide.

Scanned with OKEN Scanner

252. **Principiul lui d'Alembert.** Inerţia unui corp poate fi considerată drept rezistenţa acestui corp la solicitarea de mişcare, putînd-o numi *rezistenţa inerţială* şi defini prin ecuaţia:

$$\bar{F}^* = -\dot{\bar{p}} = -m\ddot{\bar{r}} \tag{25.5}$$

unde $\bar{p} = m\dot{\bar{r}}$ este impulsul punctului de masă m şi viteză momentană $\dot{\bar{r}}$.

Cu această notaţie, legea fundamentală a mecanicii cu masă constantă, pentru un punct liber:

$$\dot{\bar{p}} = \bar{F} \tag{25.6}$$

unde $\bar{F}$ este rezultanta forţelor exterioare, devine:

$$\bar{F}^* + \bar{F} = 0 \tag{25.7}$$

deci, rezistenţa inerţială stă în echilibru vectorial cu forţa exterioară; numai că trebuie specificat faptul că pe cînd forţa exterioară $\bar{F}$ este o *forţă reală*, rezistenţa inerţială $\bar{F}^*$ este o *forţă fictivă* pe care o introducem pentru a reduce problema dinamică la o problemă mai uşoară de statică.

În cazul cînd punctul P_k face parte dintr-un sistem material, intervin reacţiunile $\bar{R}_{sk}$ şi ecuaţia (25.6) devine:

$$\bar{F}_k^* + \bar{F}_k + \bar{R}_{sk} = 0\,.$$

Dar aplicarea principiului deplasărilor virtuale, după care lucrul mecanic virtual al reacţiunilor este nul, ne conduce, pentru întreg sistemul, la condiţia:

$$\sum_k (\bar{F}_k^* + \bar{F}_k)\,\delta\bar{r}_k = 0$$

ceea ce revine la ecuaţia (25.6), deplasarea $\delta\bar{r}_k$ fiind arbitrară.

Dacă însă există anumite relaţii de legătură:

$$\varphi_k(\bar{r}) = 0, \qquad (k = 1,2 \ldots n < N) \tag{25.8}$$

unde N este numărul gradelor de libertate, vom avea o condiţie suplimentară

$$\sum_{(k)}^{N} \operatorname{grad}\varphi_k \cdot \delta\bar{r}_s = 0\,. \qquad (k = 1,2,\ldots n < N) \tag{25.9}$$

Din relaţiile (25.6) şi (25.9), folosind metoda multiplicatorilor lui L a g r a n g e λ_k, rezultă forma generală a principiului lui d' A l e m b e r t:

$$\sum_{s=1}^{N} (-m_s\ddot{\bar{r}}_s + \bar{F}_s + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \operatorname{grad}\varphi_k)\,\delta\bar{r}_s = 0\,. \tag{25.10}$$

Observaţie. Principiul lui d'Alembert constituie un progres faţă de ecuaţia punctului material (25.6), prin faptul că în studierea *sistemelor* de puncte materiale principiul static (25.7) depăşeşte şi adînceşte principiul inerţiei newtonian formulat pentru un punct material izolat.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XXVI

ELEMENTE DIN STATICA SISTEMELOR ARTICULATE

Problemele de echilibru în cazul sistemelor articulate sînt importante pentru aplicaţiile tehnice şi sînt pe larg studiate în Tratatele speciale de *Statică grafică*. În cele ce urmează ne vom mărgini să fixăm numai ideile cardinale şi vom expune teoremele de bază ale acestei discipline, care nu se încadrează, direct, într-o expunere de Mecanică.

253. **Sistemele articulate.** Aceste sisteme sînt formate din bare materiale, rectilinii, rigide, legate între ele prin balamale sferice de dimensiuni foarte mici aşa încît să poată fi considerate drept puncte materiale, numite *noduri*.

Sistemul se numeşte *simplu conex* dacă este de formă poligonală „deschisă", astfel încît, prin suprimarea unei bare intermediare îşi pierde unitatea.

Sistemul se numeşte *multiplu conex*, dacă este posibil să se înlăture una din barele intermediare fără ca sistemul să-şi piardă unitatea, cum este în cazul unui poligon închis.

Din punct de vedere mecanic, sistemele articulate sînt considerate ca sisteme materiale formate din bare rigide şi din puncte materiale supuse solicitărilor unor forţe exterioare date.

254. **Forţe. Compresiuni. Tensiuni.** Dacă un sistem articulat simplu conex este supus unor forţe exterioare, fiecare bară MN va fi solicitată, atît direct de forţele exterioare, cît şi de forţele nodale $\overline{A}_M$, $\overline{A}_N$ aplicate în nodurile M şi N, acţiuni datorite legăturii cu celelalte bare adiacente. Contactul dintre două bare adiacente făcîndu-se prin *nodul* respectiv, acţiunea unei bare asupra celeilalte se transmite ca forţă exercitată asupra nodului comun.

Principiul reacţiunii ne spune că bara MN va imprima, la rîndul ei, nodurilor din extremităţile ei, reacţiunile:

$$\overline{R}^1_M = -\overline{A}^1_M \quad \text{şi} \quad \overline{R}^1_N = -\overline{A}^1_N .$$

Acţiunile şi reacţiunile pot fi *tensiuni* sau *compresiuni*, după cum se exercită asupra barei sub formă de *tracţiune* sau *compresiune*.

255. **Sistem de forţe pur nodale.** Sistemul de forţe exterioare şi acţiuni nodale, care solicită un sistem material articulat, poate fi redus la un sistem de forţe aplicate numai în noduri.

Fie $\overline{F}_M$ forţa exterioară care solicită nodul M; fie $\overline{F}^1$ rezultanta forţelor exterioare care solicită o bară MN (bara *1*). Putem să înlocuim această forţă printr-un sistem echivalent de două forţe $\overline{F}^1_M$ şi $\overline{F}^1_N$, paralele, aplicate în M şi N (Anexa I, § 23). Să presupunem că în nodul M concurează n bare. Forţele care solicită acest nod vor fi în acest caz:

1) forţele exterioare:

$$\overline{F}_M + \sum_{s=1}^{n} \overline{F}^s_M ;$$

Scanned with OKEN Scanner

2) forțele de origine interioară sistemului articulat:

$$\sum \overline{R}^s_M \quad \text{și} \quad \sum \overline{A}^s_M .$$

Cercetarea condițiilor de echilibru pentru sistemele articulate se reduce, prin aceasta, la cercetarea condițiilor de echilibru al sistemului material respectiv de puncte nodale.

256. **Poligon funicular.** Se numește „poligon funicular" figura geometrică pe care o formează un sistem de puncte M_1, M_2,..., M_n, fiecare punct fiind legat de următorul printr-o bară flexibilă și inextensibilă, în poziție de echilibru; în general, poligonul putînd fi plan sau strîmb.

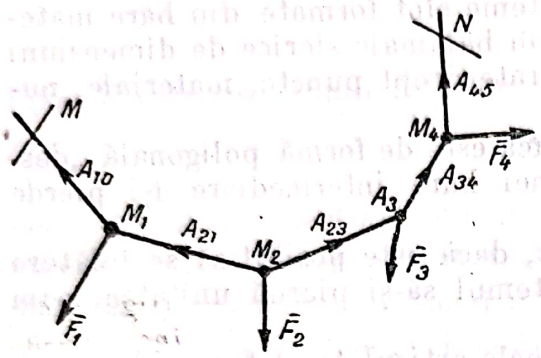

Fig. 74

În fig. 74 redăm un poligon funicular deschis, obținut prin tăierea barelor M_0M_1 în M și M_4M_5 în N, în echilibru sub acțiunea forțelor aplicate $\overline{F}_i$ în punctele (noduri) M_i și a forțelor pur nodale $M_i M_{i-1}$.

După considerațiile de la paragraful precedent, condițiile de echilibru se vor deduce din condiția ca sistemul de forțe care solicită fiecare nod să fie nul. Fie un nod oarecare M_i *interior* poligonului funicular. Pentru simplificare, să presupunem că în acest nod se întîlnesc două bare $M_{i-1}\ M_i$ și M_iM_{i+1}. Fie $\overline{F}_i$ forța exterioară care solicită direct nodul M_i. Forțele de proveniență interioară sînt următoarele: bara $M_{i-1}\,M_i$ procură în nodul M_i forța $\overline{R}_{i-1,\,i} = -\,\overline{A}_{i,\,i-1}$; iar bara $M_i\,M_{i+1}$ procură aceluiași nod forța $\overline{A}_{i+1,\,i}$ (fig. 75). Poziția de echilibru a nodului M_i, adiacent celor două bare interioare poligonului, este determinată de condițiile:

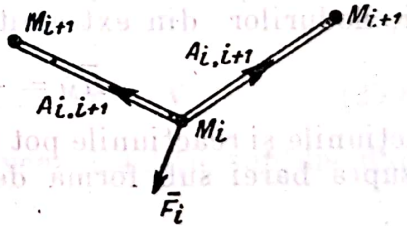

Fig. 75

$$\overline{F}_i - \overline{A}_{i,\,i-1} + \overline{A}_{i+1,\,i} = 0 \qquad (i = 2,3,\ldots n-1) \qquad (26.1)$$

Dacă una din barele adiacente este bară limită (bara *1* sau bara *n*) avem, pentru nodurile extreme M_1 și M_n:

$$\overline{F}_1 + \overline{A}_{2,\,1} = 0\ ; \quad \overline{F}_n - \overline{A}_{n,\,n-1} = 0\ . \qquad (26.2)$$

257. **Condiția de echilibru.** Pentru un sistem articulat, condiția necesară și suficientă de echilibru este ca rezultanta forțelor exterioare să fie nulă și momentele rezultante ale forțelor exterioare aplicate nodurilor anterioare sau următoare unui nod dat, în raport cu acest nod, să fie nule.

Condiția este necesară. Să sumăm relațiile (26.1) și (26.2); găsim:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = 0\ . \qquad (26.3)$$

Să sumăm membrii întîi ai ecuațiilor (26.1) pînă la nodul i. Avem, evident:

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 \ldots + \overline{F}_i + \overline{A}_{i+1,\,i} = 0 \qquad (26.4)$$

relație, care arată că sistemul de vectori $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_i$, este echivalent cu un vector unic $-\overline{A}_{i+1,\,i} = \overline{R}_{i,\,i+1}$. Dar atunci (Anexa I, § 19) momentul acestui sistem de vectori, în raport cu punctul M_i, este nul.

Condiția este suficientă. Dacă momentele rezultante ale vectorilor precedenți nodului M_i, în raport cu acest nod, sînt nule, acest sistem de vectori este echivalent cu un singur vector. În consecință, vom avea o relație de forma (26.4) pentru toți $i = 1,2,\ldots n-1$. Scăzînd relația (26.4) din relația (26.3) pentru $i = n-1$, și din fiecare relație (26.4) scăzînd precedenta ei, obținem relațiile de condiție (26.1) și (26.2).

258. **Poligonul lui Varignon.** Printr-un punct P_1 din spațiu ducem vectorul $\overrightarrow{P_1P_2} = \overline{F}_1$ și succesiv $\overrightarrow{P_2P_3} = \overline{F}_2, \ldots \overrightarrow{P_{n-1}P_n} = \overline{F}_{n-1}$, echipolenți cu forțele care solicită nodurile unui sistem articulat, simplu conex. Condiția necesară de echilibru, care cere ca rezultanta acestor forțe să fie nulă, exprimă proprietatea geometrică după care poligonul $P_1, P_2, \ldots P_n$ (fig. 76 *b*), numit *poligonul lui Varignon* (poligonul forțelor) trebuie să fie *închis*; așadar:

$$\overrightarrow{P_nP_1} = \overline{F}_n .$$

Această proprietate oferă un mijloc grafic pentru cercetarea configurațiilor de echilibru, prin construcții geometrice.

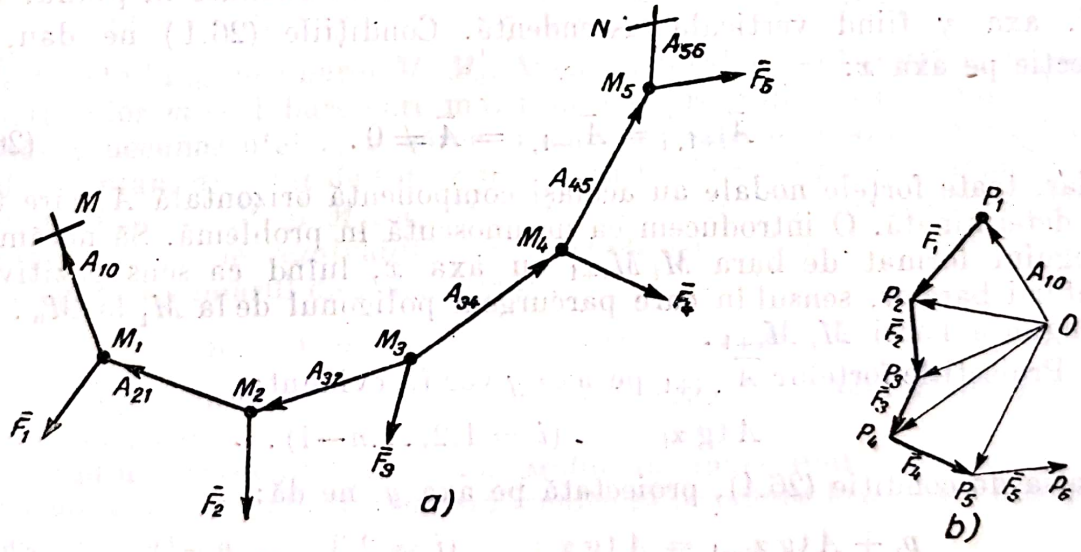

Fig. 76

Proprietate. În poligonul lui Varignon, asociat unui poligon funicular $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (fig. 76 *a*), laturile și diagonalele sînt echipolente forțelor nodale $\overline{A}_{12}, \overline{A}_{23}, \ldots \overline{A}_{n-1,\,n}$. În adevăr:

$$\overrightarrow{P_2P_1} = -\overline{F}_1 = \overline{A}_{12}$$

după prima relație (26.2). Din aproape în aproape se deduc și celelalte relații (26.1) și (26.2). Apoi, pe diagonale:

$$\overrightarrow{P_3P_1} = \overrightarrow{P_3P_2} + \overrightarrow{P_2P_1} = -\bar{F}_2 - \bar{F}_1 = -\bar{A}_{12} + \bar{A}_{23} + \bar{A}_{12} = \bar{A}_{23}$$

În fig. 76 am construit poligonul forțelor (b) asociat poligonului funicular în echilibru (a). Trebuie ca $\overrightarrow{P_iP_{i+1}} = \vec{F}_i$; $\overrightarrow{OP_i} = \bar{A}_{i,\,i-1}$.

259. **Cazul forțelor paralele.** Acest caz prezintă o deosebită însemnătate, întrucît este realizat în natură prin cîmpul gravitațional.

Forma cea mai uzitată de sistem articulat este sistemul alcătuit din bare rigide *grele*, fixat în cele două extremități M_1 și M_n. Atunci, greutatea se exercită conform teoremei de la § 256 asupra nodurilor $M_2, \ldots M_{n-1}$ și este reprezentată printr-un sistem de forțe paralele. În acest caz, poligonul funicular este *plan*. În adevăr, poligonul lui V a r i g n o n se reduce la figura plană formată dintr-un punct P_1 (în locul lui O), numit *pol*, care se unește cu punctele $P_2, P_3, \ldots P_n$, de pe o dreaptă paralelă cu direcția comună a forțelor solicitante. Laturile poligonului funicular, după proprietatea de la § 258, vor fi paralele cu direcțiile $\overline{P_3P_1}$, $\overline{P_4P_1}$ etc., deci așezate în același plan.

260. **Sistem articulat în cîmpul gravitațional.** În cazul greutății, planul poligonului funicular este vertical, trecînd prin punctele extreme, fixe. Forțele care solicită sistemul sînt, în acest caz, greutățile barelor p_2, $p_3, \ldots p_{n-1}$.

Construcția poligonului funicular se face cu ajutorul condițiilor de echilibru (26.1) și (26.2). Să alegem un sistem de coordonate în planul vertical, axa y fiind verticala ascendentă. Condițiile (26.1) ne dau, în proiecție pe axa x:

$$\bar{A}_{i+1,\,i} = \bar{A}_{i-1,\,i} = \bar{A} \neq 0. \tag{26.5}$$

Așadar, toate forțele nodale au aceiași componentă orizontală A, care trebuie determinată. O introducem ca necunoscută în problemă. Să notăm cu α_i unghiul format de bara M_iM_{i+1} cu axa x, luînd ca sens pozitiv al orientării barelor, sensul în care parcurgem poligonul de la M_1 la M_n. Fie l_i lungimea barei M_iM_{i+1}.

Proiecțiile forțelor $\bar{A}_{i,\,i+1}$ pe axa y vor fi, evident:

$$A \operatorname{tg} \alpha_i \qquad (i = 1,2,\ldots n-1).$$

Ecuația de condiție (26.1), proiectată pe axa y, ne dă:

$$p_i + A \operatorname{tg} \alpha_{i-1} = A \operatorname{tg} \alpha_i; \qquad (i = 2,3, \ldots\ n-1) \tag{26.6}$$

ceea ce reprezintă $n-2$ ecuații pentru determinarea celor $n-1$ unghiuri α_i și a necunoscutei auxiliare A. Pentru găsirea celorlalte două ecuații necesare, să scriem relațiile care exprimă poziția punctului final $M_n(x_n, y_n)$ față de poziția punctului inițial $M_1(x_1, y_1)$, cunoscute:

$$x_n = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} l_i \cos \alpha_i; \quad y_n = y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} l_i \sin \alpha_i. \tag{26.7}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cele n ecuații (26.6) și (26.7) rezolvă problema. Să punem:

$$A \operatorname{tg} \alpha_1 = a.$$

Sumînd ecuațiile (26.6), obținem:

$$\operatorname{tg} \alpha_i = -\frac{a + \Sigma p_i}{A}; \qquad (i = 2,3, \ldots n-1)$$

relație care exprimă unghiurile α prin necunoscutele auxiliare a și A. Formăm cos α_i și sin α_i și înlocuim în (26.6). Vom avea două ecuații pentru cele două necunoscute a și A, în funcție de cantitățile cunoscute: pozițiile extreme, lungimile laturilor și greutățile laturilor.

261. **Sisteme multiplu conexe. Rețele.** Rețelele sînt sisteme articulate *rigide* constituite din bare rigide articulate, situate toate în același plan, așa fel încît se poate suprima una din aceste bare fără ca rețeaua să-și piardă conexiunea. Ele pot să fie de două categorii: 1. Rețele deformabile; cum este cazul unui poligon închis, articulat, care-și poate varia configurația. 2. Rețele nedeformabile; cum este cazul unui poligon complet închis. Aceste rețele sînt, la rîndul lor, de două feluri: α) rețele stabile, posedînd bare *supraabundente* de legătură, astfel încît să se poată suprima o bară, rețeaua rămînînd totuși nedeformabilă; β) rețele labile: dacă înlăturăm o bară de legătură ele devin deformabile.

O astfel de rețea formată din m bare și n noduri are fixată poziția în planul figurii dacă se fixează două puncte extreme ale unei bare intermediare $M_i M_j$. Fie un sistem de coordonate (x, y) la care raportăm poziția nodurilor și barelor. Condiția de rigiditate a barelor ne dă:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = l_{ij}^2, \quad (i, j = 1,2, \ldots n \neq s, k) \qquad (26.8)$$

unde l_{ij} este lungimea barei $M_i M_j$. Avem în total $m - 1$ ecuații, corespunzătoare celor $m - 1$ bare care mai rămîn libere după fixarea barei $M_i M_j$. Numărul necunoscutelor, a căror cunoaștere este necesară pentru fixarea rețelei în plan, este dat de toți x și y pentru cele $n-2$ puncte rămase, după fixarea punctelor M_i și M_j; așadar, în total, $2(n-2)$ necunoscute. Pentru ca problema să fie rezolvabilă este necesar ca numărul de ecuații (26.8) să fie egal cu numărul de necunoscute:

$$m - 1 = 2(n - 2); \quad \text{deci } m = 2n - 3.$$

Se pot totuși construi rețele nedeformabile singulare, care să nu satisfacă acestei condiții[1]).

Studiul amănunțit al acestor probleme aparținînd *Staticii grafice*, ne oprim la aceste indicații sumare menite să orienteze în această disciplină cu caracter tehnic.

262. **Fire flexibile și inextensibile.** Un fir flexibil și inextensibil este, din punct de vedere mecanic, un sistem material posedînd o singură dimensiune, care se bucură de proprietățile caracteristice următoare: 1. supus la forțe exterioare, firul ia forma unei figuri geometrice, liniare; 2. arcul de fir cuprins între două puncte ale firului posedă, în orice configurație posibilă, aceeași lungime.

---

[1]) *T. Levi — Civita* [4], v. I, p. 612

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem, pentru moment, că firul este solicitat de forțe exterioare aplicate într-un număr discret de puncte ale firului.

263. **Postulatul static.** Condiția necesară și suficientă pentru ca un segment MN dintr-un fir flexibil și inextensibil să se afle în stare de echilibru, cînd este solicitat numai de două forțe $\overline{F}_M$ și $\overline{F}_N$ aplicate în extremități, este ca segmentul MN să fie rectiliniu și cele două forțe să fie egale și de sens contrar, avînd direcția segmentului, spre exterior.

Consecință. Din postulatul precedent urmează că, în fiecare punct al firului, forțele $\overline{A}$ posedă numai caracterul unor *tensiuni* $\overline{T}$, fiind excluse forțele de compresiune. În adevăr, să fixăm un punct P pe segmentul MN, între extremități, și să aplicăm segmentului PM postulatul static. Observăm că forțele care solicită punctul P sînt: forța $\overline{F}_M$ și forța $\overline{A}$ datorită segmentului adiacent PN. Pentru a avea echilibru este deci necesar și suficient ca:

$$\overline{A} = -\overline{F}_M = \overline{F}_N$$

așadar, forța se exercită ca o tracțiune asupra lui P.

Condițiile de echilibru. Un fir flexibil și inextensibil, solicitat de forțe aplicate într-un număr finit de puncte, se comportă, în ceea ce privește configurația de echilibru, ca un sistem articulat. Evident, va trebui să ținem seamă că punctele firului sînt solicitate exclusiv de tensiuni.

În adevăr, asupra unui punct P_i al firului acționează forțele direct aplicate $\overline{F}_i$, precum și cele două tensiuni $\overline{A}_{i,i+1}$ și $\overline{A}_{i-1,i}$ datorite segmentelor contingente. Pentru extremități, $A_{01} = 0$ și $A_{n-1,n} = 0$. Condițiile de echilibru revin atunci la relațiile (26.1) și (26.2) de la § 257 și, prin aceasta, teorema este demonstrată.

Poligonul funicular (configurația de echilibru) devine un „lanț".

264. **Problema firului continuu.** Spre deosebire de forțele care pot fi aplicate firului într-un număr discret și finit de puncte, există cîmpuri de forțe care se execită asupra tuturor elementelor firului, în mod *continuu*. Un astfel de cîmp este cîmpul gravitațional, care solicită fiecare element al firului, oricît de mic ar fi. Vom presupune firul omogen și constituit din elemente infinitezimale ds, deci rectilinii.

Să considerăm un fir flexibil și inextensibil de lungime dată l, atîrnat în punctele A și B (fig. 77). Fiecărui element de arc ds să-i aplicăm o forță cunoscută $\overline{F}$ (pe unitate de lungime). Vom aplica, în această problemă, metoda deplasărilor virtuale.

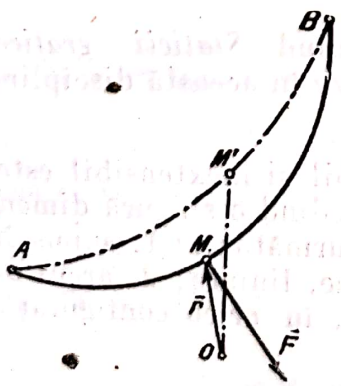

Fig. 77

Fie M un punct al firului avînd ca vector de poziție $\overline{r}$, față de un pol fix dat în spațiu, astfel încît arcul s se măsoară de la origine, de exemplu de la A, pe fir. Fie M' poziția lui M (astfel $A'M' = AM$) cînd firul ia o poziție vecină ($AM'B$) foarte puțin deplasată față de poziția (AMB).

Vectorul unitar al tangentei în M fiind $\overline{t}$, cum $\overline{t}^2 = 1$, urmează:

$$\overline{t}\,\delta\,\overline{t} = 0\,. \qquad (26.9)$$

Dar:

$$\delta \bar{t} = \delta \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d}{ds}(\delta \bar{r})$$

căci putem interverti ordinea variației finite δ cu variația infinitezimală d, ele fiind independente (deoarece lungimea arcului $AM = AM' = s$ rămîne aceeași). Din expresia (26.9) scoatem concluzia, că vom putea aplica fiecărui punct al firului flexibil deplasări virtuale $\delta \bar{r}$ care satisfac acestei condiții, anume:

$$\bar{t} \frac{d}{ds}(\delta \bar{r}) = 0, \qquad (26.9')$$

ceea ce înseamnă că derivata deplasării $\delta \bar{r}$ în raport cu s trebuie să fie un vector normal la curbă.

Forța concentrată care solicită fiecare punct M al firului va fi $\bar{F}ds$ (însemnînd prin $\bar{F}$ forța pe unitatea de lungime), luînd ca sens pozitiv pe curbă, sensul $\overrightarrow{AB}$; apoi, în punctele A și B de suspensie se exercită tensiunile $-T_A$ și $+T_B$. Principiul deplasărilor virtuale ne dă relația:

$$\int_0^l \bar{F}\, ds\, \delta \bar{r} - \bar{T}_A \delta \bar{r}_A + \bar{T}_B \delta \bar{r}_B = 0, \qquad (26.10)$$

valabilă numai sub restricția impusă de condiția (26.9') pentru deplasările virtuale permise.

Pentru a putea exprima convenabil cele două condiții de echilibru (26.9') și (26.10), să facem substituția:

$$\bar{J}(s) = \bar{J}_0 + \int_0^s \bar{F}\, ds, \qquad (26.11)$$

considerînd pe $\bar{F} = \bar{F}(s)$ ca o funcție de s.

Această funcție vectorială $\bar{J}(s)$ ne permite să formulăm comod cele două condiții (26.8) și (26.9). Substituția (26.11) revine la:

$$\bar{F}(s) = \frac{d\bar{J}(s)}{ds}$$

ceeea ce, înlocuind în (26.10) și integrînd o dată prin părți, ne dă:

$$\left[\bar{J}(b) + \bar{T}_B\right]\delta \bar{r}_B - \left[\bar{J}_0 + \bar{T}_A\right]\delta \bar{r}_A - \int_0^l \bar{J}(s)\, ds\, \delta \bar{r} = 0 \qquad (26.12)$$

oricare ar fi constanta $\bar{J}_0$. Pentru a introduce condiția (26.9') să observăm că printre deplasările virtuale care satisfac condiției de restricție (26.9') figurează și deplasarea particulară următoare: translația în direcție arbitrară:

$$d(\delta \bar{r}) = 0; \quad \delta \bar{r}_A = \delta \bar{r}_B.$$

Atunci (26.12) trebuind să satisfacă și acestei deplasări arbitrare, vom avea:

$$\bar{J}(b) - \bar{J}_0 + \bar{T}_B - \bar{T}_A = 0. \tag{26.13}$$

Să punem, pentru a introduce și condiția (26.9′):

$$\frac{d}{ds}(\delta\bar{r}) = \bar{p}\delta h, \tag{26.14}$$

unde $\bar{p}$ este un vector unitar care, după (26.9′), va fi normal firului, iar δh este o funcție arbitrară de s. Dacă vom cunoaște pe δh, relația (26.14) ne dă pe $\delta\bar{r}$, pînă la aproximație de un vector constant (independent de s), pe care-l putem determina luînd punctul B fix, $\delta\bar{r}_B = 0$. Ținînd seamă de (26.13) și (26.14) și luînd $\bar{J}_0 + \bar{T}_A = 0$ (ceea ce determină tensiunea în A) relația (26.12) devine:

$$\int_0^l \bar{J}(s)\,\bar{p}\,\delta h\,ds = 0 \tag{26.15}$$

oricare ar fi δh. Așadar, este necesar și suficient ca:

$$\bar{J}(s)\,\bar{p} = 0$$

ceea ce înseamnă că vectorul $\bar{J}(s)$ este mereu tangent la fir. Însemnînd cu $\bar{T}(s)$ o funcție convenabilă de arcul s, putem scrie:

$$\bar{J}(s) = -T(s)\,\bar{t} \tag{26.16}$$

sau încă, derivînd în raport cu s:

$$\bar{F} + \frac{d}{ds}\left[T(s)\frac{d\bar{r}}{ds}\right] = 0. \tag{26.17}$$

Prin urmare, pentru ca firul să fie în echilibru, este necesar și suficient să găsim o funcție $T(s)$ care satisface la ecuația (26.17). Pe de altă parte, forțele aplicate în extremitățile firului trebuie să satisfacă relația:

$$\int_0^l \bar{F}ds + \bar{T}_B - \bar{T}_A = 0. \tag{26.18}$$

Aceste forțe T_B și T_A sînt tangente la fir în B și A. În adevăr, după (26.15) și (26.16):

$$\bar{J}_0 = -\bar{T}_A = -T(0)\,\bar{t}$$

și la fel pentru $\bar{T}_B$, unde $s = l$.

Condiția de echilibru (26.17) este susceptibilă de o interpretare mecanică interesantă. Să presupunem că suprimăm porțiunea de fir de la M pînă la B. Porțiunea rămasă AM va trebui să fie în echilibru dacă aplicăm în A o forță $\bar{T}_A$ și în M o forță $\bar{T}$ care va exercita asupra extremității M a arcului (suprimat) MB, reacțiunea $-\bar{T}$ (v. § 256).

Scanned with OKEN Scanner

Porțiunea de fir AM fiind în echilibru, după teoremele generale, trebuie ca rezultanta tuturor forțelor să fie nulă și momentul forțelor în raport cu originea să fie de asemenea nul.

Să considerăm o porțiune infinitezimală de arc $\overline{MM_1} = ds$. Asupra ei acționează forțele $d\bar{T}$ și $\bar{F}ds$, deci:

$$d\bar{T} + \bar{F}ds = 0 \tag{26.19}$$

va reprezenta prima condiție de echilibru. Condiția a doua:

$$\bar{r} \times \bar{F}ds + d(\bar{r} \times \bar{T}) = 0$$

unde termenul al doilea reprezintă diferența momentelor:

$$-\bar{r} \times \bar{T} + \bar{r}_1 \times \bar{T}_1 = d(\bar{r} \times \bar{T}),$$

în extremitățile elementului de arc MM_1, se transformă astfel:

$$\bar{r} \times \bar{F}ds + d\bar{r} \times \bar{T} + \bar{r} \times d\bar{T} = \bar{r} \times (\bar{F}ds + d\bar{T}) + d\bar{r} \times \bar{T} = 0;$$

dar, după (26.19), rezultă $d\bar{r} \times \bar{T} = 0$, ceea ce ne dă condiția ca $\bar{T}$ să fie tangent la fir:

$$\bar{T}(s) = T(s)\frac{d\bar{r}}{ds}. \tag{26.20}$$

Relația (26.20) exprimînd, împreună cu (26.19), condiția de echilibru, ne permite interpretarea mecanică a funcției $T(s)$ care poate fi numită *tensiunea firului* în fiecare punct M. Acțiunea porțiunii MB asupra porțiunii AM este o *tracțiune*, deci T este pozitivă. E clar că (26.19) și (26.20) reproduc condiția (26.17) găsită mai sus. Regăsim deci, pe această cale, noțiunile introduse la § 262 și § 263.

265. **Ecuațiile intrinsece.** Relația (26.17) se mai scrie:

$$\bar{F} + \frac{dT(s)}{ds}\bar{t} + T(s)\frac{1}{\rho}\bar{n} = 0, \tag{26.21}$$

unde ρ este raza de curbură în M [v. Formulele lui Frenet, (Anexa I, § 27)]. Proiectată pe cele trei direcții, ecuația (26.21) se scrie, scalar:

$$F_t + \frac{dT(s)}{ds} = 0; \qquad F_n + \frac{1}{\rho}T(s) = 0; \qquad F_b = 0 \tag{26.21'}$$

sistem, care constituie ecuațiile intrinseci ale echilibrului firului.

266. **Problema practică. Probleme particulare.** În practică, problema care se pune asupra echilibrului firului flexibil nu cere să se cerceteze dacă poziția dată firului este de echilibru, ci invers, se cere să determine poziția pe care trebuie s-o dăm firului pentru ca să fie în echilibru. Deci, dîndu-se forța exterioară $\bar{F}$ în funcție de poziția elementului ds și de orientarea lui în spațiu, adică $\bar{F} = \bar{F}\left(x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$, se cere să se determine x, y, z și T, problemă importantă în tehnică.

Scanned with OKEN Scanner

Trebuie să ținem seamă de condiția suplimentară:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{26.22}$$

Numărul constantelor arbitrare care se pot determina prin condițiile inițiale, sînt șase [de ex.: x_0, y_0, z_0, T_0 și două din derivatele lui x, y, sau z în raport cu s, avînd în vedere relația (26.22)].

Cazuri particulare

a) Forța exterioară derivă dintr-un potențial $\bar{F} = -\operatorname{grad} V$. Atunci, prima ecuație (26.21) devine:

$$T - V = \text{const.} \tag{26.23}$$

și constituie o integrală primă.

b) Forțele sînt concurente sau paralele. În acest caz, curba funiculară este plană. În adevăr, dacă forțele sînt *concurente*, luăm punctul lor de întîlnire drept origine a axelor.

Atunci, $\bar{F}_s$ are aceiași direcție cu $\bar{r}_s$, iar ultima ecuație (26.21′) $\bar{F}\bar{b} = 0$, ne dă $\bar{r}\bar{b} = 0$.

În cazul forțelor *paralele*, fie $\bar{u}$ vectorul unitar al direcției forțelor. Relația ultimă (26.21′) ne dă $\bar{u}\bar{b} = 0$. Derivînd în raport cu s se obține $\tau \bar{r}\bar{n} = 0$ sau $\tau \bar{u}\bar{n} = 0$, unde τ este raza de torsiune. Așadar, or $\bar{r}\bar{n} = 0$, or $\bar{u}\bar{n} = 0$ (firul este rectiliniu), or torsiunea $\tau = 0$ (firul este plan).

În acest caz, din (26.17), se deduce că proiecția tensiunii pe o direcție perpendiculară pe $\bar{u}$ este constantă. Pentru a stabili acest fapt este suficient să se înmulțească (26.17) scalar cu vectorul unitar perpendicular pe $\bar{u}$.

c) Admitem că singura forță care solicită firul este *frecarea de alunecare*. Dacă reacțiunea normală este N, atunci $F_n = N$ și $F_t = fN$, unde f este coeficientul de frecare. Ecuațiile (26.21′):

$$-\frac{dT(s)}{ds} = fN; \quad N = -\frac{T(s)}{\rho}.$$

Luăm drept suprafață pe care alunecă firul un cilindru de rază $R = \rho = \text{const}$. Eliminînd pe N între ecuațiile precedente, obținem succesiv:

$$\frac{dT(s)}{ds} = f\frac{T}{R}; \quad \frac{dT}{T} = \frac{f}{R}ds; \quad T = T_0 e^{\frac{f}{R}s}.$$

Se poate observa că $s = \theta R$, unde θ este unghiul subîntins de arcul de lungime s pe care firul este în contact cu cilindrul. Rezultă:

$$T = T_0 e^{f\theta}$$

formulă care se numește *formula lui Euler* și servește, în practică, la calculul tensiunii în tehnica alunecării curelelor de transmisie. T și T_0 sînt tensiunile la capetele porțiunii pe care cureaua este în contact cu cilindrul.

Scanned with OKEN Scanner

267. **Aplicație. Echilibrul unui fir greu. „Lănțișorul".** Curba formată de firul în echilibru va fi, după cele spuse mai sus, plană. Considerăm firul omogen, de densitate ρ. Ecuația (26.17) ne dă:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0, \qquad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)=\rho g. \tag{26.24}$$

Putem utiliza integrala primă (26.23) în locul ultimei ecuații (26.24):

$$T=\rho g\,(y-c) \tag{26.25}$$

unde c este o constantă. Din prima ecuație (26.24) deducem:

$$T(s)\frac{dx}{ds}=\text{const.}$$

sau, însemnînd constanta din membrul al doilea cu $\rho\, a\, g$:

$$(y-c)\frac{dx}{ds}=a$$

de unde, ținînd seamă de (26.22) și eliminînd arcul s:

$$\pm\, dx=\frac{a\,dy}{\sqrt{(y-c)^2-a^2}}\,.$$

Integrînd, găsim:

$$\pm\frac{x-b}{a}=\ln\frac{y-c+\sqrt{(y-c)^2-a^2}}{a}$$

sau:

$$y-c=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x-b}{a}\,. \tag{26.26}$$

Obținem astfel ecuația *lănțișorului*. b este o nouă constantă de integrare. Cele trei constante arbitrare pot fi determinate dacă se dă o condiție asupra curbei, de pildă, curba să treacă prin două puncte date $A\,(x_1,\, y_1)$ și $B\,(x_2,\, y_2)$, iar lungimea firului să fie l.

Însemnînd cu:

$$x_2-x_1=h>0; \quad y_2-y_1=k$$

avem:

$$k=\frac{a}{2}e^{-\frac{b}{a}}\left(e^{\frac{x_2}{a}}-e^{\frac{x_1}{a}}\right)+\frac{a}{2}e^{\frac{b}{a}}\left(e^{-\frac{x_2}{a}}-e^{-\frac{x_1}{a}}\right).$$

Cum:

$$s=a\,\mathrm{sh}\,\frac{x-b}{a}$$

atunci:

$$l=\frac{a}{2}e^{-\frac{b}{a}}\left(e^{\frac{x_2}{a}}-e^{\frac{x_1}{a}}\right)-\frac{a}{2}e^{+\frac{b}{a}}\left(e^{-\frac{x_2}{a}}-e^{-\frac{x_1}{a}}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem, aşadar, două relaţii:

$$l + k = ae^{-\frac{b}{a}}\left(e^{\frac{x_2}{a}} - e^{\frac{x_1}{a}}\right) \tag{26.27}$$

$$l - k = -ae^{+\frac{b}{a}}\left(e^{-\frac{x_2}{a}} - e^{-\frac{x_1}{a}}\right).$$

Deducem:

$$l^2 - k^2 = a^2\left(e^{\frac{h}{2a}} - e^{-\frac{h}{2a}}\right)^2$$

sau, însemnînd:

$$\frac{h}{2a} = z, \quad \frac{2\sqrt{l^2 - k^2}}{h} = m$$

ecuaţia care determină pe a (respectiv z) este:

$$e^z - e^{-z} - mz = 0.$$

Cum $h>0$ şi $a>0$, căci $\rho\, ag$ reprezintă proiecţia orizontală a tensiunii, care este pozitivă, z trebuie să fie pozitiv. Observăm că $m>2$ (adică $l^2>h^2+k^2$). Ecuaţia în z are o singură rădăcină pozitivă. În adevăr:

$$u = e^z - e^{-z} - mz$$

este nulă pentru $z = 0$, iar derivata ei:

$$u' = e^z + e^{-z} - m$$

este negativă: $u'(0) = 2 - m<0$. Aşadar, de la $z = 0$, u începe a descreşte cînd z creşte devenind negativă. Pentru o valoare pozitivă $z = z_0>0$ derivata se anulează, iar $u(z)$ devine pozitivă, crescînd către $+\infty$.

Aşadar, există o singură rădăcină pozitivă $z = \zeta$ pentru z. Avem atunci $a = \frac{h}{2\zeta}$ iar ecuaţiile (26.27) dau pe b. Constanta c se deduce din (26.26) punînd $x = x_1$, $y = y_1$.

268. **Forţă normală la fir.** În acest caz, ecuaţiile intrinseci (26.21) ne dau:

$$\frac{dT}{ds} = 0$$

şi deci $T = \text{const}$.

Apoi:

$$\frac{1}{\rho}T = F.$$

Forţa este situată în planul osculator de partea convexităţii:

$$-\bar{F}\bar{n}\ (F>0).$$

Torsiunea este constantă de-a lungul firului, iar curbura este proporţională cu F.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu: *Fir omogen greu putînd să alunece, fără frecare, pe o curbă fixă.* Presupunem, spre a fixa ideile, curba plană. Pe ea, luăm un punct fix ca origine a arcelor s. Faţă de un sistem de coordonate din planul curbei, ordonata unui punct oarecare se poate exprima prin ecuaţia $y = f(s)$. Forţa este $Fdl = mgdl$. Masa totală a firului fiind M şi lungimea sa l, pentru elementul dl avem $mg = Mgdl/l$. Condiţia de echilibru se scrie:

$$M\ddot{s} = \int_0^l F \cos\alpha \, dl = \int_0^l \left[-\frac{Mg}{l} f(s) \right] dl$$

sau:

$$\ddot{s} = -\frac{g}{l} \int_0^l f'(s + l) \, dl = -\frac{g}{l} \left[f(s+l) - f(s) \right] .$$

Calculul unui caz particular. Curba fixă să fie linia de cea mai mare pantă a unui plan înclinat, care face unghiul β cu orizontul. Firul AB este aşezat pe această linie aşa fel încît extremitatea sa inferioară B ajunge exact punctul de întîlnire a liniei de cea mai mare pantă cu orizontul I. Fie $IB = -y$ cantitatea verticală cu cît a alunecat firul peste poziţia iniţială. Punînd în evidenţă arcul s, avem pe porţiunea verticală: $y = -s$; pe porţiunea oblică AI avem $y = -s \sin\beta$. Vom efectua integrala de mai sus descompusă în doi termeni:

$$\int_0^{l-y} (-\sin\beta) \, dl + \int_{l-y}^{l} (-dl) = -\sin\beta \, (l - y) - y.$$

Ecuaţia diferenţială care dă pe y este aşadar:

$$\ddot{y} - \frac{g}{l}(1 - \sin\beta) \, y = g \sin\beta .$$

Integrala generală a acestei ecuaţii este:

$$y = A \operatorname{ch}\omega t + B \operatorname{sh}\omega t - \frac{g \sin\beta}{\omega^2}$$

unde $\omega^2 = \frac{g}{l}(1 - \sin\beta)$. Constantele A şi B se determină prin condiţiile iniţiale: $t = 0$; $y = 0$; $\dot{y} = 0$. Se găseşte: $A = g \sin\beta/\omega^2$; $B = 0$.

269. **Fir pe suprafaţă. Geodezice.** (Anexa I, § 32). Cazul precedent se realizează întinzînd un fir liber, avînd greutatea neglijabilă, pe o suprafaţă perfect netedă (fără frecare). Singura forţă aplicată fiecărui element al firului este, în aceste condiţii, reacţiunea normală a suprafeţei. Cum planul osculator este normal la suprafaţă, firul se aşază pe o geodezică.

Curba de echilibru a firului bine întins, între două puncte nu prea îndepărtate pe o suprafaţă perfect netedă, este linia cea mai scurtă care uneşte aceste două puncte pe suprafaţă.

Această proprietate caracterizează *liniile geodezice* ale suprafeţei de sprijin. De exemplu, pe o sferă geodezicele sînt cercurile mari, pe care un segment de arc, mai mic decît o semicircumferinţă, reprezintă distanţa cea mai

scurtă între cele două puncte extreme. Pe o suprafață de rotație, meridianele sînt linii geodezice; reciproca nu este adevărată.

Cum tensiunea este constantă, rezultă că și în extremitățile firului $T_A = T_B$. Prin urmare, firul se așază pe suprafață, fără frecare, ca și cum ar fi solicitat de două forțe aplicate în extremități, avînd intensitățile proporționale cu razele de curbură ale firului în aceste puncte.

270. **Fir așezat pe o suprafață, cu frecare.** Admițînd că razele de curbură ale firului în extremități sînt egale, forțele F_A și F_B, aplicate în extremități, vor fi egale în cazul echilibrului fără frecare. Va fi însă suficient să variem cît de puțin valoarea uneia din aceste forțe spre a perturba complet starea de echilibru. În practică însă, lucrurile nu se petrec astfel, din cauza intervenției efectului de frecare.

Să presupunem așadar, că asupra unui fir așezat pe o suprafață aspră acționează forțe aplicate în extremități. Dacă nu există frecare, aceste forțe sînt echivalente (§ 268) cu o forță normală la fir. Efectul frecării face însă ca forța să nu mai fie normală la fir, ci să aibă o componentă tangențială firului. Din această cauză tensiunea nu va mai fi constantă de-a lungul firului.

Fie $\overline{R}$ reacțiunea suprafeței, (singura forță $\overline{F}$), posedînd după cele stabilite mai sus o componentă tangențială R_t, care caracterizează existența frecării. Componenta normală R_n se identifică atunci cu reacțiunea normală N a suprafeței.

Observînd din ecuațiile intrinsece că $R_b = 0$, rezultă că R_t este orientat după tangenta la curba funiculară. Cum $T > 0$, din ecuațiile (26.21) urmează că $R_n < 0$. Așadar, reacțiunea $\overline{R}$ trebuie să fie îndreptată spre interiorul suprafeței de sprijin.

Legile frecării statice ne dau:

$$|R_t| \leqslant f |R_n|$$

unde am însemnat cu f coeficientul de frecare statică. Din (26.21) urmează:

$$|dT| \leqslant f \frac{T}{\rho} |ds| \tag{26.28}$$

drept condiție de echilibru.

Diferența de tensiuni în extremități. Din (27.28) deducem, pentru cazul extrem:

$$dT = \pm f \frac{T}{\rho} ds; \tag{26.29}$$

dT păstrînd unul din semne pe tot parcursul liniei funiculare. Pentru a fixa ideile, să presupunem că tensiunea crește de la A la B. Integrînd între cele două puncte extreme, găsim:

$$\ln \frac{T_A}{T_B} = \int_A^B f \frac{ds}{\rho} \tag{26.30}$$

ceea ce exprimă diferența între valorile tensiunilor în extremitățile firului. Schimbarea semnului în (26.29) echivalează cu schimbarea lui A cu B în (26.30).

Scanned with OKEN Scanner

271. **Podul suspendat.** Un pod suspendat este alcătuit dintr-o linie funiculară construită dintr-un cablu de suspensie, de care este atîrnată cu ajutorul unor cabluri de legătură o punte orizontală pe care se află greutăţile care, sub formă unor forţe paralele cu cîmpul gravitaţional, solicită fiecare element al cablului de suspensie.

Să admitem că dispozitivul este omogen şi că solicitarea se exercită continuu. Forţele fiind paralele, funicularul este o curbă plană şi anume, în cazul greutăţii, aşezată în planul vertical. Să luăm un sistem de axe de coordonate în planul curbei avînd axa y orientată în direcţia comună a forţelor solicitante; în cazul greutăţii, direcţia şi sensul verticalei ascendente.

Din ecuaţiile (26.17), obţinem, în acest caz ($F_x = 0$; $F_z = 0$):

$$T\frac{dx}{ds} = a = \text{const.}, \tag{26.31}$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) = -F_y. \tag{26.32}$$

După ecuaţia (26.31), componenta pe axa x (orizontală) a tensiunii este constantă. Această proprietate este o confirmare a relaţiilor (26.5).

Forţa care solicită cablul de suspensie fiind datorită greutăţii punţii suspendate, fie $p = \rho g$ greutatea pe unitatea de lungime a acestei punţi. Elementul diferenţial dx al punţii va contribui cu o forţă de intensitate pdx.

Alegem ca sens pozitiv al axei x (direcţia punţii) sensul arcelor s crescătoare pe linia funiculară. În aceste condiţii, dx/ds va fi mereu pozitiv. În adevăr, relaţia (26.31) arată că raportul precedent nu se poate anula niciodată, căci aceasta ar însemna că T ar putea deveni infinit, ceea ce este exclus. Începînd deci printr-o valoare pozitivă, raportul precedent neputînd fi niciodată nul, va rămîne mereu pozitiv.

Forţa verticală este aşadar, dată de relaţia:

$$F_y ds = -p\,dx$$

deci:

$$F_y = -p\frac{dx}{ds}.$$

Ecuaţia (26.32) devine, în acest caz:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) = p\frac{dx}{ds}$$

de unde rezultă:

$$T\frac{dy}{ds} = px + \text{const.}$$

Să presupunem că alegem originea coordonatelor în punctul în care tangenta la curbă este orizontală ($x = 0$, $y = 0$, $dy/ds = 0$).
Atunci:

$$T\frac{dy}{ds} = px. \tag{26.33}$$

Scanned with OKEN Scanner

Împărţind (26.33) cu (26.32) şi integrînd, se obţine ecuaţia curbei:

$$y = \frac{p}{2a} x^2$$

aşadar, o parabolă cu vîrful în origine şi avînd axa y drept axă de simetrie, iar concavitatea îndreptată în sus.

Valoarea tensiunii se obţine ridicînd (26.32) şi (26.33) la pătrat, adunînd şi observînd relaţia de condiţie (26.22) în plan. Rezultă:

$$T^2 = p^2x^2 + a^2.$$

În punctul cel mai de jos al funicularului, T are valoarea minimă a.

MECANICA ANALITICĂ

Scanned with OKEN Scanner

Partea întîi

ECUAȚIILE MECANICII ANALITICE

Capitolul I

SISTEME OLONOME

272. **Obiectul mecanicii analitice.** În mecanica vectorială am studiat condițiile de echilibru și mișcare a corpurilor materiale cu ajutorul ecuației fundamentale:

$$m\ddot{\overline{r}} = \overline{F};$$

respectiv

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\overline{r}}) = \overline{F} \tag{1.1}$$

raportată la axe de coordonate (carteziene, polare, euleriene), în spațiul fizic, euclidian, în care se petrec fenomenele fizice, reale. Medotele sintetice de calcul ale mecanicii vectoriale prezintă unele dificultăți în ceea ce privește tratarea analitică a problemei dinamice, din cauză că aceste metode nu disting și nu elimină automat din calcule forțele de legături și reacțiunile care apar în ecuațiile de mișcare, restrîngînd, prin aceasta, caracterul de generalitate al problemei. În adevăr, pentru fiecare chestiune propusă sîntem nevoiți să alegem anumite coordonate și o anumită cale adecvată spre a fi convenabilă pentru calcul. Cu toate că una din problemele capitale ale mecanicii este tocmai calcularea efectivă a reacțiunilor pentru diferite dispozitive și construcții de mașini, analiștii secolului al 18-lea și-au propus problema căutării de criterii generale (pe cît posibil, universale) care să ofere mecanicii un aspect de știință universală. Aceste cercetări, fără să reprezinte soluția ultimă a problemei, au fost totuși încoronate ca sistem matematic unitar și fructuos, sub formă cizelată de J. L. L a g r a n g e în celebra sa „Mécanique analytique“[1]).

Obiectul mecanicii analitice se deosebește de obiectul mecanicii vectoriale numai în ceea ce privește metodele analitice de tratare a problemei, cîmpul de investigație al fenomenelor mecanice putînd fi numai întru atît extins, întrucît noile metode analitice permit tratarea unor fenomene fizice modelate după tipicul celor mecanice. De pildă, modelele mecanice

[1]) *J. L. Lagrange* [2].

de atom, teoria cuantică a oscilatorilor și alte efecte nemecanice pot fi analizate teoretic cu ajutorul dispozitivului de calcul pus la îndemînă de metodele mecanicii analitice. Din punct de vedere matematic, metoda analitică este mai cuprinzătoare și mai uniformă, permițînd să se aplice cu mai mare randament sistemelor de ecuații diferențiale ale mecanicii, principiile Analizei matematice și să se pună în valoare proprietăți remarcabile și fructuoase ale ecuațiilor sau sistemelor diferențiale.

S-au căutat, în primul rînd, forme de ecuații diferențiale bucurîndu-se de proprietăți analitice remarcabile și comode spre a obține posibilități de integrare avantajoase și cît mai generale. În al doilea rînd, metoda analitică deschidea perspectiva găsirii unui „principiu universal" drept bază a legii fundamentale, nu numai pentru întregul ansamblu de fenomene mecanice, dar chiar și pentru celelalte fenomene ale naturii fizice, pornindu-se, la început chiar, de la speculații teleologico-filozofice.

În această tendință, W. R. Hamilton (1846) căutînd să încadreze *Optica geometrică* în mecanică a reușit să stabilească proprietăți analitice importante pentru integrarea sistemelor de ecuații diferențiale ale mecanicii. P. L.N. de Maupertuis (1744) a izbutit, cel dintîi, să formuleze problema generală a mecanicii cu ajutorul unui principiu variațional, care s-a constatat a fi similar principiului optic al lui Pierre Fermat. Mai tîrziu, C. F. Gauss (1829) și H. Hertz (1886) reluînd problema, au căutat forme universale cu conținut filozofic pentru acest principiu care trebuia să guverneze întreaga natură. Constatarea că principiile integrale ale mecanicii conduc la ecuații, care nu sînt altceva decît ecuațiile lui Euler, relative la principiul variațional corespunzător, a fost de mare însemnătate pentru dezvoltarea metodelor de integrare a ecuațiilor mecanicii.

Pe de altă parte, perspectiva unificării Opticii (fenomenelor luminoase) cu mecanica nu a fost neglijată în cursul dezvoltării științei, astfel încît identitatea principiului mecanic al lui Maupertuis cu principiul optic al lui Fermat a putut fi pusă în evidență de către Louis de Broglie (1924) prin crearea noii disciplini a *mecanicii ondulatorie*.

273. **Coordonate generalizate.** Mecanica analitică înlocuește spațiul euclidian cu trei dimensiuni al fenomenelor fizice printr-un spațiu mai general, abstract, lipsit de contingență imediată și directă cu reprezentarea reală a mișcării, în intenția de a oferi posibilitatea formulării analitice cu ajutorul unor mărimi parametrice degajate de obligația identificării cu mărimi fizice. În acest scop, se introduc așa numitele *coordonate generalizate* posedînd caracterul analitic, abstract, al unor parametri generali și nu caracterul fizic al geometriei euclidiene.

Prin extinderea și generalizarea problemei de mișcare a unui singur punct material, s-a creat o mecanică a *sistemelor* de puncte materiale, după cum am văzut în dezvoltarea mecanicii vectoriale. Dar, sistemele de puncte materiale puse la îndemîna noastră de natură sînt, în cea mai mare parte, sisteme cu un *număr infinit de puncte materiale*, cum sînt corpurile elastice, fluidele, gazele și chiar rigidele. Pentru tratarea mișcării acestor sisteme se presupune, acolo unde este posibil, existența unui număr suficient de relații de legătură, astfel încît problema să fie redusă la o problemă de mișcare a unui sistem cu *un număr finit de puncte materiale* deci, cu un număr finit de grade de libertate (ex. rigidul). Mecanica mediilor continue, cu un număr infinit de grade de libertate, constituie un capitol distinct de mecanica sis-

Scanned with OKEN Scanner

temelor cu un număr finit de grade de libertate. Legătura dintre aceste două discipline se face prin întrebuințarea metodelor puse la dispoziția noastră de *mecanica statistică*.

În cele ce urmează, ca și pînă acum, ne vom mărgini la studiul *sistemelor materiale cu un număr finit de puncte materiale*, deci, cu un *număr finit de grade de libertate*.

Să considerăm, prin urmare, un sistem material format dintr-un număr foarte mare, dar *finit*, N, de puncte materiale. Fie (x_i, y_i, z_i) coordonatele carteziene ale punctului de masă m_i în spațiul euclidian cu trei dimensiuni E_3. Să admitem că este posibil ca să găsim $3N$ parametri $q^1, q^2,\ldots,q^{3N}$, legați de coordonatele carteziene prin relațiile:

$$x_i = x_i(q^1, q^2,\ldots q^{3N}; t);\quad y_i = y_i(q^r; t);\quad z_i = z_i(q^r; t),\quad (r = 1, 2,\ldots 3N) \quad (1.2)$$

astfel încît funcțiile (1.2) să fie continue și derivabile de cîte ori este nevoie, avînd determinantul funcțional diferit de zero; ceea ce permite inversarea sistemului (1.2), spre a determina pe toți q^r în funcție de (x_i, y_i, z_i). Corespondența (1.2) este, așadar, biunivocă. În notația folosită, am însemnat parametrii q^r cu indicii așezați *sus* din cauza contravarianței componentelor vectorilor reprezentați prin aceste cîtimi, după cum vom vedea mai jos.

Corespondența biunivocă (1.2) permite să acordăm mărimilor q^r denumirea (improprie) de „coordonate" într-un sens larg, analitic; cunoscînd acești parametri putem deduce, cu ajutorul relațiilor (1.2) un singur sistem de valori pentru coordonatele propriu zise (x, y, z) și prin aceasta, putem determina o poziție bine definită a sistemului dinamic, în fiecare moment t. Numim, în acest sens, parametrii q^r $(r = 1, 2,\ldots 3N)$ *coordonate generalizate* sau *coordonate lagrangeiene*. Cum ele sînt funcții continue și derivabile în raport cu timpul t, putem să le asociem mărimile $\dot{q}^r$, pe care, prin analogie, le vom numi *viteze generalizate*.

274. Spațiul figurativ R_{3N}. Spațiul fazelor R_{6N}.

a) „Configurația" unui sistem dinamic este determinată prin cunoașterea coordonatelor generalizate. Putem atunci imagina un spațiu cu $3N$ dimensiuni R_{3N} în care un punct figurativ să fie determinat prin cele $3N$ coordonate $q^1, q^2,\ldots q^{3N}$, în fiecare moment t. Ecuațiile:

$$q^1 = q^1(t),\quad q^2 = q^2(t),\ldots,q^{3N} = q^{3N}(t)$$

reprezintă mișcarea *unui* punct material în R_{3N}. Fiecărei poziții a punctului figurativ în R_{3N} îi corespunde, prin relațiile (1.2), o configurație a sistemului dinamic în reprezentarea reală, fizică. Prin aceasta, cîtimile q^r pot fi privite drept componentele contravariante ale vectorului de poziție în R_{3N}.

Întrebuințarea varietății R_{3N} ușurează, de multe ori, reprezentarea mișcării și studierea proprietăților analitice ale ecuațiilor de mișcare. Uneori vom fi conduși, pentru comoditatea raționamentului, să facem uz de spațiul fictiv A_{3N+1}, al coordonatelor $q^1, q^2,\ldots,q^{3N}$ și al timpului t; așadar, un spațiu-timp fictiv, neriemannian, *afin*, care nu are nimic comun cu spațiul-timp al *lumii* relativiste. Această reprezentare nu este decît o descriere geometrică a evoluției mișcării sistemului material.

Scanned with OKEN Scanner

Spațiul figurativ R_{3N} este o varietate metrică posedînd drept element metric fundamental dedus din metrica spațiului euclidian corespunzător:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{N} (dx_i^2 + dy_i^2 + dz_i^2) \tag{1.3}$$

expresie obținută făcînd în (1.3) substituțiile (1.2); anume:

$$ds^2 = \sum_{k,\,r=1}^{3N} g_{kr} dq^k dq^r \tag{1.4}$$

unde $g_{kr} = g_{rk}$ sînt funcții continue și derivabile de q^r și de t, avînd determinantul

$$g = |g_{kr}|$$

diferit de zero (căci altfel ds^2 ar conține mai puține dq^r, independente, decît $3N$).

Dacă punctele sistemului dinamic sînt *libere* putem reduce expresia (1.4) la forma normală cu coeficienții constanți (1.3) printr-o transformare liniară. Spațiul R_{3N} este atunci un spațiu de curbură nulă, deci euclidian. Dacă însă există anumite legături, spațiul R_{3N} devine un spațiu *riemannian* (de curbură pozitivă). În adevăr, legăturile, reducînd numărul dimensiunilor configurative, distrug caracterul euclidian al spațiului.

Dacă în relațiile (1.2) figurează explicit timpul, expresia (1.4) este o funcție *oarecare*, de gradul al doilea în dq^r (§ 294). Dacă în relațiile (1.2) nu figurează explicit timpul, expresia (1.4) este o funcție pătratică și *omogenă* în dq^r. Dacă este *nedefinită* ea poate fi adusă la forma normală printr-o transformare la axele principale:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{\alpha} ds_i^2 - \sum_{i=\alpha+1}^{3N} ds_i^2 \tag{1.4'}$$

și:

$$ds_i^2 = \lambda_j^i (q^1, \ldots, q^n)\, dq^{j2}. \quad (i = 1, 2, \ldots, 3N) \tag{1.4''}$$

În cazul cînd (1.4) este *pozitiv definită*, nu rămîn în (1.4') decît termenii cu semnul plus. Natura însăși a energiei cinetice, pentru o mișcare mecanică, acordă elementului metric în Mecanica newtoniană, caracterul de formă pătratică pozitiv definită.

În relativitatea restrînsă întîlnim o formă pătratică ds^2 nedefinită, în care trei termeni sînt negativi (coordonatele spațiale) și un termen pozitiv (coordonata temporală).

b) Starea unui sistem dinamic este determinată prin configurația lui (poziția) și starea de *mișcare* în imediata vecinătate a acestei poziții, așadar prin „elementul" $(q^r, \dot{q}^r;\ r = 1, 2, \ldots, 3N)$. Ne putem imagina un spațiu fictiv cu $2 \times 3\ N$ dimensiuni în care un punct figurativ să reprezinte, în fiecare moment „starea" sistemului dinamic. Numim acest spațiu, adeseori utilizat în Fizică, *spațiul fazelor*, sau *spațiul stărilor*. El are $6N$ dimensiuni și nu are caracterul unei varietăți metrice, fiind doar un spațiu *afin* căci nu se poate alege o unitate comună de măsură pentru ambele categorii de coordonate (q de poziție și $\dot{q}$ de mișcare). Totuși, precum vom vedea la

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
IAȘI

timp, el prezintă o mare importanță în reprezentarea analitică a mișcării. De fapt, prin introducerea cîtimilor numite „*impulsuri generalizate*“ și însemnate cu p_1, $p_2 \ldots p_{3N}$ (vezi § 273), care permite exprimarea tuturor $\dot{q}^r$ prin p_k, spațiul fazelor este definit în mod obișnuit prin varietatea $6N$ dimensională $(q^1, q^2, \ldots q^{3N}; p_1, p_2, \ldots p_{3N})$.

275. **Legături. Deplasări.** Pentru a putea utiliza noțiunea de coordonate generalizate introdusă mai sus, este necesar să analizăm mai amănunțit, din punct de vedere analitic, noțiunea de mișcare a sistemului dinamic în scopul de a subordona parametrii $(q^r, \dot{q}^r)$ stărilor reale ale sistemului material. Dar, un astfel de sistem material este alcătuit, precum se știe, dintr-un număr mare, dar finit, de particule materiale între care pot exista anumite legături de interacțiune, sau care sînt obligate să efectueze numai mișcări supuse unor anumite constrîngeri datorite acțiunilor unor eventuale forțe de legătură. Să admitem așadar, în general, existența legăturilor, și anume, *legături fără frecare*. Natura acestor legături fizice caracterizează problema analitică.

Din punctul de vedere al comportării analitice, legăturile se împart în două mari categorii (H. H e r t z): a) *legături olonome* și b) *legături neolonome*. Ele se divid, pe de altă parte, în două grupe (L. B o l t z m a n n): 1) *reonome;* cînd expresiile analitice care exprimă legăturile conțin explicit timpul; în acest caz t va figura explicit și în relațiile (1.2) de transformare; 2) *scleronome*, cînd în expresiile analitice care definesc legăturile nu figurează explicit timpul; în acest caz t nu va fi nici în relațiile (1.2).

Pentru analizarea caracterelor specifice, din punct de vedere analitic, ale celor două categorii de legături (olonome și neolonome) este necesar să cercetăm aspectul analitic al fenomenului de mișcare, pentru un sistem dinamic definit prin coordonatele generalizate.

Efectul de mișcare se reduce în ultima analiză, la *deplasările* punctelor care alcătuiesc sistemul material, ale unor regiuni din sistem sau ale sistemului în întregime, ca un tot unitar. Aceste deplasări pot fi de două feluri:

a) *Deplasări posibile*, *reale*, conforme cu legile dinamice ale mișcării, cînd sistemul evoluiază dintr-o configurație (1) avută în momentul t_1, pînă în configurația (2) pe care o prezintă în momentul t_2. Dacă $t_2 - t_1 = dt$, deplasarea posibilă (mișcarea fiind continuă) este infinitezimală și exprimată (pentru un punct) prin relația:

$$\bar{ds} = \bar{v}\, dt.$$

Cînd punctul este liber, dx_i, dy_i, dz_i sînt arbitrari (dați de legea mișcării); cînd însă punctul este supus la legături, dx_i, dy_i, dz_i nu mai sînt arbitrari, ci trebuie să satisfacă la anumite condiții restrictive. Asemenea mișcări condiționate au fost studiate în parte și în mecanica vectorială.

Deplasările posibile (dx_i, dy_i, dz_i, dt), în general independente, satisfac relațiilor:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial q^h} dq^h + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt; \quad dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial q^h} dq^h + \frac{\partial y_i}{\partial t} dt; \tag{1.5}$$

$$dz_i = \frac{\partial z_i}{\partial q^h} dq^h + \frac{\partial z_i}{\partial t} dt; \quad (i = 1\ 2, \ldots, N)$$

Scanned with OKEN Scanner

relații deduse prin diferențierea expresiilor (1.2). În notațiile precedente, ca și în cele ce urmează, facem mereu uz, dacă nu va fi de temut vre-o ambiguitate, de „convenția sumării" (Anexa III, § 70), evitînd de a purta mereu, în formule, semnul sumei Σ. Vom nota o *deplasare posibilă* prin litera d.

b) *Deplasări virtuale, compatibile cu legăturile.* Am constatat chiar în studiul mecanicii vectoriale că este util să luăm în considerare deplasări elementare, arbitrare și compatibile cu legăturile (*Principiul deplasărilor virtuale*) prin care să putem transpune sistemul dinamic dintr-o configurație inițială, dată, într-o configurație infinitezimal vecină, *într-un anumit moment dat*. Această condiție revine a ține în seamă că, pentru o deplasare virtuală, $\delta t = 0$. Așadar, toate punctele sistemului suferă o deplasare *spontană*, ele mișcîndu-se sincron.

Vom nota, spre distincție, o deplasare virtuală prin δ. În cazul legăturilor scleronome distincția dintre deplasările posibile (reale) și cele virtuale, dispare.

În cazul deplasărilor virtuale, ecuațiile (1.5) se transformă în

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q^k}\delta q^k;\quad \delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial q^k}\delta q^k;\quad \delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial q^k}\delta q^k,\qquad (i=1,2,\ldots,N). \tag{1.6}$$

Aceste relații subordonează deplasării (δx_i, δy_i, δz_i) efectuată în spațiul euclidian, deplasarea (δq^1, δq^2,...,δq^{3N}) în spațiul figurativ R_{3N} în mod univoc.

276. **Legături de mobilitate olonome și neolonome.** Cele mai generale legături la care poate fi supus un sistem dinamic se exprimă analitic printr-un număr $m \leqslant 3N$ de relații între coordonatele de poziție, componentele vitezelor, ale acceleraților și timpul t, sub forma (generală):

$$\Phi_r(x_i, y_i, z_i; \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i; \ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i; t) = 0,\ (r = 1,2,\ldots,m \leqslant 3N). \tag{1.7}$$

Legăturile pot fi realizate în mecanică prin forțele de reacțiune. Condiția ca legăturile să fie *fără frecare* este, precum se știe, ca lucrul mecanic al forțelor de legătură să fie nul, pentru o deplasare virtuală. Pentru a satisface la această condiție este necesar ca relațiile (1.7) să fie, în general, *omogene* în componentele vitezelor (C. C a r a t h e o d o r y) și să nu conțină accelerațiile.

Cînd în (1.7) figurează timpul t, legăturile sînt *reonome*. Cînd timpul nu figurează explicit, legăturile se numesc *scleronome*.

Sisteme olonome. Dacă în relațiile (1.7) nu figurează componentele vitezelor și ale acceleraților, legăturile se numesc olonome, iar sistemul dinamic este olonom. În acest caz, relațiile (1.7) se scriu:

$$\Phi_r(x_i, y_i, z_i; t) = 0.\qquad (r = 1,2,\ldots,m) \tag{1.7'}$$

Pentru o deplasare posibilă, cîtimile (dx_i, dy_i, dz_i) nu mai sînt independente, ci trebuie să satisfacă, după (1.7'), la relații de forma:

$$\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i}dz_i + \frac{\partial \Phi_r}{\partial t}dt = 0,\quad (r = 1,2,\ldots,m) \tag{1.8}$$

dedusă din (1.7') prin diferențiere.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru o deplasare virtuală (δx_i, δy_i, δz_i), condițiile (1.7′) ne dau:

$$\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i}\delta z_i = 0 \qquad (1.8')$$

căci pentru o deplasare virtuală $\delta t = 0$.

Sisteme neolonome.

După G. Hamel[1]) putem distinge:

1) Legături neolonome de speța 1ª:

$$\Phi\ (x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) = 0.$$

2) Legături neolonome de speța 2ª:

$$\Phi\ (x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}; t) = 0.$$

Dacă, în cazul 1) componentele vitezelor figurează liniar și omogen, aceste relații iau forma:

$$A_{ri}\,dx_i + B_{ri}\,dy_i + C_{ri}\,dz_i + D_r\,dt = 0, \quad (r = 1, 2, \ldots m) \qquad (1.9)$$

coeficienții fiind funcții continue de $(x_j, y_j, z_j; t)$, admițînd derivate în tot domeniul variabilelor (x, y, z, t), fără ca să fie posibil a transforma aceste ecuații astfel încît ele să fie făcute independente de componentele vitezelor. Cu alte cuvinte, *nu va fi posibil să se găsească nici o combinație integrabilă* cu ajutorul căreia relațiile (1.9) să fie aduse la forma (1.8), care este o *diferențială totală exactă*. În acest caz, sistemul este neolonom.

Relațiile (1.7′) și (1.9) poartă numele de *relații de mobilitate*. Ele sînt *bilaterale* dacă figurează semnul *egal*, iar dacă figurează semnul $>$ or $<$ relațiile de mobilitate se numesc *unilaterale*. În cele ce urmează ne vom ocupa de relațiile bilaterale.

Pentru simplificare putem lua în considerație numai ecuațiile de forma generală (1.9) cu specificarea: dacă aceste ecuații admit combinații integrabile, formînd un sistem *complet integrabil*, sistemul dinamic este olonom; dacă, dimpotrivă, sistemul (1.9) nu admite nici o combinație integrabilă, sistemul dinamic este neolonom.

Relațiile (1.9) sînt definite în spațiul euclidian E_3 al variabilelor (x_i, y_i, z_i), cu elementul fundamental dat de relația (1.3). Ecuațiile de transformare (1.2) subordonează însă, biunivoc, oricărei variații din spațiul E_3 o variație în spațiul figurativ al coordonatelor R_{3N} $(q^1, q^2, \ldots q^{3N})$. Ecuațiile (1.5) și (1.6) exprimă variațiile dx_i, dy_i, dz_i *liniar* prin dq^1, dq^2,... dq^{3N} și dt. Substituind aceste valori în (1.9) vom obține expresiile relațiilor de mobilitate în spațiul figurativ R_{3N}, cu metrica (1.4), sub forma:

$$a_{rs}\,(q^1, q^2, \ldots, q^n; t)\,dq^s + b_r\,(q^1, \ldots, q^n; t)\,dt = 0, \qquad (1.10)$$
$$(r = 1, 2, \ldots, m)$$

funcțiile a_{rs}, b_r de q^h și t fiind continue și derivabile în domeniul variabilelor, determinantul lor fiind diferit de zero.

---

[1]) *G. Hamel.* Nichtholonome Systeme höherer Art; în „Sitzungsberichte der Berliner Math. Ges.", 1938.

Ecuațiile diferențiale (1.10) în număr de m, constituie un *sistem de forme ale lui* P f a f f. Asupra proprietăților generale, necesare studiului analitic al sistemelor diferențiale ale Mecanicii, vom reveni mai tîrziu.

Dacă sistemul pfaffian (1.10) este *complet integrabil* [poate fi transformat în relații între termeni finiți (1.7′); admite factor integrant; este o diferențială totală exactă (1.8), resp. (1.8′)], relațiile (1.10) exprimă *legături olonome* (după H. H e r t z), iar sistemul dinamic se numește *olonom*. În cele ce urmează ne vom ocupa cu deosebire, cu studiul proprietăților sistemelor dinamice olonome.

În acest caz, după cum vom vedea în teorema următoare (§ 277), cele m relații de olonomie (1.10) ne permit să exprimăm m coordonate $q^1, q^2, \ldots, q^m$ în funcție de celelalte $3N - m$ coordonate, de m constante arbitrare (introduse prin integrare) și de t:

$$q^k = q^k\,(q^{m+1}, \ldots, q^{3N};\ c_1,\ c_2, \ldots,\ c_m;\ t), \quad (k = 1,\ 2, \ldots, m) \qquad (1.11)$$

astfel încît, prin fiecare punct din spațiu trece una și numai o varietate integrală (1.11). Dacă supunem varietatea (1.11) să satisfacă la anumite condiții inițiale (anume, să treacă printr-un punct dat) constantele c sînt determinate. Atunci, spațiul riemannian R_{3N} se reduce la subspațiul riemannian R_{3N-m}. Cele m direcții a_{rs} se înglobează în spațiul R_{3N}, reducîndu-i dimensiunile. Dacă $m = 3N + 1$, avem soluția banală $q^r = \text{const}$; $t = \text{const}$. Dacă $m = 3N$, ecuațiile (1.10) reprezintă o familie de curbe în R_{3N}.

Să presupunem, în general, că în R_{3N} există un număr $m' < 3N$ de relații (1.10) integrabile și un număr m' (așa în cît $m + m' < 3N$) de relații (1.10) pentru care *nu se poate găsi nici o combinație integrabilă*. După considerațiile de mai sus, varietatea olonomă R_m datorită celor m relații diferențiale integrabile se va înglobă în spațiul riemannian.

Celelalte m' relații diferențiale *neintegrabile* definesc m' *legături neolonome* mecanice, avînd drept interpretare *geometrică* existența unei varietăți neolonome $A_{m'}$, cu m' dimensiuni, cufundată în spațiul metric R_{3N} și definită prin pfaffianii (1.10), care exprimă condiția ca traiectoriile să se găsească în varietatea $R^{m'}_{3N}$ normală pe $A_{m'}$. Varietatea neolonomă $A_{m'}$ nu se poate înglobă în varietatea metrică R_{3N} care ar cuprinde și eventuale varietăți olonome, rămînînd distinctă de acestea. Acest fapt face ca în studiul varietăților $R^{m'}_{3N}$ metrica să rămînă dată prin elementul metric fundamental al lui R_{3N} (relația 1.4′), căreia i se alăturează, drept condiții suplimentare, formele pfaffiene (1.10). Interpretarea *mecanică* a formelor neintegrabile (1.10) arată că aceste relații de legătură exprimă o îngrădire a libertății de mișcare pentru sistemul dinamic, în domeniul deplasărilor *infinitezimale*.

În partea a doua a acestei expuneri vom arăta cîteva din proprietățile sistemelor neolonome. Studiul geometric, cu aplicații la unele probleme de fizică modernă și mecanică, a varietăților neolonome-scleronome, face obiectul de cercetare al diferiților matematicieni, printre care și profesorul G h. V r ă n c e a n u.

Deosebirea dintre caracterul olonom și neolonom al relațiilor de mobilitate (1.10) în R_{3N} se transmite reciproc, prin relațiile (1.2) și ecuațiilor (1.9) în E_3, căci în caz contrar s-ar găsi o transformare de coordonate care să schimbe caracterul diferențial al ecuațiilor (1.10), ceea ce nu este posibil.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru o deplasare virtuală în R_{3N} corespunzătoare deplasării virtuale (1.8′) din E_3, relațiile (1.10) iau forma:

$$a_{rs}(q^1, q^2, \ldots, q^n; t)\,\delta q^s = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots m)$$

deplasarea virtuală fiind spontană ($\delta t = 0$).

277. **Teoremă.** *Pentru un sistem olonom, numărul minim al gradelor de libertate este egal cu numărul coordonatelor generalizate independente.*

Fie un sistem de puncte materiale (x_i, y_i, z_i, $i = 1, 2, \ldots N$), supus la m relații de legătură (1.8), resp. (1.8′), *olonome*. Vom putea rezolva aceste ecuații și exprima m din variabilele (x, y, z) în funcție de celelalte $3N - m = n$ variabile distincte. Presupunem că putem subordona acestor n variabile distincte (x_j, y_j, z_j) un număr de n parametri $q^1, \ldots, q^n$, pe care să-i luăm drept coordonate generalizate, prin relații de forma (1.2). Problema dinamică este rezolvată, dacă putem găsi și integra n ecuații diferențiale de ordinul al doilea ale dinamicii sistemului și care să ne dea cele $q^1, q^2, \ldots, q^n$ coordonate:

$$q^r = q^r(t; c_1, \ldots, c_{2n}) \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \tag{1.12}$$

în funcție de timp și de anumite constante determinate prin condiții inițiale. În adevăr, prin relațiile (1.2) vom deduce din cunoașterea a n parametri q, valorile a n coordonate x, y, z; după care, din relațiile prin care am exprimat cele m coordonate (x_i, y_i, z_i) (relațiile de mobilitate olonome) în funcție de celelalte n variabile (x_j, y_j, z_j), vom putea calcula și restul coordonatelor (x, y, z), anume $3N - n = m$. Astfel, vom avea toate coordonatele (x_i, y_i, z_i); $i = 1, 2, \ldots m + n = 3N)$, iar sistemul material este perfect determinat.

Numărul n se numește *gradul de libertate* al sistemului. Pentru $n = 1$, sistemul se zice că este cu *legături complete*.

278. **Relațiile de permutabilitate.** Să aplicăm sistemului olonom (1.12) o deplasare virtuală infinitezimală $\delta q^r(t)$. Vom avea:

$$q^{r\prime} = q^r(t) + \delta q^r, \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \tag{1.13}$$

ceea ce reprezintă o curbă vecină curbei (1.12) în R_n, traiectorie „cinematic posibilă" pentru sisteme olonome: ea reprezintă o mișcare variată posibilă compatibilă cu legăturile putînd să fie obținută, din curba inițială, prin relații de legătură, suplimentare, adecvate. Acestei deplasări îi va corespunde o variație a vitezelor generalizate, (v. § 273):

$$\dot{q}^{r\prime} - \dot{q}^r = \delta\dot{q}^r = \delta\frac{dq^r}{dt}. \tag{1.14}$$

Dar, derivînd relațiile (1.13) în raport cu timpul și comparînd rezultatul cu (1.14), obținem:

$$\frac{d}{dt}(\delta q^r) = \delta\left(\frac{dq^r}{dt}\right).$$

Cum însă δ nu depinde de timp, deplasarea virtuală fiind spontană, rezultă:

$$d(\delta q^r) = \delta(dq^r) \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \tag{1.15}$$

ceea ce exprimă proprietatea suficientă, dar nu și necesară, proprietate după care, pentru un sistem olonom variațiile d și δ sînt permutabile între ele. Pentru sisteme neolonome, relațiile (1.15) nu mai sînt adevărate.

Scanned with OKEN Scanner

279. **Deplasări reversibile.** Să aplicăm sistemului dinamic o deplasare virtuală $\delta q^1, \ldots, \delta q^n$; $\delta t = 0$. Relațiile de mobilitate (1.8′) sînt satisfăcute, evident, și de deplasarea simetrică $(-\delta q^r)$. Așadar, rezultă că deplasările virtuale ale sistemelor cu legături bilaterale sînt *reversibile*.

Dacă sistemul posedă legături unilaterale, deplasările „de frontieră" nu mai sînt reversibile. Deplasările reale nu sînt reversibile decît dacă legăturile sînt scleronome.

280. **Principiul deplasărilor virtuale.** Acest principiu a fost enunțat și folosit în Mecanica vectorială pentru deplasări în spațiul euclidian. El poate fi extins și în spațiul figurativ al coordonatelor $q^1, q^2, \ldots, q^n$ prin faptul că transformările (1.6) subordonează oricărei variații în E_3 o variație corespunzătoare în R_n și reciproc.

Lucrul mecanic elementar al forțelor care solicită un sistem dinamic este nul pentru o deplasare virtuală, compatibilă cu legăturile.

Este locul să specificăm că există forțe care nu produc lucru mecanic. Am întîlnit, în dezvoltarea anterioară, astfel de forțe. Le reamintim:

a) Reacțiunile unei suprafețe, cînd mișcarea se efectuează pe suprafață fără frecare. Știm că în acest caz reacțiunile fiind normale la suprafață iar mișcarea efectuîndu-se pe suprafață, produsul scalar dintre forță și deplasare este nul (fiind perpendiculare între ele).

b) Reacțiunile unei suprafețe, cînd mișcarea se reduce la rostogolire, fără alunecare. În acest caz, punctul de aplicare al forței nu se deplasează (în primă aproximație).

c) Forțele de interacțiune care leagă două particule în mod rigid (distanța dintre ele rămînînd invariabilă).

Expresia lucrului mecanic virtual este, precum se știe, un scalar, deci un invariant față de transformări de variabile:

$$\delta L = \sum_i \overline{F}_i \, \delta \overline{r}_i \tag{1.16}$$

însemnînd cu $\overline{F}_i$ rezultanta forțelor producătoare de lucru mecanic din cauza deplasării $\delta \overline{r}_i$, care acționează punctul M_i. Făcînd în (1.16) transformările (1.6), relația precedentă devine:

$$\delta L = \sum_{r=1}^{n} Q_r \, (q^1, q^2 \ldots, q^n; \, t) \, \delta q^r. \tag{1.16′}$$

Atribuind analogiei dintre (1.16) și (1.16′) un înțeles mai larg, se acordă cîtimilor $Q_r \, (q; t)$ caracterul de *componente ale forței generalizate* în spațiul fictiv R_n, în care se efectuează deplasarea virtuală δq^r.

Cum componentele vectorului de deplasare δq^r sînt contravariante, iar membrul întîi al relației (1.16′) este un scalar, urmează că mărimile Q_r sînt componente *covariante*; ele nu au dimensiunile unei *forțe* decît dacă mărimile q^r sînt *lungimi*.

În cazul legăturilor ireversibile, lucrul mecanic (1.16) și deci (1.16′) este, fie pozitiv sau nul, fie negativ sau nul.

281. **Exemple.** a) *Forme ale spațiului fazelor.* Vom lua, ca exemple, mișcări care prezintă importanță fizică în teoria cuantelor, unde spațiul fazelor joacă un rol deosebit.

1. *Oscilatorul.* Problema mişcării unui oscilator liniar armonic a fost studiată în Mecanica vectorială (§ 57). Să punem $x = q$, $m\dot{x} = p$. Spaţiul fazelor este planul bidimensional (q, p). Mişcarea, fără amortizare, a oscilatorului se efectuează astfel încît energia totală rămîne constantă pentru o mişcare dată. Prin urmare:

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}k^2x^2 = E \text{ (constant)}$$

sau:

$$\frac{\frac{q^2}{2E}}{\frac{}{mk^2}} + \frac{p^2}{2Em} = 1 \tag{1.17}$$

aşadar, stările se vor succede, în spaţiul fazelor, aşa fel încît vor trebui să rămînă mereu pe curba precedentă, care este, precum se vede, o elipsă de dimensiuni date pentru o valoare dată a energiei totale E.

M a x P l a n c k postulează în *Teoria cuantelor* (1900), că radiaţiile se efectuează astfel încît atomii, (al căror model este „oscilatorul"), în mişcarea lor, suferă o succesiune de stări corespunzătoare variaţiei discrete a valorilor energiei E, şi anume de aşa natură încît aria elipselor (1.17) din spaţiul fazelor să fie un multiplu întreg şi pozitiv de constanta de acţiune a lui P l a n c k $h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ erg/s.

Aria elipsei de mai sus, cu semiaxele a, b, este:

$$A = \pi ab = \pi \frac{2E}{2\pi\nu} = \frac{E}{\nu}.$$

Punînd conform postulatului cuantic, $A = nh$, rezultă formula fundamentală din Teoria cuantelor:

$$E = nh\nu \tag{1.18}$$

care rezumă principiul lui P l a n c k : un atom (oscilator) îşi schimbă starea energetică numai printr-o variaţie *discretă* a energiei, după relaţia (1.18).

R o t a t o r u l . După legea lui K i r c h h o f f , radiaţiile unui corp negru trebuie să fie independente de modelul mecanic al atomului material. Prin urmare, legea (1.18) trebuie să fie satisfăcută şi în cazul cînd luăm ca model de atom rotatorul (corp rigid simetric şi omogen, rotindu-se fără a fi solicitat de forţe exterioare, în jurul unei axe spontane de rotaţie).

Fie J momentul de inerţie şi ψ unghiul azimutal. Luăm $\dot{\psi} = q$; $J\dot{\psi} = p_\psi$. Din ecuaţia mişcării $J\ddot{\psi} = 0$, rezultă $J\dot{\psi} = p_\psi$ care este deci constant.

Aria descrisă de punctul figurativ, în spaţiul fazelor, pentru o mişcare completă, este:

$$A = \int_0^{2\pi} p_\psi \, dq = 2\pi p.$$

Condiţia cuantică cere:

$$A = 2\pi p = nh.$$

Rezultă:

$$p = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

ceea ce exprimă *cuantizarea impulsului*, teoremă generalizată de A. S o m m e r f e l d pentru mai multe grade de libertate.

Aria de energie constantă se compune din fîşii plane de lungime 2π şi înălţime p, pe care ni le imaginăm înfăşurate pe un cilindru circular de rază unu, avînd axa p drept ordonată[1]).

[1]) *Max Planck* „Theorie der Wärmestrahlung", Teubner, 1923.

b) *Exemplu de legături neolonome*: o sferă omogenă cu centrul C şi de rază R este obligată să se rostogolească fără alunecare şi fără frecare, pe un plan orizontal fix.

Fie $O(\xi, \eta, \zeta)$ un sistem de coordonate fix în spaţiu, ζ fiind perpendiculară pe plan şi $O\xi$, $O\eta$, în plan. Prin centrul sferei C ducem un sistem $C(x, y, z)$ legat solidar de sferă.

Fie ω_x, ω_y, ω_z rotaţia momentană a sferei faţă de aceste axe. Introducînd unghiurile lui E u l e r, după § 163, avem formulele cunoscute:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Însemnînd cu $\bar{v}_0$ viteza de translaţie a lui C faţă de sistemul O şi cu $\bar{r}'$ vectorul de poziţie al unui punct al sferei faţă de C ca pol, viteza unui punct al sferei faţă de sistemul fix este:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}'. \tag{1.20}$$

Mişcarea de rostogolire fără alunecare este caracterizată prin condiţia ca viteza punctului de contact al sferei cu planul (pentru care $\bar{r}'$ are componentele $0,0,\zeta$), să fie nulă mereu. Din (1.20) rezultă:

$$\dot{\xi} - R\omega_y = 0; \quad \dot{\eta} + R\omega_x = 0; \quad \dot{\zeta} = 0. \tag{1.21}$$

Ultima ecuaţie ne dă *condiţia olonomă* de legătură $\zeta = R$. Primele două relaţii (1.21) ţinînd seamă de (1.19) se scriu:

$$\begin{aligned} d\xi - R \sin\theta \cos\varphi \, d\psi + R \sin\varphi \, d\theta &= 0 \\ d\eta + R \sin\theta \sin\varphi \, d\psi + R \cos\varphi \, d\theta &= 0 \end{aligned} \tag{1.22}$$

care nu admit nici o combinaţie integrabilă. Ele exprimă, aşa dar, *condiţii neolonome* de legătură.

Poziţia sistemului este determinată prin cinci parametri ξ, η, θ, φ, ψ legaţi prin cele două relaţii (1.22). Sistemul are trei grade de libertate căci $d\xi$ şi $d\eta$ pot fi exprimaţi prin $d\theta$, $d\varphi$, $d\psi$, cu ajutorul relaţiilor (1.22).

Să arătăm că, în adevăr, relaţiile (1.22) sînt neolonome, deci că nu admit o combinaţie integrabilă, de exemplu, sub forma finită:

$$f(\xi, \eta, \theta, \varphi, \psi; t) = 0. \tag{1.23}$$

Să derivăm (1.23), total, în raport cu timpul; obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\dot{\eta} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\dot{\psi} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0; \tag{1.24}$$

relaţie, care trebuie să fie satisfăcută pentru orice sistem de valori ale cîtimilor $\xi, \eta, \theta, \varphi, \psi,; \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, t$.

Din (1.24) rezultă, mai întîi, pentru variaţiile oarecare $d\varphi$ şi dt:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{1.25}$$

prin comparaţie cu relaţiile (1.22).

Ţinînd seamă de (1.22) restul de termeni ne dau, pentru o variaţie arbitrară $d\theta$ şi $d\psi$, condiţiile:

$$\begin{aligned} R\frac{\partial f}{\partial \xi}\sin\theta\cos\varphi - R\frac{\partial f}{\partial \eta}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial \psi} &= 0 \\ R\frac{\partial f}{\partial \xi}\sin\varphi + R\frac{\partial f}{\partial \eta}\cos\varphi - \frac{\partial f}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivînd relaţiile (1.26) în raport cu φ şi ţinînd seamă de (1.25) se obţin relaţiile de condiţie simultane:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cos\varphi = 0; \qquad \frac{\partial f}{\partial \xi}\cos\varphi - \frac{\partial f}{\partial \eta}\sin\varphi = 0;$$

care nu sînt compatibile decît pentru:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \tag{1.27}$$

Dar atunci, din (1.26), rezultă şi: $\frac{\partial f}{\partial \psi} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$, care unite cu relaţiile (1.25) şi (1.27) fac iluzorie relaţia (1.23).

Capitolul II

ECUAŢIILE LUI LAGRANGE

282. **Stabilirea ecuaţiilor lui Lagrange de speţa a doua**[1]). Fie un sistem olonom posedînd n grade de libertate. În momentul t configuraţia sistemului dinamic va fi determinată de un număr n, minim, de coordonate generalizate $q^1, q^2, \ldots, q^n$, independente, în spaţiul figurativ R_n. Admitem că nu există legături.

Fie m_i masa unei particule din sistemul material, care se găseşte în momentul t în punctul de coordonate carteziene $\bar{r}_i(x_i, y_i, z_i)$, supusă acţiunii forţei rezultante, externe şi de coeziune, $\bar{F}_i(X_i, Y_i, Z_i)$. Particula m_i se va mişca după legea newtoniană a punctului liber:

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_i \tag{2.1}$$

căci, înglobînd forţele de coeziune care ţin sistemul de puncte ca un „tot", în $\bar{F}_i$, putem considera că fiecare particulă în parte se mişcă liber.

Transformarea ecuaţiilor newtoniene (2.1) în ecuaţiile lui Lagrange se face ţinînd seamă de relaţiile care exprimă coordonatele carteziene în funcţie de numărul minim n de coordonate generalizate, anume relaţiile (§ 273):

$$x_i = x_i(q^1, q^2, \ldots, q^n; t); \; y_i = y_i(q^1, q^2, \ldots, q^n; t); \tag{2.2}$$
$$z_i = z_i(q^1, q^2, \ldots, q^n; t); \qquad (i = 1, 2, \ldots N)$$

precum şi de următoarea identitate, uşor de verificat:

$$\ddot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^s} \equiv \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^s}\left(\frac{1}{2}\dot{\bar{r}}_i^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q^s}\left(\frac{1}{2}\dot{\bar{r}}_i^2\right) \tag{2.3}$$

observînd că din (2.2) avem

$$\dot{\bar{r}} = \sum_s \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^s}\dot{q}^s + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t},$$

---

[1]) Ecuaţiile de *speţa întîi* rezultă din (25.10) § 252 egalînd paranteza cu zero.

și deci

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}^s} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^s}.$$

Înmulțim (2.1) cu $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^s}$ și sumăm pentru toți i; obținem:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^s} = \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^s}. \tag{2.4}$$

Fie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 \right)$$

energia cinetică a sistemului. Expresia (2.4) se va scrie, dacă ținem seamă de relația (2.3) în care ne închipuim toți $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i, \dot{z}_i$ înlocuiți cu valorile scoase din (2.2), sub forma:

$$a_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^r} \tag{2.5}$$

unde $T(q, \dot{q}, t)$[1]) este exprimată ca funcție de coordonatele generalizate cu ajutorul ecuațiilor (2.2). Or, după considerațiile de la § 274, urmează că $T(q, \dot{q}, t)$ va fi o funcție pătratică de vitezele $\dot{q}^r$ avînd termenul pătratic omogen:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum g_{rk} \dot{q}^r \dot{q}^k \tag{2.6}$$

unde $g_{rk} = g_{kr}$ sînt funcții continue și derivabile de q^r și t, $(r = 1, 2, \ldots, n)$ avînd determinantul diferit de zero:

$$g = |g_{rk}| \neq 0$$

căci în caz contrar T nu ar mai fi o formă pătratică. În adevăr, dacă $g = 0$, putem găsi n valori $\dot{q}^r$, care să satisfacă sistemul algebric omogen:

$$g_{rk} \dot{q}^k = 0. \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

Dar atunci, după teorema lui Euler, termenul pătratic omogen din T va fi nul, căci:

$$0 = g_{rk} \dot{q}^k = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}^r}$$

și, prin urmare:

$$0 = \dot{q}^r \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}^r} = 2 \times \text{termenul pătratic omogen din } T$$

ceea ce contrazice caracterul esențial al energiei cinetice T (formă pătratică pozitiv definită).

În cazul legăturilor *scleronome*, T nu depinde explicit de timp și este o funcție pătratică omogenă de viteze, pozitiv definită.

---

[1]) Cînd orice ambiguitate este exclusă, vom scrie adeseori prescurtat $(q, \dot{q})$ fără indici pentru a însemna $(q^r, \dot{q}^r\ ;\ r = 1, 2, \ldots\ n)$.

Interpretarea membrului al doilea al relației (2.4) se face observînd că pentru o deplasare virtuală δq^s lucrul mecanic elementar este:

$$\sum_i \overline{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^s} \delta q^s = Q_s (q^1, q^2, \ldots, q^n; t) \delta q^s \qquad (2\,7)$$

după considerațiile de la § 280. În consecință, membrul al doilea al relației (2.4) este egal cu mărimea Q_s, componentă *covariantă* a *forței generalizate*.

Ținînd seamă de (2.5) și (1.7), ecuația (2.4) se scrie:

$$a_r \delta q^r = Q_r \delta q^r. \qquad (2.8)$$

Această relație permite să interpretăm pe a_r drept componentă *covariantă a accelerației*.

a) Dacă δq^r este complet arbitrară, deducem în definitiv:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^r} = Q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \qquad (2.9)$$

ecuații care poartă numele de *ecuațiile lui* Lagrange de speța doua. Cum $T(q, \dot{q}, t)$ este o funcție de $\dot{q}$ (pătratică), de q și t, iar $Q(q,t)$ o funcție de q și t, ecuațiile diferențiale (2.8) ne vor da valorile

$$q^r = q^r(t) \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

care rezolvă problema mecanică propusă.

b) Dacă există $m < n$ legături neolonome:

$$\alpha_{sr} \delta q^r = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots m) \qquad (2.10)$$

atunci, din (2.8), nu mai putem scoate formula (2.9), ci trebuie să ținem seamă de existența legăturilor (2.10). Dar, aplicînd metoda cunoscută a multiplicatorilor lui Lagrange, putem scrie:

$$(a_r - Q_r - \lambda_s \alpha_{sr}) \delta q^r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

unde δq^r sînt arbitrari. Rezultă ecuațiile lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^r} - Q_r - \lambda_s \alpha_{sr} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots n) \qquad (2.11)$$

cu $n = 3N - m$. Din ecuațiile (2.11) deducem cele $q^1, q^2, \ldots, q^n$ variabile independente prin integrare. Acestea, înlocuite în sistemul (2.10) de m ecuații integrabile, ne vor da restul de m coordonate generalizate, astfel încît vom avea în total $n + m = 3N$ coordonate. Observăm că în ecuația (2.11) apar m parametri λ_s, de care dispunem în mod arbitrar. Aceștia pot fi determinați prin condiția de a-i obliga să satisfacă sistemul de m ecuații:

$$a_r - Q_r - \lambda_s \alpha_{sr} = 0 \quad (r = n + 1, n + 2, \ldots 3N - n).$$

Acest rezultat poate fi găsit aplicînd principiul lui d'Alembert (§ 252) de unde deducem ecuațiile Lagrange de prima speță.

283. **Forțe conservative. Funcția lui Lagrange. Potențial cinetic. Impulsuri generalizate.** În cazul unui sistem de forțe *conservative*, expresiile componentelor forței $\overline{F}$ derivă dintr-o funcție de forță $U(x,y,z;t)$. Făcînd în această

mărime substituțiile (2.2) rezultă o funcție $U = U(q^1, q^2, \ldots q^n; t)$ de coordonatele generalizate. Acest fapt urmează direct din definiția sistemului conservativ de forțe: lucrul mecanic produs de o deplasare posibilă care duce sistemul material dintr-o configurație inițială (fixă) q^0 într-o configurație (variabilă) finală q^r, depinde numai de configurațiile extreme, fiind independent de configurațiile intermediare. Așadar:

$$Q_r \, \delta q^r = - \frac{\partial U(q,t)}{\partial q^r} \delta q^r$$

pentru o deplasare virtuală δq^r. Această relație ne permite să exprimăm, generalizînd, componentele forțelor generalizate cu ajutorul funcției potențiale:

$$Q_r = - \frac{\partial U(q,t)}{\partial q^r} .$$

Să punem:

$$\mathfrak{L}(q^1, q^2, \ldots, q^n; \dot{q}^1, \dot{q}^2, \ldots, \dot{q}^n; t) = T(q^r, \dot{q}^r; t) - U(q^r; t).$$

Ținînd seamă de aceste notații, ecuațiile (2.9) iau forma generalizată:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \qquad (2.9')$$

Funcția $\mathfrak{L}$ se numește *funcția lui* Lagrange sau *potențial cinetic* și este o funcție de q, $\dot{q}$ și, în general, de t pentru sisteme cu legături reonome.

Impulsuri generalizate. Din expresia lui T (energia cinetică) obținem:

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i$$

mărime, pe care am numit-o în spațiul euclidian, față de coordonate carteziene, *impuls*. Ținînd seamă că U nu depinde de $\dot{q}$ putem defini, generalizînd această noțiune, drept *impuls generalizat* în R_n, mărimea:

$$p_r = \frac{\partial T(q, \dot{q}; t)}{\partial \dot{q}^r} \quad \text{sau} \quad p_r = \frac{\partial \mathfrak{L}(q, \dot{q}; t)}{\partial \dot{q}^r} . \qquad (2.12)$$

Se verifică ușor că mărimile p_r sînt componentele *covariante* ale unui vector în R_n. În adevăr, lucrul mecanic elementar, pentru o deplasare virtuală, datorit impulsului, este:

$$\delta L = \sum_{x,y,z} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r} \delta q^r = p_r \delta q^r .$$

Membrul întîi fiind un scalar, iar δq^r componentele contravariante ale unui vector, rezultă afirmația de mai sus. Dacă T are forma (2.6), urmează:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r} = g_{rs} \dot{q}^s ,$$

așadar, componentele covariante ale vitezei, în R_n.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Noțiunea de *impuls* în R_n are un înțeles mai amplu decît noțiunea corespunzătoare spațiului euclidian. În adevăr, luînd de exemplu energia cinetică:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

vom avea (întrucît energia potențială nu depinde de coordonatele punctate):

$$p_\theta = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} = m (\bar{r} \times \dot{\bar{r}})_z .$$

Așadar, p_θ apare ca o componentă de „moment cinetic".

284. **Ecuația centrală a lui Lagrange.** În conformitate cu considerațiile precedente, să definim, formal, energia cinetică T și impulsurile generalizate p_k, prin relațiile:

$$T(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\bar{r}}_i^2$$

$$p_k \delta q^k = m_i \dot{\bar{r}}_i \delta \bar{r}_i \tag{2.13}$$

pentru deplasări virtuale arbitrare. Avem evident:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^s} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i} \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}^s} = m_i \dot{\bar{r}}_i \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}^s} = m_i \dot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^s} .$$

Așadar:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^s} \delta q^s = m_i \dot{\bar{r}}_i \delta \bar{r}_i .$$

Rezultă:

$$p_q = \frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}^k} .$$

Pe de altă parte avem evident:

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{r}} \delta \bar{r} \right) = \ddot{\bar{r}} \delta \bar{r} + \dot{\bar{r}} \frac{d}{dt} (\delta \bar{r}) = \ddot{\bar{r}} \delta \bar{r} + \delta \left(\frac{1}{2} \dot{\bar{r}}^2 \right) + \dot{\bar{r}} \left[\frac{d}{dt} (\delta \bar{r}) - \delta \left(\frac{d \bar{r}}{dt} \right) \right] .$$

dar, după (2.1) și (2.7) rezultă:

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i \delta \bar{r}_i = \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = Q_s (q) \delta q^s ;$$

așadar, înmulțind a doua relație de mai sus cu m_i, sumînd și avînd în vedere relațiile de definiție (2.13), obținem:

$$\frac{d}{dt} (p_k \delta q^k) = Q_s \delta q^s + \delta T + m_i \dot{\bar{r}}_i \left[\frac{d}{dt} (\delta \bar{r}_i) - \delta \frac{d \bar{r}_i}{dt} \right]$$

sau încă:

$$\left[\frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q^k} - Q_k \right] \delta q^k = p_k \left[\delta \dot{q}^k - \frac{d}{dt} (\delta q^k) \right] + m_i \dot{\bar{r}}_i \left[\frac{d}{dt} (\delta \bar{r}_i) - \delta \frac{d \bar{r}_i}{dt} \right] \tag{2.9''}$$

care constituie *ecuația centrală* a lui Lagrange. În cazul sistemelor

olonome, cînd relațiile de permutabilitate (1.15), (§ 298), sînt satisfăcute, ecuația centrală se scrie:

$$\left\{\frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q^k} - Q_k\right\} \delta q^k = 0 \qquad (2.9''')$$

ecuație pe care o vom regăsi (§ 325) prin aplicarea principiului lui d'Alembert, și care este identică cu ecuația (2.9).

285. **Teorema energiei.** Să admitem existența unui sistem conservativ de forțe, definit prin $U(q,t)$, sistemul dinamic fiind supus la legături olonome.

a) *Legături reonome: teorema conservării energiei nu este satisfăcută.* Observăm că, în cazul legăturilor reonome, expresia (2.13) a lui T este o funcție de gradul al doilea în $\dot{q}$, *oarecare*. O vom putea descompune în următorii termeni:

$$T = T_0 + T_1 + T_2 = g_{00} + g_{0k}\,\dot{q}^k + \frac{1}{2} g_{sk}\,\dot{q}^s\,\dot{q}^k$$

unde T_0, T_1, T_2 sînt respectiv, funcții omogene de gradul zero, unu și doi în $\dot{q}$.

Pe de altă parte, derivînd funcția lui Lagrange $\mathfrak{L}(q, \dot{q}; t)$ în acest caz:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \ddot{q}^r \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r} + \dot{q}^r \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^r} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}$$

sau, după ecuațiile lui Lagrange (2.9′)

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \ddot{q}^r \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r} + \dot{q}^r \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r}\right) + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\dot{q}^r \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r}\right) + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}$$

rezultă:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}^r \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r} - \mathfrak{L}\right) = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}. \qquad (2.14)$$

Ținînd seamă de teorema lui Euler asupra funcțiilor omogene, putem scrie relația:

$$\dot{q}^r \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r} = \dot{q}^r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r} = \dot{q}^r \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}^r} + \dot{q}^r \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}^r} = T_1 + 2T_2. \qquad (2.15)$$

Fie:

$$E = T(q, \dot{q}; t) + U(q; t)$$

energia totală a sistemului. După (2.14) și (2.15), vom avea:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0). \qquad (2.16)$$

Această relație exprimă teorema anunțată: în cazul legăturilor reonome $\mathfrak{L}(q, \dot{q}; t)$ este o funcție explicită de t; T_0 și T_1 sînt și ele funcții explicite de t. Rezultă că energia totală variază cu timpul.

Scanned with OKEN Scanner

b) *Legături scleronome.* Cînd legăturile nu variază cu timpul, funcția lui L a g r a n g e: $\mathfrak{L}(q, \dot{q})$ nu mai depinde explicit de t, iar expresia energiei cinetice T se reduce la forma pătratică T_2; deci $T_0 = T_1 = 0$. În aceste condiții, relația (2.16) devine:

$$\frac{dE}{dt} = 0; \quad T + U = E \text{ (constant)} \tag{2.17}$$

ecuație care reprezintă *teorema conservării energiei.*

Din (2.14) și (2.15) deducem în acest caz:

$$\dot{q}^r \frac{\partial \mathfrak{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^r} - \mathfrak{L}(q, \dot{q}) = E \text{ (constant)}$$

286. **Forma normală a ecuației de mișcare, în R_n.** Analogia dintre ecuațiile lui L a g r a n g e (2.8) și ecuațiile newtoniene (2.1) ne-a condus să atribuim expresiei din membrul întîi al ecuațiilor (2.8) caracterul (impropriu) de „accelerație", înglobînd masa în coeficienții (g_{sk}). Atunci, fie a^k componentele contravariante ale vectorului accelerație în R_n. Vom avea (Anexa II, § 59):

$$a^k = g^{ks} a_s \tag{2.18}$$

unde a_s este dat de expresia (2.5).

Ecuația lui L a g r a n g e (2.8) se scrie:

$$a^k = Q^k$$

dacă punem:

$$Q^k = g^{ks} Q_s$$

mărimi, care exprimă componentele contravariante ale vectorului forță generalizată în R_n.

Dar a^k reprezintă în R_n derivata covariantă a vectorului viteză $v^k = \dot{q}^k$.

După Anexa III § 72, avem:

$$a^k = \frac{Dv^k}{Dt} = \frac{dv^k}{dt} + \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ k & \end{matrix} \right\} v^\alpha \frac{dr^\beta}{dt}$$

unde paranteza din membrul al doilea exprimă *simbolul lui C h r i s t o f f e l* de speța doua (Anexa I, § 30).

În notațiile actuale, ecuațiile lui L a g r a n g e se scriu sub forma normală:

$$\ddot{q}^k + \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ k & \end{matrix} \right\} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = Q^k. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.19}$$

În cazul cînd T are forma (2.13), pentru legături variabile cu timpul, ecuațiile (2.19) se vor scrie explicit:

$$\ddot{q}^k + \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ k & \end{matrix} \right\} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + 2 \left\{ \begin{matrix} 0 & \beta \\ k & \end{matrix} \right\} \dot{q}^\beta + \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ k & \end{matrix} \right\} = Q^k, \tag{2.19'}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

unde însă Q^k nu mai au caracter de componente contravariante, deoarece spațiul R_{n+1} nu mai este riemannian.

Scanned with OKEN Scanner

În componente covariante, ecuația (2.19) capătă forma:

$$g_{rp}\,\ddot{q}_p + \left[\begin{matrix}\alpha \\ r\end{matrix}\,,\,\begin{matrix}\beta \\ \end{matrix}\right]\dot{q}_h\,\dot{q}_\beta = Q_r\,, \qquad (r = 1, 2,\ldots,n) \quad (2.19'')$$

unde parantezele din membrul întîi reprezintă *simbolii lui Christoffel* de speța întîia (Anexa III, § 71).

Dacă în ecuațiile (2.19) introducem drept parametru variabil arcul de curbă s și luăm $Q^h = 0$, obținem ecuațiile geodezicelor din R_n (Anexa III, § 74). Aceste curbe pot fi definite, așadar, drept „traiectoriile punctelor libere, nesolicitate de nici o forță, în spațiul R_n". *Principiul inerției*, enunțat pentru spațiul euclidian, definește drept traiectorie a punctului liber, în mișcare spontană, linia dreaptă (mișcarea rămînînd uniformă). Generalizînd această noțiune și pentru spațiile riemanniene R_n, liniile geodezice ale acestor spații sînt „curbele de cea mai scurtă distanță".

Observație. Se poate arăta direct că expresia (2.18) a lui a^k este rezolvabilă în raport cu $\ddot{q}^k$. În adevăr, $\partial T/\partial\dot{q}$ este o formă liniară în $\dot{q}$, iar $\partial T/\partial q$ este o formă pătratică în $\dot{q}$. Relația (2.18) exprimă operația d/dt asupra unei funcții liniare în variabilele $\dot{q}$. Dar:

$$\frac{d}{dt} \to \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}\,\frac{\partial}{\partial q} + \ddot{q}\,\frac{\partial}{\partial\dot{q}}$$

iar ultimul termen este:

$$\ddot{q}^k\,\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}^k\,\partial\dot{q}^r} \equiv g_{kr}\,\ddot{q}^r$$

unde determinantul $g \neq 0$ după § 274.

287. **Considerații generale asupra integrării ecuațiilor lui Lagrange.** Fie un sistem dinamic cu n grade de libertate. Ecuațiile lui Lagrange constituie un sistem de n ecuații diferențiale ordinare de ordinul al doilea pentru mărimile $q^1, q^2,\ldots,q^n$, considerate ca funcții de variabila independentă t. Ele sînt echivalente cu un sistem liniar de ordinul $2n$.

După *teorema de existență* a lui Cauchy există o *integrală generală*:

$$q^r = q^r\,(t; c_1, c_2,\ldots,c_{2n}), \qquad (r = 1, 2,\ldots n) \quad (2.20)$$

unde c_k sînt $2n$ constante arbitrare. Această soluție generală se particularizează alegînd constantele astfel încît să satisfacă relațiile:

$$\begin{aligned} c_s &= q_0^s = q^s\,(t;\, c_1\,,\, c_2\,,\ldots,\, c_{2n}) \\ c_k &= \dot{q}_0^k = \dot{q}^k(t_0;\, c_1,\, c_2\,,\ldots,\, c_{2n}) \end{aligned} \qquad (s \neq k = 1, 2\,,\ldots n) \quad (2.21)$$

pentru momentul inițial $t = t_0\,,(\dot{q} = \dot{q}^0;\, q = q^0)$.

Din (2.20) și (2.21) urmează pentru determinantul funcțional

$$\Delta\,(t) = \frac{D\,(q)}{D\,(c)} \neq 0\,; \quad \Delta\,(t_0) = 1.$$

Sistemul (2.20), împreună cu ecuațiile deduse prin derivare în raport cu timpul, rezolvate în raport cu c_r, ne dă:

$$c_r = f_r\,(q^1,\, q^2,\ldots,\, q^n;\, \dot{q}^1,\, \dot{q}^2,\ldots,\, \dot{q}^n;\, t). \qquad (r = 1\,,\, 2,\ldots n) \quad (2.22)$$

Scanned with OKEN Scanner

O astfel de relație (*una* din ele) se numește o *integrală primă*. Reamintim că se numește o „integrală primă" a unui sistem de n ecuații diferențiale ordinare de ordinul al doilea, o relație de forma:

$$\varphi(q^1, q^2,\ldots,q^n; \dot{q}^1, \dot{q}^2,\ldots,\dot{q}^n; t) = c \tag{2.23}$$

satisfăcută identic, pentru orice valoare a lui t, de soluțiile (2.20).

Dacă $\varphi_1 = c_1$ și $\varphi_2 = c_2$ sînt două integrale prime, atunci și $f(\varphi_1,\varphi_2)=c$ va fi o integrală primă. În general, cunoscîndu-se $2n$ integrale prime *distincte* (adică, nesatisfăcînd identic la nici o relație algebrică de forma $F(\varphi_1, \varphi_2) = 0$), putem scrie o integrală generală, problema integrării sistemului diferențial fiind, prin aceasta, terminată.

Orice altă integrală a sistemului se exprimă ca funcție algebrică de cele $2n$ integrale prime distincte.

Pentru rezolvarea problemei dinamice este, evident, util să putem construi integrale prime, *direct*, fără a cunoaște mai întîi integrala generală. Iată cum se recunoaște dacă expresia (2.23) este o integrală primă fără a face uz de integrala generală (2.20). Din relația (2.23) rezultă $d\varphi/dt = 0$; așadar:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q^r}\dot{q}^r + \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}^r}\ddot{q}^r + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{2.24}$$

relație, care trebuie să fie satisfăcută identic dacă înlocuim pe toți $\ddot{q}^r$ din ecuațiile mișcării și pe toți q^r și $\dot{q}^r$ din ecuațiile (2.22). Dar, pe acestea din urmă nu le cunoaștem anticipat. Observăm însă că în (2.22) cîtimile c_r sînt constante *arbitrare* (prin condiții inițiale). Condiția (2.24) trebuind să fie satisfăcută *ori care ar fi* c_r (după substituția tuturor $\ddot{q}^r$ din ecuațiile mișcării) rezultă că ea va trebui să fie identic nulă. În acest caz (2.23) este o integrală primă.

Geometric, soluția (2.20) reprezintă ecuațiile parametrice (parametru t) ale curbei traiectorii în R_n. În total avem ∞^n traiectorii, deoarece prin fiecare punct $(q^1,\ldots,q^n)$ trec ∞^1 traiectorii, pentru fiecare direcție dată. O traiectorie anumită este determinată prin valorile vitezelor $\dot{q}^1,\ldots\dot{q}^n$.

Putem interpreta soluția (2.20) și ca o linie spațiu-timp în A_{n+1}, pe care o vom numi și *curbă orară*. Ansamblul tuturor curbelor orare formează un șir $2n$—parametric, astfel, încît în vecinătatea unui punct din A_{n+1} ele determină un cîmp. Fiecărei linii din A_{n+1} îi corespunde în general o traiectorie în R_n.

288. **Integrala energiei.** După considerațiile de la paragraful 285, din integrala energiei putem deduce o integrală primă pentru un sistem olonom-scleronom. În adevăr, avem atunci:

$$\dot{q}^r \frac{\partial\mathfrak{L}(q, \dot{q})}{\partial\dot{q}^r} - \mathfrak{L}(q, \dot{q}) = h(\text{constant}). \tag{2.25}$$

Teoremă. Integrala energiei permite să reducem rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale relativ la n grade de libertate, la rezolvarea unui sistem cu $n-1$ grade de libertate.

În particular, pentru sistemele dinamice cu legături complete $n=1$, cunoașterea integralei energiei:

$$\dot{q}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}} - \mathfrak{L} = h \tag{2.26}$$

reduce problema la o simplă cuadratură. În adevăr, expresia (2.26) fiind o relație între q și $\dot{q}$, dacă poate fi rezolvată, $\dot{q} = f(q)$, integrarea se termină prin cuadratura:

$$t = \int \frac{dq}{f(q)} + \text{constantă}.$$

Să considerăm cazul general a n grade de libertate și să presupunem existența integralei prime (2.25). Demonstrarea teoremei enunțate se face precum urmează. În locul parametrilor:

$$q^1, q^2, \ldots, q^n; \dot{q}^1, \dot{q}^2, \ldots, \dot{q}^n$$

de care depinde funcția lui L a g r a n g e $\mathfrak{L}(q, \dot{q})$, să introducem următorii parametri:

$$q^1, q^2, \ldots, q^n; \dot{q}^1, \dot{q}^1 q_2', \dot{q}^1 q_3', \ldots, \dot{q}^1 q_n' \tag{2.27}$$

unde am notat:

$$q_r' = \frac{dq^r}{dq^1} = \frac{\dot{q}^r}{\dot{q}^1}. \tag{2.28}$$

Vom avea atunci:

$$\mathfrak{L}(q^1, \ldots, q^n; \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n) = \Lambda(q^1, \ldots, q^n; \dot{q}^1, q_2', q_3', \ldots, q_n'). \tag{2.29}$$

Să derivăm ecuația (2.29). Avem, ținînd seamă de (2.28):

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q_r'}\frac{1}{\dot{q}^1} \qquad (r = 2, 3, \ldots n) \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^r} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q^r} \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \tag{2.30'}$$

și, avînd în vedere (2.30),

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^1} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^1} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r}\frac{\dot{q}^r}{\dot{q}^1}. \tag{2.30''}$$

Făcînd în ecuația energiei (2.25) substituția (2.27), această ecuație poate fi rezolvată în raport cu $\dot{q}^1$, care va fi obținută ca o funcție de celelalte cantități:

$$\dot{q}^1 = \dot{q}^1(q^1, \ldots, q^n; q_2', q_3', \ldots, q_n'). \tag{2.31}$$

Ținînd seamă de relația (2.30'') și (2.29), ecuația (2.25) se scrie:

$$\dot{q}^1\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^1} - \Lambda = h \tag{2.32}$$

Scanned with OKEN Scanner

ecuație, menită să ne dea valoarea (2·31). Fie:

$$\mathfrak{L}' = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^1} .$$

Diferențiind această relație și avînd în vedere că putem considera $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}'(q^1, q^2,\ldots,q^n; q_2', q_3',\ldots,q_n')$ deoarece în $\mathfrak{L}'$ înlocuim pe $\dot{q}^1$ din (2.32), obținem:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial q_r'} = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{q}^1 \partial q_r'} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{q}^{1^2}} \frac{\partial \dot{q}^1}{\partial q_r'} \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial q^r} = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{q}^1 \partial q^r} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{q}^{1^2}} \frac{\partial \dot{q}^1}{\partial q^r} \tag{2.33'}$$

Să diferențiem și ecuația energiei (2.32) și să ținem seama de teorema lui Euler pentru funcții omogene:

$$\dot{q}^1 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{q}^{1^2}} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^1}$$

Rezultă:

$$\dot{q}^1 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{q}^{1^2}} \frac{\partial \dot{q}^1}{\partial q_r'} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q_r'} - \dot{q}^1 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{q}^1 \partial q_r'} \tag{2.34}$$

$$\dot{q}^1 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{q}^{1^2}} \frac{\partial \dot{q}^1}{\partial q^r} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q^r} - \dot{q}^1 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{q}^1 \partial q^r} . \tag{2.34'}$$

Comparînd (2.33) cu (2.34) și (2.33') cu (2.34') obținem:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial q_r'} = \frac{1}{\dot{q}^1} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_r'} \qquad (r = 2, 3,\ldots n)$$

și:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial q^r} = \frac{1}{\dot{q}^1} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^r} . \qquad (r = 1, 2,\ldots n)$$

Comparînd aceste ecuații cu ecuațiile (2.30) și (2.30'), rezultă:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial q_r'} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r} \quad ; \quad \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial q^r} = \frac{1}{\dot{q}^1} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^r} .$$

Avînd în vedere aceste relații, ecuațiile lui Lagrange devin:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial q_r'}\right) - \dot{q}^1 \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial q^r} = 0, \qquad (r = 2, 3,\ldots n)$$

sau încă:

$$\frac{d}{dq^1}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial q'^r}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial q^r} = 0. \qquad (r = 2,3,\ldots n) \tag{2.35}$$

Ecuațiile (2.35) cu funcția lui Lagrange:

$$\mathfrak{L}'(q^1, q^2,\ldots,q^n; q_2', q_3' \ldots,q_n')$$

pot fi considerate drept ecuaţiile lui L a g r a n g e într-un spaţiu R_{n-1} $(q^2, q^3, \ldots, q^n)$ în care q^1 joacă rolul de variabilă independentă, similar rolului jucat în R_n de timpul t. În acest sens, avem de rezolvat acum sistemul de $n-1$ ecuaţii diferenţiale (2.35), iar gradul de libertate al sistemului dinamic iniţial a fost redus, prin aceasta, cu o unitate.

Din expresia lui $\mathfrak{L}'$ care cuprinde *explicit* noua variabilă independentă q^1 (rolul lui t), rezultă, în conformitate cu consideraţiile de la § 283, că noul sistem dinamic *nu* mai posedă, în general, o integrală primă a energiei.

289. **Sisteme dinamice posedînd coordonate ciclice.** Dacă în expresia funcţiei lui L a g r a n g e $\mathfrak{L}(q, \dot{q}, t)$ nu figurează explicit una sau mai multe din coordonatele $q^1, q^2, \ldots, q^n$, de exemplu $q^1, q^2, \ldots q^s$ $(s \leqslant n)$ atunci , pentru cele s ecuaţii L a g r a n g e corespunzătoare, cum:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^r} = 0 \qquad (r = 1, 2 \ldots s)$$

vom avea:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r}\right) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots s)$$

de unde:

$$p_r = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r} = \beta_r \text{ (constantă)} \quad (r = 1, 2, \ldots s) \tag{2.36}$$

Relaţiile (2.36) constituie s integrale prime. Cum p_r este impulsul corespunzător coordonatei q^r, integralele precedente poartă numele de „integralele impulsurilor."

Cele s coordonate care lipsesc din expresia lui $\mathfrak{L}$ şi permit scrierea celor s integrale prime ale impulsurilor, au primit diverse denumiri: *ciclice* (H. v. H e l m h o l t z); *ignorabile* (W. T h o m s o n); *kinostenice* (J.J. T h o m s o n); *ascunse* (nomenclatura franceză).

290. **Teorema lui Routh şi Helmholtz.** Dacă un sistem dinamic, avînd n grade de libertate, posedă s coordonate ciclice, rezolvarea problemei dinamice se reduce la rezolvarea unui sistem de $n-s$ ecuaţii lagrangeiene. Fie:

$$R = \mathfrak{L} - \sum_{r=1}^{s} \dot{q}^r \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r} \tag{2.37}$$

transformarea lui R o u t h. Ţinînd seamă de integralele prime (2.36) putem exprima pe R ca funcţie de:

$$q^{s+1}, q^{s+2}, \ldots, q^n; \dot{q}^{s+1}, \dot{q}^{s+2}, \ldots, \dot{q}^n; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s \tag{2.38}$$

căci cele s ecuaţii (2.36) ne permit exprimarea celor s mărimi $\dot{q}^1, \dot{q}^2, \ldots \dot{q}^s$ în funcţie de mărimile (2.38).

Fie δ o variaţie foarte mică aplicată cîtimilor $q^{s+1}, \ldots, q^n$; $\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n$. Din condiţiile de continuitate a tuturor mărimilor ce exprimă problema dinamică, va corespunde pentru cîtimile (2.38) o variaţie foarte mică δ. Avem aşadar:

$$\delta R = \sum_{r=s+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial q^r} \delta q^r + \sum_{r=s+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}^r} \delta \dot{q}^r + \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial R}{\partial \beta_r} \delta \beta_r . \tag{2.39}$$

Pe de altă parte, variind relația (2.37), avem succesiv:

$$\delta \mathfrak{L} = \sum_{r=s+1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^r} \delta q^r + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r} \delta \dot{q}^r;$$

$$\delta \left(\sum_{r=1}^{s} \dot{q}^r \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r} \right) = \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r} \delta \dot{q}^r + \sum_{r=1}^{s} \dot{q}^r \delta \beta_r .$$

Rezultă:

$$\delta R = \sum_{r=s+1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^r} \delta q^r + \sum_{r=s+1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r} \delta \dot{q}^r - \sum_{r=1}^{s} \dot{q}^r \delta \beta_r . \tag{2.40}$$

Cum variația δ este arbitrară, comparînd (2.39) și (2.40) deducem:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}^r} \; ; \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^r} = \frac{\partial R}{\partial q^r} \; ; \qquad (r = s+1, s+2, \ldots n) \tag{2.41}$$

$$\dot{q}^r = - \frac{\partial R}{\partial \beta^r} . \qquad (r = 1, 2, \ldots s)$$

Înlocuind în ecuațiile lui L a g r a n g e expresiile (2.41), obținem:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^r} \right) - \frac{\partial R}{\partial q^r} = 0; \; (r = s+1, s+2, \ldots n), \tag{2.42}$$

așadar, un sistem de $n - s$ ecuații lagrangiene, care permit găsirea a $n - s$ coordonate q^{s+1}, q^{s+2}, ... q^n în funcție de t. Celelalte s coordonate sînt date, după (2.41), de cuadratura:

$$q^r = - \int \frac{\partial R}{\partial \beta_r} dt. \qquad (r = 1, 2, \ldots s)$$

Problema analitică se reduce la rezolvarea sistemului (2.42) cu $n - s$ grade de libertate.

Observăm că relația de transformare (2.37) poate fi scrisă:

$$R = \mathfrak{L} - \sum_{r=1}^{s} c_r \dot{q}^r .$$

Să punem:

$$\mathcal{T} = T - \left(V + \sum_{1}^{s} c_r \dot{q}^r \right)$$

și să considerăm această expresie, care nu mai este o formă pătratică, drept energie cinetică. Termenul aditiv $\Sigma c_r \dot{q}^r$ a fost interpretat de H. H e r t z drept potențial al forțelor aplicate sistemului, forțe provenite dintr-o mișcare ciclică, necunoscută. H e r t z a încercat să definească, în general, energia potențială a unui sistem prin mișcarea ciclică a unor mase ascunse, care se adaugă maselor vizibile ale sistemului material. De aici numele de „ascunse" sau „ignorabile". Denumirea de „ciclice" provine din faptul că s-a dat numele de *sistem ciclic* unui sistem dinamic în mișcarea căruia coor-

Scanned with OKEN Scanner

donatele neciclice variază așa de încet cu timpul, încît pot fi considerate că joacă rolul unor parametri. De altfel, denumirea de „ciclice" are și un sens fizic. În adevăr, modelul de atom (clasic) numit „rotator" este un sistem material posedînd o simetrie circulară în jurul unei axe fixe în spațiu (axa z). În mișcarea de rotație în jurul axei este satisfăcută teorema ariilor:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} = c \text{ (constant)}$$

căci energia cinetică:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

nu conține pe θ. Cum r = constant, urmează:

$$\theta = \omega_0 t + \theta_0$$

ω_0 și θ_0 fiind constante de integrare. Coordonata θ, care lipsește în $\mathfrak{L}$, apare cu caracterul unei mărimi ciclice. De aici denumirea extinsă tuturor coordonatelor care nu figurează explicit în expresia potențialului cinetic. Funcția lui E. R o u t h introdusă prin relația (2.37) joacă rolul de potențial cinetic în problema nouă. Trebuie de observat însă că, după modul cum este construită prin relația (2.37), R nu poate fi desfăcută în doi termeni de forma termenilor care alcătuiesc funcția lagrangeiană, anume energia cinetică, pătratică în $\dot{q}$, adunată cu energia potențială care conține numai coordonatele q. Noul potențial cinetic R va conține și termeni lineari în $\dot{q}$, în general.

291. **Aplicație.** Fie un sistem olonom cu n grade de libertate supus acțiunii unor forțe exterioare oarecare. Fie $q^1, q^2, \ldots, q^n$, coordonatele sistemului.

a) *Teorema impulsului.* Să presupunem că sistemul admite o deplasare virtuală care se reduce la o translație de ansamblu într-o direcție fixă (luată ca axă x) fiind solicitat de un sistem de forțe oarecare. Să identificăm una din coordonatele generalizate, de exemplu pe q^r, cu coordonata x. Pentru translația considerată q^r va suferi o variație dată, celelalte coordonate rămînînd neafectate. Coordonatele libere vor fi determinate prin ecuațiile de mișcare. Cum q^r este determinată prin translația dată, această coordonată nu mai figurează în expresia energiei cinetice T a sistemului dinamic. Ecuația lui L a g r a n g e ce-i corespunde, va avea atunci forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r}\right) = Q_r . \tag{2.43}$$

Pentru mișcarea de translație considerată mai sus, mărimea:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r} = p_r$$

apare ca o componentă de impuls cartezian conform considerațiilor de la § 283.

De aici urmează că ecuația (2.43) poate fi interpretată ca exprimînd teorema impulsului: derivata, în raport cu timpul, a impulsului este egală cu rezultanta forțelor exterioare.

Scanned with OKEN Scanner

b) *Teorema momentului cinetic.* Să presupunem că sistemul admite o deplasare virtuală care se reduce la o *rotație* de ansamblu de unghiul $\delta\theta$ în jurul unei axe în spațiu (luată ca axă z). Fie q^r coordonata generalizată identificată cu 0. Această coordonată nu va mai figura în expresia lui T, așa încît ecuația lui Lagrange corespunzătoare va lua tot forma (2.43). Trebuie observat însă că, pentru mișcarea de rotație considerată acum $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r}$ are, după observația de la § 283, sensul unei componente de moment cinetic cartezian. Cum, pe de altă parte $Q_r \delta\theta$ este lucrul mecanic al forțelor exterioare pentru rotația $\delta\theta$, mărimea Q_r apare ca o componentă de moment al forțelor exterioare, relativ la axa fixă dată.

În acest fel, ecuația (2.43) exprimă teorema momentului cinetic: derivata momentului cinetic în raport cu timpul este egală cu momentul forțelor exterioare (față de același pol, sau axă, față de care s-a luat și momentul cinetic).

292. **Sisteme dinamice cu variabile separabile.** În Mecanica cerească și Fizica atomică multe probleme fundamentale conduc la sisteme dinamice pentru care energia cinetică poate fi pusă sub forma:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} v_k (q^k) \dot{q}^{k2}$$

iar energia potențială, sub forma:

$$U = \sum_{k=1}^{n} u_k (q^k)$$

unde u_k și v_k sînt funcții arbitrare dar regulate de cîtimile q^k, *separat*.

În acest caz, problema analitică se reduce la simple cuadraturi, pentru fiecare variabilă în parte. În adevăr, ecuațiile lui Lagrange se reduc la sistemul:

$$v_k (q^k) \ddot{q}^k + \frac{1}{2} v_k' (q^k) \dot{q}^{k2} = - u_k' (q^k), \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

unde accentul la v și u înseamnă derivata în raport cu argumentul.

Integrînd, obținem:

$$\frac{1}{2} v_k (q^k) \dot{q}^{k2} + u_k (q^k) = c_k, \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

însemnînd cu c_k, n constante arbitrare, de integrare. Problema se termină, exprimînd pe t prin relația:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{v_1 (q^1)}{c_1 - u_1 (q^1)} \right)^{\frac{1}{2}} dq^1 + \alpha_1 = \ldots =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left[\frac{v_n (q^n)}{c_n - u_n (q^n)} \right]^{\frac{1}{2}} dq^n + \alpha_n. \qquad (2.44)$$

293. **Sistemele de tipul Liouville.** Sistemele dinamice pentru care:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} u_k (q^k) \sum_{k=1}^{n} v_k (q^k) \dot{q}^{k2} \qquad (2.45)$$

$$U = \frac{\Sigma U_k (q^k)}{\Sigma u_k (q^k)}$$

se numesc sisteme de tip Liouville.
Integrarea sistemului diferențial considerat, sub forma precedentă, introdusă de J. Liouville, se face prin substituția:

$$\int \sqrt{v_k (q^k)}\, dq^k = w_k (q^k).$$

Făcînd această substituție în (2.45), căpătăm:

$$T = \frac{1}{2} u \sum_{k=1}^{n} \dot{w}_k^2 (q^k) ; \quad U = \frac{1}{u} \sum_{k=1}^{n} U_k (w_k)$$

unde am pus:

$$u = \sum_{k=1}^{n} u_k .$$

În aceste condiții, ecuația lui Lagrange relativă la coordonata w_k, devine:

$$\frac{d}{dt} (u \dot{w}_k) - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial w_k} \Sigma \dot{w}_k^2 = - \frac{\partial U}{\partial w_k}$$

Înmulțind cu $2\dot{w}_k u$, obținem:

$$\frac{d}{dt} (u^2 \dot{w}_k^2) - u\dot{w}_k \frac{\partial u}{\partial w_k} \Sigma \dot{w}_k^2 = - 2u\dot{w}_k \frac{\partial U}{\partial w_k} . \qquad (2.46)$$

Din integrala energiei deducem:

$$\frac{1}{2} u \Sigma \dot{w}_k^2 + U = E \text{ (constant)}. \qquad (2.47)$$

Ținînd seamă de (2.47), ecuația (2.46) devine:

$$\frac{d}{dt} (u^2 \dot{w}_k^2) = 2(E - U) \dot{w}_k \frac{\partial u}{\partial w_k} - 2u\dot{w}_k \frac{\partial U}{\partial w_k} = 2\dot{w}_k \frac{\partial}{\partial w_k} \Big[(E - U) u \Big] =$$

$$= 2 \frac{d}{dt} \Big[E u_k (q^k) - U_k (q^k) \Big] . \quad (k = 1, 2 \ldots n) \qquad (2.48)$$

Din ultima ecuație deducem:

$$\frac{dw_1}{[Eu_1 (q^1) - U_1 (q^1) + \alpha_1]^{1/2}} = \ldots = \frac{dw_n}{[Eu_n (q^n) - U_n (q^n) + \alpha n]^{1/2}} = \sqrt{2} \frac{dt}{u} \qquad (2.49)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde α sînt n constante care satisfac relaţia:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 0. \tag{2.50}$$

În adevăr, din ecuaţia energiei (2.47) şi ecuaţia (2.48) deducem imediat relaţia (2.50). Ecuaţiile (2.49) rezolvă problema prin simple cuadraturi, variabilele fiind separate.

294. **Problema celor două centre în plan.** Un punct material M este atras de două centre fixe C şi C' invers proporţional cu distanţele $MC = r$ şi $MC' = r'$. Energia potenţială este:

$$U = -\frac{C}{r} - \frac{C'}{r'} \tag{2.51}$$

unde C şi C' sînt constante de proporţionalitate date.

Luăm drept coordonate q^1 şi q^2, coordonatele eliptice introduse de Jacobi:

$$\lambda = \frac{1}{2}(r + r'); \qquad \mu = \frac{1}{2}(r - r') \tag{2.52}$$

astfel încît λ = constant reprezintă o elipsă cu semiaxa mare egală cu λ; μ = = constant reprezintă o iperbolă cu semiaxa mare egală cu μ. Focarele celor două şiruri de curbe se găsesc în C şi C', curbele tăindu-se ortogonal.

Cum $r + r'$ are valoarea minimă $2c = CC'$, rezultă $\lambda \geqslant c$; de asemeni valoarea maximă a lui $r - r'$ fiind $2c$, rezultă $|\mu| \leqslant c$. Aşadar, avem relaţiile de condiţie:

$$\lambda \geqslant c \geqslant |\mu|. \tag{2.53}$$

Ecuaţiile carteziene ale elipselor şi iperbolelor (2.52) sînt:

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1; \quad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - c^2} = 1.$$

Rezolvate în raport cu x şi y, ne dau:

$$c^2x^2 = \lambda^2\mu^2; \quad c^2y^2 = (\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2).$$

Prin diferenţiere logaritmică obţinem:

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\mu}{\mu}; \qquad \frac{dy}{y} = \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2 - c^2} - \frac{\mu d\mu}{c^2 - \mu^2}$$

de unde:

$$dx^2 + dy^2 = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2} d\lambda^2 + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2} d\mu^2.$$

Energia cinetică are deci forma:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\left(\frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{\dot{\mu}^2}{c^2 - \mu^2}\right) \tag{2.54}$$

pe cînd energia potenţială se scrie, după (2.51)

$$U = -\frac{1}{\lambda^2 - \mu^2}[(C + C')\lambda - (C - C')\mu] \tag{2.55}$$

Scanned with OKEN Scanner

Expresiile (2.54) și (2.55) ale lui T și U au exact forma cerută de tipul L i o u v i l l e. Ecuațiile (2.49) devin:

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} - \int \frac{d\mu}{\sqrt{\psi(\mu)}} = \beta_2$$
$$\int \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} - \int \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{\psi(\mu)}} = t + \beta_1 \tag{2.56}$$

unde am făcut, pentru prescurtare, notațiile:

$$\varphi(\lambda) = 2(\lambda^2 - c^2)[h\lambda^2 + (C + C')\lambda + \alpha];$$
$$\psi(\mu) = 2(\mu^2 - c^2)[h\mu^2 + (C - C')\mu + \alpha].$$

Integralelor prime (2.56) li se adaugă integrala primă a energiei:

$$T + U = h$$

unde introducem valorile (2.54) și (2.55).

Fie λ_1, λ_2; resp. μ_1, μ_2, cîte două rădăcini simple ale ecuației $\varphi(\lambda) = 0$; resp. $\psi(\mu) = 0$. Considerăm integralele definite:

$$\omega_{11} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}; \qquad \omega_{21} = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{\psi(\mu)}};$$
$$\omega_{12} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}; \qquad \omega_{22} = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\sqrt{\psi(\mu)}}. \tag{2.57}$$

Introducem două cîtimi ajutătoare, u_1 și u_2, prin condițiile:

$$\pi(t + \beta_1) = \omega_{11}u_1 + \omega_{21}u_2; \qquad \pi\beta_2 = \omega_{12}u_1 + \omega_{22}u_2. \tag{2.58}$$

Intregralele (2.56) definesc pe λ și μ ca două funcții dublu periodice (eliptice) de $t + \beta_1$ și β_2, sau după (2.58), de u_1 și u_2.

Dacă între numerele ω_{12} și ω_{22} există o relație de forma:

$$m_1\omega_{12} + m_2\omega_{22} = 0$$

unde m_1 și m_2 sînt numere întregi, ω_{12} și ω_{22} sînt comensurabile, iar mișcarea este *strict periodică*, în timp, cu perioada $2T = 2m_1\omega_{11} + 2m_2\omega_{21}$. Dacă rădăcinile (λ_1, λ_2) și (μ_1, μ_2) nu sînt simple, ci *multiple*, avem mișcări de *librație*.

În general, astfel de mișcări se numesc „condiționat periodice". Ele au jucat un mare rol în teoria clasică a cuantelor.

295. **Ecuațiile lui Lagrange pentru mișcarea impulsivă.** În Mecanica vectorială am scris ecuațiile de mișcare ale unui sistem dinamic supus unor forțe exterioare, impulsive, (§ 139):

$$m_i(\dot{\bar{r}}_i - \dot{\bar{r}}_{i0}) = \bar{P}_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots N) \tag{2.59}$$

unde $\bar{r}_i$, $\dot{\bar{r}}_i$ reprezintă poziția și viteza după aplicarea impulsiei.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $q^1, q^2, \ldots, q^n$ coordonatele generalizate, independente. Vom avea, din (2.59):

$$\sum_i m_i \left(\dot{\bar{r}}_i - \dot{\bar{r}}_{i0}\right) \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^k} = \sum_i \bar{P}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^k} . \qquad (k = 1, 2, \ldots n). \quad (2.60)$$

Membrul al doilea este interpretat ca lucrul mecanic al forțelor exterioare, aplicate. Am însemnat această expresie prin Q_r. Membrul întîi poate fi transformat, observînd relațiile:

$$\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}^k} ; \quad \dot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}\left(\frac{1}{2} \dot{r}_i^2\right) ; \quad \dot{\bar{r}}_{i0} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}\left(\frac{1}{2} \dot{r}_{i0}^2\right)$$

unde (q) și (q_0) marchează valorile anterioare resp. posterioare impulsiei. Introducînd energia cinetică a sistemului:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)$$

rezultă că putem scrie, pentru (2.60):

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r}\right)_0 = Q_r ; \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

ceea ce exprimă ecuațiile lui L a g r a n g e pentru mișcarea impulsivă. Indicele (1) marchează starea sistemului dinamic *după*, iar indicele (0), *înaintea* impulsiei. Q_r se numește *impulsie generalizată*.

296. **Aplicații.** 1. *Mișcarea unui sistem de puncte materiale, obligat să se rotească uniform în jurul unei axe fixe.* Fie un sistem material cu n grade de libertate, abstracție făcînd de rotația în jurul axei fixe, pe care o luăm drept axă z. Un plan fix care trece prin această axă ne permite să luăm ca origine a azimuturilor, ψ, ale planului care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω, planul care trece prin axă și prin punctul M al sistemului.

Putem folosi coordonatele cilindrice. Energia cinetică este:

$$T = \frac{1}{2} \sum m \left[\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\psi} + \omega)^2\right] \qquad (2.61)$$

pe cînd energia sistemului fără rotație este:

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum m \left(\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2\right) . \qquad (2.62)$$

Lucrul mecanic al forțelor exterioare este $Q_1 \delta q^1 + \ldots + Q_n \delta q^n$, unde luăm Q_k să depindă numai de coordonate. Am luat r egal cu distanța punctului M la axul fix Oz, z fiind înălțimea lui M. Momentul de inerție față de axă, $\frac{1}{2} \sum mr^2 = J$ este, pentru sistemul cunoscut, o funcție cunoscută de $(q^1, q^2, \ldots, q^n)$. De asemenea, mărimea $\sum mr^2 \dot{\psi}$ este funcție cunoscută, liniară în $q^1 q^2, \ldots q^n$.

Să admitem că:

$$\sum mr^2 \dot{\psi} = \frac{d\Phi(q^1, \ldots, q^n)}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial q^k} \dot{q}^k . \qquad (2.63)$$

Scanned with OKEN Scanner

În aceste condiții vom avea:

$$T = T_1(q^h, \dot{q}^h) + \omega \frac{d\Phi(q^h)}{dt} + \omega^2 J(q^h). \tag{2.64}$$

Ecuațiile lui Lagrange devin:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}^h}\right) + \omega \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q^h}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial q^h} - \omega \frac{\partial}{\partial q^h}\left(\frac{d\Phi}{dt}\right) - \omega^2 \frac{\partial J}{\partial l^h} = Q_h \quad (h = 1, 2, \ldots n)$$

sau încă:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}^h}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial q^h} = -\frac{\partial}{\partial q^h}(-\omega^2 J) + Q_h; \tag{2.65}$$

ceea ce exprimă teorema: *„mișcarea se efectuează ca și cum nu ar exista constrîngerea sistemului de a se roti cu viteza constantă ω în jurul axei fixe, ci ar fi liber, însă nu numai sub acțiunea forțelor exterioare date Q_r, dar s-ar suprapune o energie potențială dată de expresia:*

$$-\frac{1}{2}\sum mr^2\omega^2$$

care produce forța cunoscută sub numele de „forța centrifugă".

Exemple. 1. *Mișcarea unui punct pe o curbă care se rotește uniform în jurul unei axe fixe.*

Un punct de masă egală cu unitatea se mișcă sub acțiunea forțelor exterioare al căror potențial fie V, funcție simetrică în raport cu axa fixă, considerată ca funcție de coordonatele cilindrice z (paralelă cu axa) și r (distanța la axă). Energia potențială poate fi exprimată, pentru un punct de pe curbă, în funcție de arcul de curbă s, ecuația curbei fiind:

$$r = f(s). \tag{2.66}$$

Energia potențială a forței centrifuge este $-\frac{1}{2}r^2\omega^2$. Intregrala energiei ne dă:

$$\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}\omega^2 f^2(s) + V(s) = \text{const} \tag{2.67}$$

constanta determinîndu-se prin condițiile inițiale. Integrarea ecuației precedente se efectuează prin cuadraturi și rezolvă complet problema (v. problema nr. 142).

2. *Problema seismografului.* Seismograful este un instrument care servește la înregistrarea pe diagrame a deplasărilor pe care le efectuează scoarța pămîntului. Mișcarea este raportată la un sistem de coordonate $Ox'y'z'$ legat de scoarța pămîntească în regiunea unde se găsește observatorul, planul (x', y') fiind orizontal, iar Oz' verticala locului. Curba înregistrată reprezintă urma lăsată pe diagramă de acul ce se găsește în extremitatea M a unui pendul atîrnat în O, de lungime l, care începe a oscila în momentul cînd se produc mișcările seismice, pornind din starea de repaus.

Problema seismografului constă în deducerea, din datele experimentale citite pe diagramă, a mișcării punctului O (deci, a mișcării scoarței pămîntului) față de geoid.

Seismografele pot înregistra două feluri de oscilații: *orizontale* și *verticale*, fiind construite în mod corespunzător.

Să considerăm un sistem de coordonate G, x, y, z, legat de geoid, deci invariabil pentru mișcările provocate de cutremure, considerat ca sistem fix de referință.

Fie $\bar{v}_0$ viteza lui O datorită mișcărilor seismice; fie $\bar{\omega}$ viteza unghiulară a sistemului O față de G. Viteza punctului M față de G este:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}' + \frac{\partial \bar{r}'}{\partial t} \tag{2.68}$$

Scanned with OKEN Scanner

$\bar{r}'$ fiind vectorul de poziţie a lui M faţă de O. Să considerăm mişcările foarte mici ale pendulului în jurul poziţiei de echilibru M_0. Mişcarea în planul orizontal $z' = l$, paralel cu planul (x', y'), va rezolva problema „seismografelor de componente orizontale".

Însemnînd cu $\bar{r}$ şi $\bar{r}_0$ vectorii de poziţie ai lui M şi O faţă de G, avem, pentru mişcări în planul $z' = l$:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + x'\bar{i} + y'\bar{j} + l\bar{k} \tag{2.69}$$

$\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ fiind vectorii unitari ai sistemului O faţă de G.

Viteza relativă se reduce, după (2.68), la:

$$\frac{\partial \bar{r}'}{\partial t} = \dot{x}'\bar{i} + \dot{y}'\bar{j}.$$

Pe de altă parte:

$$\bar{\omega} \times \bar{r}' = \bar{\omega} \times \bar{r}_0 + \bar{\omega} \times (\bar{r}' - \bar{r}_0);$$

în membrul al doilea termenul al doilea este neglijabil pentru oscilaţii mici, $(\bar{r}' - \bar{r}_0) \ll 1$, admiţînd că ωl are un ordin de mărime egal cu al proiecţiei vitezei lui M pe planul $z' = l$. În aceste condiţii, relaţia (2.68) se scrie:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_0 + l\bar{\omega} \times \bar{k} + \dot{x}'\bar{i} + \dot{y}'\bar{j}$$

sau:

$$\bar{v}_M = (v_{0x} + \dot{x}' + l\omega_y)\,\bar{i} + (v_{0y} + \dot{y}' - l\omega_x)\,\bar{j} + v_{0z}\bar{k}. \tag{2.70}$$

Să alegem drept coordonate lagrangeiene $q_1 = x'$, $q_2 = y'$ şi să punem:

$$\xi = v_{0x} + l\omega_y; \quad \eta = v_{0y} - l\omega_x; \quad \zeta = v_{0z}, \tag{2.71}$$

şi:

$$T_0 = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

energia cinetică a punctului M_0; astfel încît ξ, η, ζ pot fi considerate, împreună cu ω_x, ω_y, ω_z, drept elemente caracteristice pentru mişcarea scoarţei pămîntului.

Energia cinetică a lui M va fi, după (2.70)

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \xi\dot{q}_1 + \eta\dot{q}_2 + T_0 \tag{2.72}$$

formă caracteristică legăturilor reonome.

Ne rămîne să exprimăm energia potenţială $U = gz$, datorită greutăţii punctului M (redusă la masa $m = 1$). Folosind unghiurile lui E u l e r (§ 162), avem:

$$z = z_0 + \alpha x' + \beta y' + \gamma z'$$

unde z_0 este coordonata z a lui O faţă de G, iar:

$$\alpha = \sin\varphi \sin\theta; \quad \beta = -\cos\varphi \sin\theta; \quad \gamma = \cos\theta.$$

Trebuie să ţinem seama şi de relaţia de condiţie:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = l^2.$$

Pentru variaţiile mici să facem aproximaţia:

$$\theta \ll 1; \quad \text{deci, } \cos\theta \longrightarrow 1; \quad \sin\theta \longrightarrow \theta.$$

În acest caz, avînd în vedere (2.69) putem exprima energia potenţială sub forma:

$$U = g\left[z_0 + l + \alpha q_1 + \beta q_2 - \frac{1}{2l}(q_1^2 + q_2^2)\right]. \tag{2.73}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relaţiile (2.72) şi (2.73) deducem *ecuaţiile lui L a g r a n g e* pentru mişcarea seismografului:

$$\ddot{\xi} + \ddot{q}_1 = g\left(\alpha - \frac{q_1}{l}\right); \quad \ddot{\eta} + \ddot{q}_2 = g\left(\beta - \frac{q_2}{l}\right) \tag{2.74}$$

unde ξ, η; α, β, sînt funcţii *necunoscute* de t, care urmează a fi calculate din (2.74) de îndată ce am determinat, prin citire pe diagramă, pe q_1, q_2, şi $\ddot{q}_1$, $\ddot{q}_2$. Observăm că α, β sînt cîtimi care se calculează din expresiile (§ 209) care leagă viteza unghiulară de unghiurile lui E u l e r . În aproximaţia admisă, $\omega_z \ll 1$ şi prin urmare:

$$\dot{\alpha} = -\omega_y; \quad \dot{\beta} = +\omega_x; \quad \text{deci,} \quad \varphi = \text{const}; \quad \psi = \text{const}. \tag{2.75}$$

Observăm că cele *două* ecuaţii (2.74) nu sînt suficiente pentru a deduce toate cele *patru* cantităţi necunoscute ξ, η; ω_x, ω_y. De aceea, în practică se întrebuinţează *două pendule* de lungimi diferite, dar aşezate suficient de aproape unul de celălalt pentru ca valorile lui ξ, η; ω_x, ω_y, să coincidă. În felul acesta, posedăm patru ecuaţii pentru patru necunoscute.

Practica simplifică şi mai mult problema analitică, observîndu-se că, pentru cutremure suficient de îndepărtate (distanţe mari faţă de lungimea pendulului), cîtimile ξ, η diferă foarte puţin de v_{0x} şi v_{0y}, astfel încît, după (2.71) şi (2.75), întrucît poziţia iniţială a fost o poziţie de repaus, $\alpha = \beta = 0$.

În aceste condiţii, ecuaţiile (2.74) devin:

$$v_{0x} = -\left(\ddot{q}_1 + \frac{g}{l} q_1\right); \qquad v_{0y} = -\left(\ddot{q}_2 + \frac{g}{l} q_2\right)$$

ceea ce exprimă componentele acceleraţiilor orizontale.

Mişcarea verticală este determinată prin v_{0z} şi ω_z, care se măsoară cu ajutorul „seismografelor de componente verticale“.

3. *Exemple de mişcare impulsivă.* Patru bare de lungime l şi masă unu, legate între ele astfel încît să formeze un romb, se mişcă în acelaşi plan (x, y). Unul din vîrfurile rombului suferă o impulsie ξ, η. Să se exprime mişcarea sistemului.

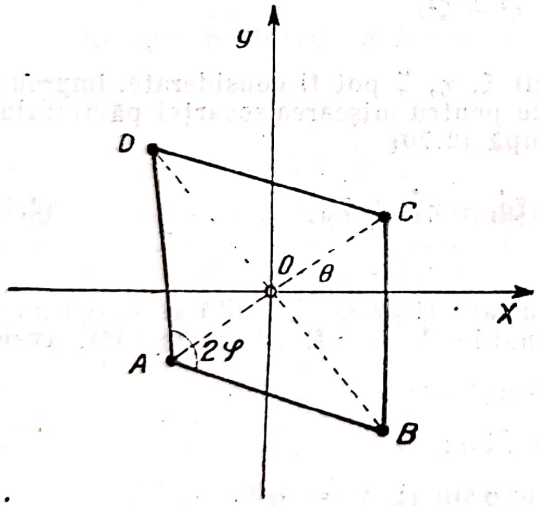

Fig. 78

Vom aplica ecuaţiile lui L a g r a n g e pentru mişcarea impulsivă. Pentru aceasta trebuie să scriem expresia energiei cinetice.

Să luăm originea coordonatelor O în centrul rombului, care să aibă ca vîrfuri A, B, C. D. Fie θ unghiul lui AC cu Ox şi 2φ unghiul făcut de AB cu AD (fig. 78).

Coordonatele vîrfurilor sînt:

$$\left.\begin{matrix} A \\ C \end{matrix}\right\} x = \mp l\cos\varphi\cos\theta, \quad y = \mp l\cos\varphi\sin\theta;$$

$$\left.\begin{matrix} B \\ D \end{matrix}\right\} x = \pm l\sin\varphi\sin\theta, \quad y = \mp l\sin\varphi\cos\theta.$$

Să punem:

$$q_1 = 2x; \quad q_2 = 2y; \quad q_3 = l\theta; \quad q_4 = l\varphi. \tag{2.76}$$

Energia cinetică este:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2 .$$

Să calculăm impulsia generalizată. În acest scop, să formăm expresia lucrului mecanic virtual pentru deplasarea punctului A sub impulsia aplicată. Obținem:

$$\mathfrak{L} = \xi\,\delta(x - l\cos\varphi\cos\theta) + \eta\,\delta(y - l\cos\varphi\sin\theta)$$

astfel încît:

$$\begin{gathered} Q_1 = \xi;\ Q_2 = \eta;\ Q_3 = \varphi(\xi\sin\theta - \eta\cos\theta) \\ Q_4 = \sin\varphi(\xi\cos\theta + \eta\sin\theta). \end{gathered} \tag{2.77}$$

Ecuațiile lui Lagrange sînt:

$$\dot{q}_k - \dot{q}_k^0 = Q_k. \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Aceste ecuații, avînd în vedere (2.76) și (2.77), determină variația subită a sistemului, din starea inițială într-o stare posterioară impulsiei.

4. *Alt exemplu de mișcare impulsivă.* Un disc circular omogen de masă M și rază R se mișcă în planul vertical xy. În momentul t_0 lovește axa x și nu mai poate decît să se rostogolească pe această axă, fără frecare și fără alunecare (fig. 79). Să se determine viteza după ciocnire.

Poziția sistemului înainte de ciocnire depinde de 3 parametri: coordonatele (x, y) ale centrului discului (C) și unghiul θ de rotație în *sens negativ* de la Oy spre Ox.

În momentul ciocnirii se introduc două legături noi.

1. Discul rămîne în contact cu dreapta Ox:

$$y = R. \tag{2.78}$$

2. Discul se rostogolește pe Ox:

$$x = R\,\theta. \tag{2.79}$$

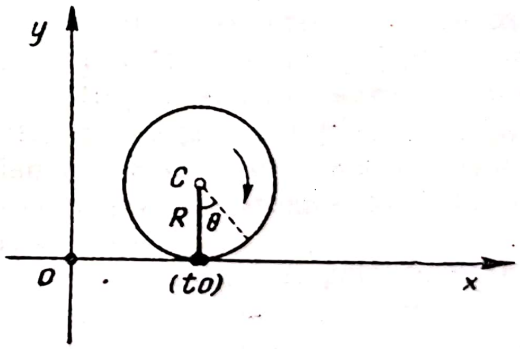

Fig. 79

Alegînd convenabil poziția originii, luăm coordonatele generalizate:

$$q^1 = x;\ q^2 = y - R;\ q^3 = x - R\theta \tag{2.80}$$

astfel încît legăturile (2.78) și (2.79) se exprimă prin

$$q^2 = 0;\quad q^3 = 0. \tag{2.81}$$

Avem:

$$T = \frac{M}{2}(k^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

sau:

$$T = \frac{M}{2}\left[k^2\frac{(\dot{q}^1 - \dot{q}^3)^2}{R^2} + \dot{q}^{1^2} + \dot{q}^{2^2}\right].$$

Singurul parametru pe care legăturile nu-l obligă să fie nul este q^1; aşadar avem o singură ecuaţie Lagrange:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^1}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_0^1}\right) = 0,$$

sau:

$$\frac{k^2}{R^2}\left[\dot{q}_1^1 - \dot{q}_1^3 - (\dot{q}_0^1 - \dot{q}_0^3)\right] + \dot{q}_1^1 - \dot{q}_0^1 = 0.$$

Dar $q^3 = 0$ şi deci $(q_1^3) = 0$. Rezultă, revenind la vechile variabile:

$$\frac{k^2}{R^2}(\dot{x}_1 - R\dot{\theta}_0) + \dot{x}_1 - \dot{x}_0 = 0,$$

de unde obţinem viteza finală a centrului în mişcarea de rostogolire. Dacă, de exemplu, mişcarea în momentul ciocnirii a fost de aşa natură încît să avem: $Rx_0 + k^2\dot{\theta}_0 = 0$, discul se opreşte.

Partea a doua

PRINCIPIILE ANALITICE UNIVERSALE ALE MECANICII

Capitolul III

CONSIDERAȚII GENERALE

297. **Principii mecanice și principii analitice.** Cînd am fixat cadrul fenomenelor fizice guvernate de Mecanica newtoniană am analizat ipotezele de bază care constituie scheletul acestui sistem de fizică teoretică. Aceste ipoteze, de natură mecanică, formulate pentru întîia oară de Newton sub numele de „principii" nu au nici caracter de „axiome", nici caracter de „legi fizice" și nici caracter de „ipoteze" empirice. Totuși au fost denumite „principii" acordîndu-li-se o denumire generică, de altfel ea însăși improprie. Principiile Mecanicii newtoniene sînt, în adevăr, niște legi fizice cu caracter ipotetic. Adică, legi fizice care nu au fost stabilite prin experiență. Ele au însă proprietatea esențială că nu sînt și nu pot fi niciodată contrazise de experiență; căci dacă acest lucru s-ar întîmpla, și în măsura în care acest fapt ar avea loc, va trebui revizuită întreaga concepție a Mecanicii newtoniene. Vom vedea în ce măsură acest lucru s-a petrecut atunci cînd au fost luate în considerare mișcări cu viteze comparabile cu viteza luminii (Teoria relativității restrînse).

Principiile fundamentale ale Mecanicii newtoniene au, prin urmare, un conținut fizic, mecanic. De aceea le-am numit mai sus „principii *mecanice*". O situație similară se prezintă și în Termodinamică. Cele trei principii fundamentale ale Termodinamicii sînt legi fizice nedemonstrabile; ele însă nu pot fi contrazise de vre-o experiență. În acest sens ele au fost numite „principiile fundamentale ale Termodinamicii"[1]).

În mecanica analitică s-a obișnuit a se da numele de „principii" unor *formulări analitice* care exprimă sub formă generală cu tendințe de universalitate, legile mecanice. Iată cum s-a ajuns la aceste „principii". În stăruința de a găsi o expresie universală, care să încadreze într-o „lege unică" *toate* fenomenele fizice, s-a reușit a se da formulări analitice unitare, pasibile de a cuprinde, formal, nu numai legile mecanicii newtoniene, dar și alte legi naturale. Forma găsită corespunde, matematic, formei

[1]) *Max Planck*, „Einführung in die Thermodynamik" Teubner, 1923.

analitice care întruchipează legile Opticii geometrice (Principiul lui F e r m a t). După cum vom vedea mai jos, esențialul în aceste formulări este metoda analitică de calcul variațional. De aceea le-am numit „principii *analitice*". Ele nu au un caracter fizic, cu toate încercările ce s-au făcut să li se imprime un substrat fizic („drumul cel mai scurt"; „cea mai mică acțiune" etc.) sau chiar teleologico-filozofic.

Întrucît aceste principii au aplicații de mare interes și în alte ramuri ale fizicii (Optica, Electricitatea, Mecanica relativistă, Mecanica ondulatorie etc.), socotim potrivit să le cuprindem sub numele generic de „principii analitice universale" caracterizînd, prin aceasta, *atitudinea* acestor formulări față de legile naturii.

Analitic, ele pot fi grupate în două: a) *Diferențiale*. Se studiază comportarea sistemului dinamic față de anumite variații elementare, diferențiale, care pot să fie *posibile* sau *virtuale*. Ele se execută în spațiul configurațiilor R_n, asupra elementelor ce definesc starea sistemului dinamic. b) *Integrale*. Se studiază comportarea sistemului dinamic față de variații de ansamblu, ale sistemului. Astfel de variații aplicate traiectoriilor, în întregime, pot fi reprezentate prin deplasări ale liniilor spațiu-timp în R_{n+1}, astfel încît fiecare punct-lume x_i, y_i, z_i, t să fie transportat în punctul infinitesimal vecin $x_i + \Delta x_i$, $y_i + \Delta y_i$, $z_i + \Delta z_i$, $t + \Delta t$, pentru fiecare punct al curbei orare.

În cazul legăturilor olonome, variațiile Δx_i, Δy_i, Δz_i, Δt, sînt astfel alese încît și poziția variată să satisfacă la condițiile de legătură ale sistemului inițial. Dacă legăturile olonome sînt scleronome, variațiile Δx_i, Δy_i, Δz_i sînt virtuale, astfel încît ansamblul acestor variații, pentru toate punctele traiectoriei, reprezintă o variație globală a curbei, în care fiecare punct al curbei satisface condiției de a fi supus unei deplasări virtuale. Dacă legăturile olonome sînt reonome, variațiile Δx_i, Δy_i, Δz_i, nu reprezintă o deplasare virtuală, iar mișcarea de pe curba variată va fi alta decît cea pe care ar avea-o sistemul dacă deplasarea ar fi virtuală.

Același lucru se întîmplă și în cazul legăturilor neolonome. În acest caz, după E. R o u t h, este posibil să se considere variațiile Δx_i, Δy_i, Δz_i astfel încît curba variată în R_n să satisfacă la condițiile de legătură. Dar atunci, punctele care se corespund pe cele două curbe nu mai sînt omologe. Cu alte cuvinte, pe curba variată va corespunde unui punct P, care pe curba inițială ocupa o poziție dată în momentul t, alt punct decît acela care provine din deplasarea lui P. Corespondența dintre aceste puncte se exprimă prin cîtimile:

$$\Delta x_i - \dot{x}_i \Delta t; \quad \Delta y_i - \dot{y}_i \Delta t; \quad \Delta z_i - \dot{z}_i \Delta t.$$

Introducînd coordonatele generalizate, avem:

$$\Delta x_i - \dot{x}_i \Delta t = \sum \frac{\partial x_i}{\partial q^r} (\Delta q^r - \dot{q}^r \Delta t) \text{ etc.}$$

Se consideră variația fiecărui „element" q^r, $\dot{q}^r$, care devine $(q^r + \delta q^r, \dot{q}^r + \delta \dot{q}^r)$. Variația $\delta q^r(t)$ reprezintă o curbă variată, vecină. Tangenta într-un punct al acestei curbe are ca direcție $\left(\dot{q}^r + \frac{d}{dt}(\delta q^r)\right)$. Creșterea $\frac{d}{dt}(\delta q^r)$ nu are nimic comun cu variația vitezei $\delta \dot{q}^r$, ceeace se exprimă prin relația

$\delta dq^r \neq d\delta q^r$. Acesta este motivul pentru care, în locul relațiilor de permutabilitate din cazul neolonomiei se introduc relațiile de *transivitate* pentru sistemele neolonome.

Vom începe prin a studia principiile integrale. După cum vom vedea, ele se sprijină pe problema analitică a variației unei expresii integrale, sub anumite condiții analitice date. Pentru a nu repeta aceleași calcule algebrice cu ocazia diferitelor formulări ale principiilor, vom trata mai întîi problema generală de „variație a unei integrale definite" așa cum este cunoscută din elementele *Calculului variațional.*

298. **Variația unei integrale definite. Ecuațiile lui Euler.** Forma generală a funcțiilor care apar în principiile analitice ale Mecanicii, este:

$$f(x; y_1, y_2,\ldots,y_n; y_1', y_2',\ldots,y_n')$$

unde x este variabila independentă; $y = y(x)$ sînt funcții continue și derivabile de x; $y'(x)$ sînt derivatele lui y în raport cu x, presupuse de asemeni continue.

Putem concepe cîtimile $(x, y_1, y_2,\ldots,y_n)$, socotite ca independente, drept coordonatele unui punct într-un spațiu R_{n+1}.

Să considerăm integrala, numită funcționala de $y(x)$:

$$I = \int_{x^0}^{x^1} f(x; y_1, y_2,\ldots,y_n; y_1', y_2'\ldots,y_n')\, dx. \tag{3.1}$$

Fie două puncte $P_0\,(x^0, y_k^0 = y_k(x^0))$ și $P_1\,(x^1, y_k^1)$ în R_{n+1}. Luăm o curbă (C) care trece prin P_0 și P_1, conținută în R_{n+1},[1]).

$$y_k = y_k(x) \tag{3.2}$$

Funcția $y_k'(x)$ reprezintă componentele vectorului tangent în punctul (x, y_k) la curba (C). Curba astfel aleasă (3.2), neprezentînd puncte singulare, sub condițiile enunțate, integrala (3.1) posedă, pentru fiecare punct P de pe (C) o valoare unică bine determinată $I(P)$. Vom însemna o astfel de valoare a lui I, într-un punct oarecare de pe curba (C), cu $I\,(C)$.

Fie $P_0'\,(x^0 + \Delta x^0;\ y_k^0 + \Delta y_k^0)$ și $P_1'\,(x^1 + \Delta x^1;\ y_k^1 + \Delta y_k^1)$

două puncte vecine lui P_0 și P_1 în R_{n+1} (Δ reprezentînd o variație foarte mică, finită, dată: $P_0 \to P_0'$ resp. $P_1 \to P_1'$). De asemeni, fie o curbă (C'), foarte apropiată de (C), în R_{n+1}, dată de ecuațiile:

$$y_k = y_k(x) + \delta y_k(x) \tag{3.3}$$

astfel încît, în punctul de pe (C'): $x + \delta x$, componentele vectorului tangentă vor fi:

$$y_k' = y_k'(x) + \delta y_k'(x). \tag{3.3'}$$

---

[1]) În R_{n+1} al Mecanicii, prin fiecare punct P_0 trece un fascicol de ∞^n curbe extremale, formînd *cîmpul liniilor orare* extremale; astfel încît, prin fiecare punct $P_1\,(q, t)$ care aparține unei regiuni date, vecine lui P_0, trece numai o singură curbă din fascicolul precedent așa fel încît să nu părăsească domeniul între P_0 și P_1 (teorema de existență).

Pe curba (C') integrala (3.1) va avea o valoare determinată $I(C')$.

Să considerăm diferența:

$$\delta I = I(C') - I(C).$$

Vom avea după (3.1), (3.2) și (3.3'):

$$\delta I = \int_{x^0 + \Delta x^0}^{x^1 + \Delta x^1} f(x;\ y_k + \delta y_k;\ y'_k + \delta y'_k)\ dx - \int_{x^0}^{x^1} f(x;\ y_k;\ y'_k)\ dx. \tag{3.4}$$

Observăm că prima integrală se descompune în:

$$\int_{x^0 + \Delta x^0}^{x^1 + \Delta x^1} = \int_{x^0 + \Delta x^0}^{x^0} + \int_{x^1}^{x^1 + \Delta x^1} + \int_{x^0}^{x^1}. \tag{3.5}$$

Ținînd seamă de (3.5), putem scrie (3.4) sub forma prescurtată:

$$\delta I = I_0 + I_1 + \delta_0 I \tag{3.4'}$$

cu notațiile evidente. Avem mai întîi:

$$\delta_0 I = \int_{x_0}^{x^1} f(x;\ y_k + \delta y_k;\ y'_k + \delta y'_k)\ dx - \int_{x_0}^{x^1} f(x;\ y_k;\ y'_k)\ dx$$

marcînd prin δ_0 variația δ corespunzătoare limitelor integralelor, fixe. Putem varia sub semnul integral și obținem:

$$\delta_0 I = \sum_{k=1}^{n} \int_{x^0}^{x^1} \left(\frac{\partial f}{\partial y_k}\, \delta y_k + \frac{\partial f}{\partial y'_k}\, \delta y'_k \right) dx. \tag{3.6}$$

Integrăm prin părți fiecare termen al integralei a doua din membrul al doilea al relației (3.6). Avem, observînd că operațiile δ și d sînt permutabile:

$$\int_{x^0}^{x^1} \frac{\partial f}{\partial y'_k}\, \delta y'_k\ dx = \left(\frac{\partial f}{\partial y'_k}\, \delta y_k \right)_{P_0}^{P_1} - \int_{x^0}^{x^1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_k} \right) \delta y_k\ dx.$$

Înlocuind în (3.6) obținem:

$$\delta_0 I = \int_{x^0}^{x^1} dx \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_k} \right) \right] \delta y_k + \left[\frac{\partial f}{\partial y'_k}\, \delta y_k \right]_0^1. \tag{3.7}$$

Reamintim că am însemnat cu Δ variația $P_0 \to P'_0$, resp. $P_1 \to P'_1$. Avem atunci (§ 297):

$$\begin{aligned} \Delta y_k^0 &= (\delta y_k)^0 + y'^0_k\, \Delta x^0 \\ \Delta y_k^1 &= (\delta y_k)^1 + y'^1_k\, \Delta x^1 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

În termenul integrat din membrul al doilea al expresiei (3.7) trebuie să facem substituția (3.8).

Rămîne să mai evaluăm în (3.4′) pe I_0 și I_1. Aplicînd teorema mediei, obținem:

$$I_0 = -f(x^0, y_k^0, y_k'^0)\,\Delta x^0; \quad I_1 = f(x^1, y_k^1, y_k'^1)\,\Delta x^1. \tag{3.9}$$

Din (3.4′), (3.7), (3.8) și (3.9) rezultă, în definitiv:

$$\delta I = \int_{x^0}^{x^1} dx \sum_{k=1}^{n} \delta y_k \left[\frac{\partial f}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_k'}\right)\right] + \tag{3.10}$$

$$+ \left[\left(f - \sum_{k=1}^{n} y_k' \frac{\partial f}{\partial y_k'}\right)\Delta x\right]_0^1 + \left[\sum_{k=1}^{n} \Delta y_k \frac{\partial f}{\partial y_k'}\right]_0^1.$$

În cazul limitelor fixe, variațiile extremelor sînt nule: $\Delta x = 0$ și $\Delta y_k = 0$, așa încît rămîne numai prima integrală.

Condiția de staționaritate. După cum vom vedea mai jos, principiile analitice ale Mecanicii decurg din problema analitică următoare: să se găsească în ce condițiuni integrala (3.1) este *staționară*, adică, prezintă un *extremum* (maxim sau minim). Matematic, se cere, așadar, să se determine curbele (C) pentru care $I(C)$ este sau maximă sau minimă, tot timpul. Aceasta înseamnă că, luînd o curbă vecină (C'), variația:

$$\delta I = I(C') - I(C)$$

trebuie să păstreze un semn invariabil, oricare ar fi (C'). Or, este evident că aceasta nu este posibil decît dacă $\delta I = 0$. Așadar, avem teorema următoare: dintre toate curbele care trec prin două puncte (x^0, y_k^0) și (x^1, y_k^1), acea curbă $y_k = y_k(x)$, numită *extremală*, face integrala I staționară, pentru care condiția:

$$\delta I = 0 \tag{3.11}$$

este satisfăcută. Această condiție este, deci, *necesară*. Nu se poate afirma că ar fi și suficientă.

Lema fundamentală a calculului variațional (Lagrange). Fiind dată o funcție continuă $\psi(x)$ care se anulează pe frontieră și posedă derivate prime, dacă avem relația:

$$\int_{x^0}^{x^1} \psi(x)\,\varphi(x)\,dx = 0 \tag{3.12}$$

unde $\varphi(x)$ este continuă în x, funcția $\varphi(x)$ se anulează în intervalul (x^0, x^1).

În adevăr, să admitem că în punctul $x = \xi$ din intervalul (x^0, x^1) am avea $\varphi(\xi) \neq 0$; și anume, pentru a fixa ideile, admitem că $\varphi(\xi) > 0$. Vom găsi atunci un interval (i): $\xi_0 < x < \xi_1$, în jurul poziției ξ în care $\varphi(x) > \delta > 0$. Să punem:

$$\psi(x) = (x - \xi_0)^4 (x - \xi_1)^4 \text{ în intervalul } (i)$$

$$\psi(x) = 0 \qquad \text{în afara intervalului } (i)$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci desigur că:

$$\int_{x^0}^{x^1} \psi(x)\varphi(x)\,dx > 0$$

după cum se verifică integrînd prin părți, după ce am luat valoarea pozitivă a lui $\varphi(\xi) > 0$ constantă, pe care o scoatem de sub integrală. Acest rezultat contrazice ipoteza (3.12).

Ecuațiile lui Euler. Să considerăm extremitățile fixe în principiul variațional (13.10), ținînd seama de condiția (3.11). În conformitate cu lema fundamentală, rezultă ecuațiile lui Euler:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_k'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y_k} = 0, \quad (k=1, 2, \ldots n) \tag{3.13}$$

ecuații, la care trebuie să satisfacă $y_k = y_k(x)$ pentru ca să fie curbe extremale.

Aceste considerații generale ne permit să exprimăm principiile analitice ale Mecanicii. Este, în prealabil, necesar să alegem forma funcțiilor f pentru fiecare categorie distinctă de sistem teoretic sau chiar pentru diferite exprimări ale principiilor. De pildă, în Mecanica newtoniană, diverși autori se folosesc de diverse forme ale lui f; dar aceasta nu este esențial. Ceea ce este mai important este posibilitatea găsirii funcțiilor f pentru Mecanica ondulatorie, Mecanica relativistă, Optica geometrică etc., discipline care, prin urmare, pot fi dezvoltate pornind de la principiul analitic corespunzător.

Capitolul IV

PRINCIPIILE VARIAȚIONALE, INTEGRALE, ALE MECANICII

299. **Principiul lui Hamilton.** Fie un sistem dinamic *olonom-reonom* și *conservativ* cu n grade de libertate. Pentru un astfel de sistem energia totală nu va fi, în general, constantă, iar funcția lui Lagrange, $\mathfrak{L}$, va conține explicit timpul.

Principiul dinamic al lui Hamilton se enunță precum urmează: „integrala de acțiune“:

$$V = \int \mathfrak{L}\,dt$$

luată între două poziții determinate (și fixe), astfel încît pozițiile omologe de pe două curbe vecine (C) și (C') să se corespundă în aceleași momente, este staționară pentru traiectoria reală.

Așadar, pentru traiectoria reală, trebuie ca:

$$\delta V = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}\,(q^1, q^2, \ldots, q^n;\ \dot{q}^1, \dot{q}^2, \ldots, \dot{q}^n;\ t)\,dt = 0; \tag{4.1}$$

ceea ce exprimă condiția ca traiectoria reală să fie o extremală, pentru problema variațională (4.1).

Scanned with OKEN Scanner

Deplasările pe două curbe vecine (C) și (C') trebuie să se efectueze astfel încît punctele omologe q^r (pe C) și $q^r + \delta q^r$ (pe C') să fie ajunse în *același moment*[1]). Apoi:

$$(\delta q^h)_{t_0} = (\delta q^h)_{t_1} = 0\,; \quad (\delta t)_0 = (\delta t)_1 = 0,$$

t_0 și t_1 fiind valorile lui t în punctele, fixe, extreme P_0 și P_1, prin care trec toate curbele (C) în același moment. În timpul deplasărilor pe aceste curbe, energia totală poate varia și pe aceeași curbă și de la o curbă dată la alta vecină. Atît extremala (C), cît și curba variată (C') sînt traiectorii posibile, compatibile cu legăturile, dacă sînt olonome.

Condițiile inițiale sînt:

$$q^h(t_0) = q_0^h\,; \quad q^h(t_1) = q_1^h.$$

Pentru ca traiectoria reală a sistemului dinamic să fie o extremală a problemei (4.1) trebuie ca ecuațiile lui E u l e r relative la (4.1) să coincidă cu ecuațiile lui L a g r a n g e ale sistemului dinamic. Acest fapt se poate verifica ușor. În adevăr, ecuațiile (3.13 § 298) se scriu, pentru problema variațională:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^r} = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

deci, ecuațiile lui L a g r a n g e.

În modul acesta, principiul lui H a m i l t o n împrumută aspectul unui principiu fundamental pentru întreg sistemul teoretic al Mecanicii newtoniene, putînd fi extins, prin alegerea adecvată a funcției lui L a g r a n g e, și la Mecanica relativistă, Mecanica ondulatorie etc.

300. **Cazul sistemelor de forțe neconservative.** Principiul lui H a m i l t o n prezintă, în acest caz, forma:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_{k=1}^{n} Q_k\, \delta q^k\right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\, \delta \dot{q}^k + \frac{\partial T}{\partial q^k}\, \delta q^k + Q_k\, \delta q^k\right] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\, \delta \dot{q}^k + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right) \delta q^k\right] dt = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\, \delta q^k \right|_{t_0}^{t_1} = 0.$$

301. **Cazul sistemelor scleronome.** În acest caz, mișcarea efectuată pe oricare din curbele (C) trebuie să satisfacă teoremei energiei $E = \text{const.}$ Această condiție restrictivă ne impune să modificăm condiția cerută în principiul lui H a m i l t o n, unde q erau independenți, anume, ca punctele omologe de pe curba extremală (traiectoria reală) și de pe curba variată, să fie atinse în același moment. Vom înlocui această condiție prin condiția, mai puțin restrictivă, ca timpul total $t_1 - t_0$ (necesar pentru parcurgerea curbei extremale) să fie același și pentru o curbă variată, oarecare, traiectorie posibilă a sistemului dinamic.

---

[1]) Pentru cazul cînd se variază și timpul se poate consulta articolul lui *E. Storchi* „Condizioni caratteristiche per la validita dei principi di Hamilton e di Hölder", Rend. Ac. Naz. d. Lincei, v. 18, p. 162, 1955.

Putem admite aşadar, că pentru extremală, mişcarea începe în momentul t_0 şi sfîrşeşte în momentul t_1; pe cînd pentru o curbă variată mişcarea poate începe la momentul $t_0 + \Delta t_0$ şi sfîrşi la momentul $t_1 + \Delta t_0$, aşa încît:

$$(t_1 + \Delta t_0) - (t_0 + \Delta t_0) = t_1 - t_0.$$

Existenţa integralei energiei se datoreşte faptului că timpul t nu apare explicit în funcţia lui L a g r a n g e.

Concepînd principiul lui H a m i l t o n ca un principiu variaţional pentru liniile spaţiu-timp în A_{n+1} $(q^1,\ldots,q^n\ ;\ t)$, dispariţia lui t echivalează cu posibilitatea de a privi coordonata t ca pe o coordonată ciclică, în A_{n+1}. Această împrejurare face ca să se treacă de la principiul variaţional hamiltonian din A_{n+1} la un principiu variaţional în R_n, unde traiectoriile extremale trebuie să satisfacă la condiţia suplimentară $E = h = \text{const.}$

302. **Principiul lui Maupertuis.** Din punct de vedere analitic, acest principiu este o modificare a principiului lui H a m i l t o n pentru sistemele particulare, anume *scleronome*, în condiţiile expuse în paragraful precedent.

Condiţiile iniţiale $\delta q^k(t_0) = \delta q^k(t_1) = 0$, se menţin, curbele trecînd prin cele două puncte fixe P_0 şi P_1. Dar, în general, putem alege în cazul de faţă $(\delta t)_0 = (\delta t)_1 = \Delta t_0 \neq 0$.

Acestea fiind fixate, principiul lui H a m i l t o n cere ca, pentru curba traiectorie, să avem:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}(q, \dot{q})\, dt = 0, \tag{4.2}$$

cu condiţia suplimentară $E = U + T = \text{const}$[1]) :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} E\, dt = 0. \tag{4.3}$$

Din relaţiile (4.2) şi (4.3) rezultă, aplicînd metoda multiplicatorilor lui L a g r a n g e:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathfrak{L} + \lambda E)\, dt = 0. \tag{4.4}$$

Multiplicatorul λ se determină prin condiţia ca (4.4) să fie satisfăcută şi în cazul cînd se iau pentru integrală limitele $t_0 + \Delta t_0$ şi $t_1 + \Delta t_1$. Vom avea însă, în acest caz, după ecuaţia fundamentală (3.10) § 298:

$$\begin{aligned} 0 = \delta \int_{t_0 + \Delta t_0}^{t_1 + \Delta t_1} (\mathfrak{L} + \lambda E)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^k}\right)\right] \delta q^k\, dt + \\ + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\, \delta q^k\right]_0^1 + \left|\left(T - U - \sum_{k=1}^{n} \dot{q}^k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} + \lambda E\right) \delta t\right|_0^1. \end{aligned} \tag{4.5}$$

[1]) Păstrînd notaţiile consacrate în mecanica analitică, notăm energia cinetică prin T şi energia potenţială prin U.

Primul termen din membrul al doilea este nul, deoarece integrala fiind extinsă asupra traiectoriei reale, integrandul este nul în virtutea ecuațiilor lui L a g r a n g e. Al doilea termen este de asemenea nul conform condițiilor inițiale (δq^k nul în P_0 și P_1). În ceea ce privește al treilea termen, observăm că pentru sisteme scleronome, T este o formă pătratică omogenă. Vom putea scrie, pentru acest termen, condiția:

$$[-(T+U)+\lambda E]\,\Delta t=0,$$

sau, cum $\Delta t \neq 0$ și $E=T+U\neq 0$, rezultă $\lambda=1$.

În aceste condiții, integrala (4.4) devine *principiul lui M a u p e r t u i s*:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(\mathfrak{L}+E)\,dt=0, \tag{4.6}$$

sau încă, observînd că $\mathfrak{L}=T-U$ și $E=T+U$, urmează că, făcînd notația:

$$S=\int_{t_0}^{t_1}2T\,dt, \tag{4.7}$$

vom avea:

$$\delta S=0,$$

pentru traiectoria reală. Funcția S introdusă prin definiția (4.7) se numește *funcție caracteristică* sau *funcție de acțiune*. Expresia (4.7) mai poate fi scrisă în diferite forme. De pildă, putem exprima funcția S prin expresiile:

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{n}\dot{q}^k\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}^k}\,dt;\quad S(q,p)=\int_{P_0}^{P_1}\sum_{k=1}^{n}p_k\,dq^k \tag{4.7'}$$

considerînd punctul P_0 (t_0) drept fix, iar punctul P_1 deplasîndu-se pe traiectorie. În mod analog mai putem scrie principiul lui M a u p e r t u i s sub forma:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}2(E-U)\,dt=0. \tag{4.8}$$

Ținînd seamă de definiția lui T (punînd pentru simplificarea scrisului $m=1$), anume:

$$2T=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

putem scrie pentru (4.8), limitele de variație a lui t fiind arbitrare:

$$\delta\int_{P_0}^{P_1}\sqrt{2(E-U)}\,ds=0;\quad\text{sau}\quad\delta\int_{P_0}^{P_1}\sqrt{2T}\,ds=0. \tag{4.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Oricare este expresia integrandului, observăm că el are dimensiunile unei *acţiuni*: energie × timp. De aceea, principiul lui M a u p e r t u i s mai poartă numele de *principiul celei mai mici acţiuni*. Asupra denumirii improprii „celei mai *mici*" vom reveni mai tîrziu.

Dacă mişcarea este liberă şi se efectuează pe extremală, cu energia totală constantă, spontan (fără acţiunea vreunei forţe exterioare), atunci $U = 0$ şi viteza $v = \text{const.}$ (deoarece $T = E = \text{const.}$).

Relaţia (4.9) devine:

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2T}\, ds = \delta \int_{P_0}^{P_1} v\, ds = 0 \tag{4.10}$$

deci:

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} ds = 0$$

expresie care defineşte, prin urmare, geodezicele spaţiului R_n (traiectoriile mişcării libere, spontane). Putem enunţa aşadar, următoarea *teoremă*: problema determinării traiectoriei unui sistem olonom-scleronom, corespunzătoare unei valori determinate a energiei cinetice, este echivalentă cu problema determinării geodezicelor spaţiului R_n. Putem extinde această teoremă şi la un spaţiu foarte particular R_n' definit prin metrica:

$$d\sigma = \sqrt{2\,(E - U)}\, ds, \tag{4.11}$$

unde U este diferit de zero. În adevăr, avînd în vedere (4.11) prima relaţie (4.9) devine ecuaţia de definiţie a geodezicelor spaţiului R_n':

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} d\sigma = 0, \tag{4.12}$$

unde P_1 şi P_0 sînt două puncte oarecare din acest spaţiu R_n' care nu diferă de R_n decît prin metrică. Pe geodezicele (4.12) însă, mişcarea punctului figurativ nu se mai efectuează cu viteză constantă, ci cu viteza variabilă:

$$v = \sqrt{2\,(E - U)},$$

energia totală E avînd o valoare constantă.

Observaţie. Aflîndu-ne în cazul sistemelor scleronome care posedă o integrală primă a energiei, ecuaţiile lui E u l e r relative la problema variaţională (4.9) vor deveni $n-1$ ecuaţii L a g r a n g e ale unui sistem cu $n-1$ grade de libertate (una din necunoscute q^1 fiind luată ca variabilă independentă) conform teoremei asupra existenţei integralei prime a energiei.

Traiectoria fiind determinată, problema dinamică se termină prin cuadratura:

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{2\,(E - U)}} + \text{const.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Privind constanta E drept un parametru caracteristic al traiectoriei, toate mișcările reale ale sistemului dinamic se obțin variind acest parametru.

303. **Asupra analogiei între principiul mecanic al lui Maupertuis și principiul optic al lui Fermat.** Un mediu material este caracterizat, din punct de vedere optic, prin *indicele de refracție* care, în mediile *omogene* și *isotrope* este constant, pentru mediile eterogene și izotrope este o funcție de poziție, iar pentru mediile anizotrope este funcție și de direcție, în fiecare punct.

Pentru mediile optice *izotrope* neomogene, viteza u de propagare a unei unde luminoase este legată de indicele de refracție $n(x, y, z)$ funcție de poziție, diferită de zero, prin relația:

$$u(x, y, z) = \frac{c}{n(x, y, z)} \tag{4.13}$$

unde c este viteza de propagare a luminii în vid.

Într-un mediu optic izotrop, elementul de drum optic dS este definit prin:

$$dS = n(x, y, z)\, ds. \tag{4.14}$$

Legile Opticii geometrice se obțin din principiul lui Fermat: *dintre toate drumurile ce unesc două puncte, lumina alege drumul optic cel mai scurt.* Vom avea deci:

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} dS = \delta \int_{P_0}^{P_1} n(x, y, z)\, ds = 0, \tag{4.15}$$

însemnînd cu ds elementul de arc geometric pe o traiectorie (extremală) care trece prin punctele fixe P_0 și P_1.

Analogia formală dintre acest principiu și principiul mecanic al lui Maupertuis a făcut să se urmărească multă vreme identificarea acestor două principii, sperînd ca prin aceasta să se ajungă la identificarea Mecanicii și Opticii geometrice. Însuși Maupertuis își propusese tocmai această problemă: să caute un principiu mecanic, similar principiului lui Fermat[1]) în sensul asimilării problemei mecanice de propagare a unei particule materiale, cu propagarea unui corpuscul luminos (Teoria *corpusculară* a luminii).

Formal, asimilarea celor două principii este ușor de evidențiat. În adevăr, concepute ambele ca o problemă de găsire a geodezicelor unui spațiu riemannian, principiul lui Maupertuis poate fi exprimat în spațiul geometric R_n cu metrica ds, pe cînd principiul lui Fermat trebuie formulat în spațiul optic R_n' cu metrica $dS = n(q^1, \ldots, q^n)\, ds$. Totuși, *identificarea* acestor două principii, încercată mai ales de Hamilton, nu a reușit decît în anul 1924 lui Louis de Broglie, prin crearea conceptului fundamental al *Mecanicii ondulatorii*.

Observăm că substituind în (4.15) pe $n(x, y, z)$ din (4.13) și avînd în vedere că c este o constantă, principiul lui Fermat se scrie:

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} \frac{ds}{u(q)} = 0, \tag{4.16}$$

[1]) Mém. de l'Acad. 1744.

$u(q^1, q^2, \ldots, q^n)$ fiind viteza luminii, exprimată ca funcție de coordonatele generalizate. Scris sub forma (4.16) și comparat cu principiul lui M a u p e r t u i s scris sub forma (4.10) sau (4.9):

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} v\, ds = 0,$$

vedem că aceste două principii nu pot fi identificate atîta vreme cît noțiunea de viteză a unui corpuscul material se confundă cu noțiunea de viteză de „fază" a unei unde luminoase.

Această observație a determinat pe L o u i s d e B r o g l i e să formuleze ipoteza, după care, *orice corpuscul material este întovărășit, în mișcarea lui, de o undă-pilot*, care-i ia înainte. Această undă a materiei posedă o viteză de fază u, care intră în expresia (4.16) a lui F e r m a t. Cum viteza de fază nu este o mărime energetică, ci exprimă numai o proprietate geometrică, rezultă că principiul lui F e r m a t nu va putea reda, în forma lui clasică, o proprietate energeto-mecanică a luminii. Pentru a obține un principiu energetic este necesar să înlocuim în (4.16) viteza de fază $u(q)$ prin *viteza de grup* $v(q)$, care are, pentru grupul de unde luminoase, un sens fizic determinat, anume, ea exprimă viteza de propagare a maximului de amplitudine, așadar, a energiei.

L o u i s d e B r o g l i e postulează condiția: pentru undele de materie asociate tuturor particulelor materiale în mișcare, este satisfăcută relația următoare, între viteza de fază $u(q)$ și viteza de grup $v(q)$:

$$uv = \text{const.} \tag{4.17}$$

În virtutea postulatului precedent, principiul optic (4.16) se transformă în:

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} v(q)\, ds = 0 \tag{4.18}$$

identificîndu-se cu principiul mecanic al lui M a u p e r t u i s. În adevăr, după L o u i s d e B r o g l i e viteza de grup v a undei-pilot, care figurează în (4.18), este însăși viteza de propagare a corpusculului material asociat, în spațiul figurativ R_n.

Observație. *Staționaritate sau minim efectiv?* În formularea principiului celei mai *mici* acțiuni ca și în principiul lui F e r m a t se vorbește de un *minim* al unei acțiuni, ori al drumului optic, ori al timpului, — cînd, de fapt, problema variațională din care decurg aceste principii dă indicații numai asupra existenței unor valori *extreme* pe curba extremală, așadar, minim *sau* maxim. În fond, pe o curbă extremală, condițiile de minim și maxim sînt satisfăcute împreună. De exemplu, cercul mare al unei suprafețe sferice (considerată ca un spațiu riemannian) este o geodezică. Între două puncte A și B de pe acest cerc putem merge sau direct $A \to B$ sau trecînd prin A' opusul lui A în raport cu centrul, pe suprafața sferei. De asemenea, într-un mediu optic, pentru a parcurge distanța AB putem merge sau direct (pe drumul cel mai scurt) sau putem trece prin A' imaginea lui A față de sistemul optic considerat.

Capitolul V

PRINCIPIILE DIFERENȚIALE

Concomitent cu evoluția principiilor integrale, s-au formulat în Mecanică și Fizică așa-numitele *principii diferențiale*. Ele servesc tot la determinarea orbitelor reale ale sistemelor dinamice, dar nu implică supunerea sistemului dinamic la variații globale, în tot timpul cît durează mișcarea.

În deosebi, cînd legăturile sistemului dinamic sînt neolonome și neliniare, principiile integrale, bazate pe deplasarea virtuală globală, nu mai pot fi întrebuințate la determinarea ecuațiilor de mișcare. O metodă convenabilă, în acest scop, este oferită de principiile diferențiale.

304. **Principiul celei mai mici constrîngeri** (C.F. Gauss). Fie un sistem dinamic olonom sau neolonom. Fie, în momentul t, coordonatele $\bar{r}_i\ (x_i, y_i, z_i)$ ale unui punct m_i solicitat de forța rezultantă $\bar{F}_i$ în spațiul euclidian E_3. Gauss pornește de la constatarea că, pentru un sistem de N puncte materiale libere, în mișcare, expresia:

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\ddot{\bar{r}}_i - \frac{1}{m_i}\bar{F}_i \right)^2 \tag{5.1}$$

este nulă, în virtutea ecuațiilor de mișcare newtoniene.

Să presupunem sistemul dinamic supus la legături olonome sau neolonome. Atunci Z nu va mai fi nulă, ci va exprima valoarea pozitivă a „constrîngerii" sistemului, prin legăturile impuse, mărime care depinde de traiectoria corespunzătoare.

Gauss enunță principiul astfel: „mișcarea unui sistem de puncte materiale legate între ele într-un mod oarecare și supuse la influențe oarecari se face, în fiecare moment, în cel mai perfect acord posibil cu mișcarea pe care ar avea-o aceste puncte materiale dacă ar deveni libere, adică supuse la cea mai mică constrîngere posibilă, luînd ca măsură a constrîngerii suferite într-un element de timp infinitesimal suma produselor masei fiecărui punct prin pătratul cantității cu care se abate de la poziția pe care ar avea-o dacă ar fi liber".

Analitic, *principiul lui* Gauss se enunță astfel: *constrîngerea Z are o valoare minimă pentru traiectoria reală a sistemului, dacă legăturile nu produc lucru mecanic.*

Identitatea dintre aceste două enunțuri este ușor de stabilit. În adevăr, fie $M\ (\bar{r})$ poziția mobilului în momentul t (pentru simplificarea scrisului am suprimat indicii). În momentul $t + \delta t$ mobilul va ocupa punctul M' al cărui vector de poziție este:

$$\bar{r} + \dot{\bar{r}}\,\delta t + \frac{1}{2}\ddot{\bar{r}}(\delta t)^2 + \text{termeni de ordin superior.}$$

Dacă în momentul t punctul ar fi fost liber, el s-ar fi mișcat după ecuația newtoniană, astfel încît în momentul $t + \delta t$ ar fi ocupat poziția M'', dată de următorul vector de poziție:

$$\bar{r} + \dot{\bar{r}}\,\delta t + \frac{1}{2}\frac{\bar{F}}{m}(\delta t)^2 + \text{termeni de ordin superior.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Abaterea $\overline{M'M''}$ prevăzută de enunțul lui Gauss va fi deci (păstrînd termenii pînă la $(\delta t)^2$ inclusiv):

$$\overline{M'M''} = \frac{1}{2}\left(\ddot{\bar{r}} - \frac{\bar{F}}{m}\right)(\delta t)^2 ,$$

al cărei pătrat este Z (pînă la factorul $\frac{1}{2}(\delta t)^4$).

În consecință, principiul lui Gauss cere ca să avem:

$$\delta Z = \delta \sum_i m_i \left(\ddot{\bar{r}}_i - \frac{1}{m_i}\bar{F}_i\right) \delta \ddot{\bar{r}}_i = 0 , \qquad (5.2)$$

pentru traiectoria reală a sistemului, aplicînd variația δ numai *accelerațiilor* compatibile cu legăturile (1.10) § 276, olonome sau neolonome:

$$\bar{A}_{ki}\, d\bar{r}_i + D_k\, dt = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots \nu) \qquad (5.3)$$

coeficienții fiind funcții date de timp și coordonate.

Pentru a introduce în calcule relația de condiție (5.3), să o derivăm în raport cu timpul după divizare prin dt; obținem:

$$\bar{A}_{ki}\, \ddot{\bar{r}}_i + \bar{A}'_{ki}\, \dot{\bar{r}}_k \dot{\bar{r}}_i + \frac{\partial \bar{A}_{ki}}{\partial t}\dot{\bar{r}}_i + \frac{dD_k}{dt} = 0 ,$$

relație echivalentă cu (5.3). Să-i aplicăm variația virtuală δ; avem:

$$\bar{A}_{ki}\, \delta \ddot{\bar{r}}_i = 0 \qquad (5.4)$$

ceilalți termeni dispărînd, fiindcă $\delta \bar{r}_i = 0$; $\delta \dot{\bar{r}}_i = 0$; $\delta t = 0$.

Din (5.2) și (5.4), folosind metoda multiplicatorilor lui Lagrange, deducem următoarele ecuații pentru mișcarea sistemului de N puncte materiale supuse la legături:

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i + \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k \bar{A}_{ki} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots N) \qquad (5.5)$$

deci $3N$ ecuații, care împreună cu cele ν ecuații de legătură (5.3) determină complet mișcarea, anume $3N$ coordonate (x_i, y_i, z_i) și ν parametri λ_k.

Este de observat că principiul (5.2) cu condițiile restrictive (5.4) ne spune cel mult că funcția Z prezintă un extremum de-a lungul traiectoriei. Principiul lui Gauss cere ca Z să fie *minimă*. Fie, în adevăr, o poziție variată de la traiectoria reală: $\Delta \bar{r}_i = \bar{R}_i - \bar{r}_i$. Avem:

$$\sum_i m_i \left(\ddot{\bar{R}}_i - \frac{\bar{F}_i}{m_i}\right)^2 = \sum_i m_i \left(\ddot{\bar{r}}_i + \Delta \ddot{\bar{r}}_i - \frac{\bar{F}_i}{m_i}\right)^2 = \sum_i m_i \left[\left(\ddot{\bar{r}}_i - \frac{\bar{F}_i}{m_i}\right) + \Delta \ddot{\bar{r}}_i\right]^2$$

căci $\sum_i m_i \left(\ddot{\bar{r}}_i - \frac{\bar{F}_i}{m_i}\right) \Delta \ddot{\bar{r}}_i \equiv 0$, pentru traiectoria reală, conform relației (5.2).

Rezultă:

$$\sum_i m_i \left(\ddot{\bar{R}}_i - \frac{\bar{F}_i}{m_i}\right)^2 = \sum_i m_i \left(\ddot{\bar{r}}_i - \frac{\bar{F}_i}{m_i}\right)^2 + \sum_i m_i (\ddot{\bar{R}}_i - \ddot{\bar{r}}_i)^2 > Z,$$

ceea ce justifică afirmația de existență a minimului efectiv.

Scanned with OKEN Scanner

H. Hertz consideră cazul cînd forțele exterioare au o rezultantă nulă. Sistemul dinamic rămîne supus numai legăturilor, executînd o mișcare spontană. Expresia lui Z devine:

$$Z_0 = \sum_i m_i \ddot{r}_i^2 . \tag{5.6}$$

Dar, după relațiile de la § 27 din Anexa I, rezultă succesiv

$$\dot{r} = \frac{dr}{ds}\dot{s} \; ; \quad \ddot{r} = \frac{d^2 r}{ds^2}\dot{s}^2 + \frac{dr}{ds}\ddot{s} .$$

Ridicăm la pătrat și observăm că $(dr)^2 = (ds)^2$; introducem curbura $1/\rho$ din prima relație Frenet; deducem astfel pentru (4.6) expresia:

$$Z_0 = \frac{1}{\rho^2}\dot{s}^4 + \ddot{s}^2 . \tag{5.7}$$

Condiția ca Z_0 să fie minim este ca fiecare din cei doi termeni, care sînt pătrate perfecte, să fie separat minimi. Minimul termenului al doilea din (5.7) este evident $\ddot{s} = 0$; ceea ce înseamnă că mișcarea este uniformă cu viteza constantă $\dot{s} = \text{const}$. Dar, în această condiție, minimul primului termen din (5.7) cere ca $\frac{1}{\rho}$ să fie minim: așadar, curbura traiectoriei reale trebuie să fie minimă. În aceste condiții, principiul lui Gauss se poate exprima sub forma, numită de Hertz, *principiul celei mai mici curburi*: „pentru un sistem material în mișcare spontană, supus la legături scleronome, fără frecare, mișcarea naturală se efectuează, pornind de la o mișcare inițială dată, cu viteză constantă, astfel încît curbura traiectoriei naturale prezintă un minim prin comparație cu oricare traiectorie compatibilă cu legăturile".

R. Lipschitz a dovedit că se poate exprima curbura traiectoriei posibile a unui sistem dinamic cu n grade de libertate, cu ajutorul coordonatelor generalizate $q^1, q^2, \ldots, q^n$ și al derivatelor lor. În care scop, acest autor, evitînd calcularea directă a expresiei (5.1) care măsoară „constrîngerea" în coordonate generalizate cu ajutorul formulelor de transformare (1.2) de la § 273 se folosește de expresia lui T transformată în R_n [relația (2.13), § 284].

El observă că întrebuințarea expresiei (2.13) § 284 permite, prin transformări potrivite, analoge celor dezvoltate în § 282, ca să se obțină componentele accelerației generalizate sub forma (2.5) § 282.

În aceste condiții, se poate verifica imediat că expresiile componentelor lui: $\bar{F}_i - m_i \ddot{r}_i$, se transformă în:

$$Q_r - a_r = Q_r - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^r}\right], \tag{5.8}$$

și anume, contragredient față de diferențialele coordonatelor generalizate, așadar, ca niște componente covariante. Pentru a obține o expresie scalară care să reproducă mărimea „constrîngerii" va trebui să înmulțim expresiile (5.8) cu cîtimile contravariante g^{rs} (Anexa III, § 58). Se obține expresia constrîngerii în coordonate generalizate:

$$Z_g = \sum_{r,s=1}^{n} g^{rs}\,(Q_r - a_r)\,(Q_s - a_s), \tag{5.9}$$

care este o funcție de $q^1, q^2, \ldots, q^n$ pentru un moment dat și pentru un sistem de valori date coordonatelor $q^1, \ldots, q^n$ și vitezelor $\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n$.

Principiul lui Gauss cere ca să avem $\delta Z_g = 0$ pentru traiectoria sistemului dinamic. Din (5.9) deducem:

$$\frac{\partial Z_g}{\partial \ddot{q}^k} = g^{rs}(Q_r - a_r)\frac{\partial}{\partial \ddot{q}^k}(Q_s - a_s).$$

Dar:

$$\frac{\partial}{\partial \ddot{q}^k}(Q_r - a_r) = -\frac{\partial}{\partial \ddot{q}^k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^s}\right)\right] = -g_{ks}.$$

Rezultă:

$$\frac{\partial Z_g}{\partial \ddot{q}^k} = g^{rs} g_{ks}\ (a_r - Q_r) = a_k - Q_k.$$

Așadar:

$$\delta Z_g = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^k} - Q_k\right]\delta \ddot{q}^k, \tag{5.10}$$

care este echivalentul ecuației cartesiene (5.2) din spațiul euclidian E_3. Variațiile virtuale ale accelerației fiind arbitrare, se deduce, din (5.10), ecuația de mișcare.

În mod analog se tratează cazul legăturilor neolonome, unde în loc de expresiile $a_r - Q_r$ se iau expresiile:

$$a_r - Q_r - \Sigma\lambda_s A_{sr}$$

în care A_{sr} sînt coeficienții formelor Pfaff care exprimă legăturile neolonome și λ_s coeficienții nedeterminați ai lui Lagrange.

305. **Principiul lui d'Alembert.** Lucrul mecanic virtual al forțelor aplicate și al forțelor de inerție, pentru orice deplasare virtuală, compatibilă cu legăturile, este nul.

Avem:

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\bar{r}}_i + \bar{F}_i)\,\delta\bar{r}_i = 0. \tag{5.11}$$

Unei deplasări virtuale $\delta\bar{r}_i$ în spațiul euclidian E_3, îi corespunde, în spațiul figurativ $n = 3N$, o deplasare virtuală $(\delta q^1, \delta q^2, \ldots, \delta q^n)$, astfel încît:

$$\delta\bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^k}\delta q^k$$

Din (5.11) rezultă:

$$(-m_i\ddot{\bar{r}}_i + \bar{F}_i)\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^k}\delta q^k = 0. \tag{5.12}$$

Deplasarea δq^k trebuie să fie compatibilă cu legăturile, olonome sau nu:

$$a_{sk}\,\delta q^k = 0. \qquad (s = 1, 2, \ldots\ m < n) \tag{5.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Avînd în vedere relaţiile (2.5) şi (2.7) § 282, putem scrie, pentru (5.12):

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^k} - Q_k\right]\delta q^k = 0, \tag{5.14}$$

însemnînd cu T energia cinetică a sistemului şi cu Q_k componentele forţei generalizate variaţiile δq^k nefiind independente.

Relaţiile (5.13) şi (5.14) se scriu, aplicînd multiplicatorii lui L a g r a n g e:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^k} - Q_k - \lambda_s a_{sk}\right]\delta q^k = 0, \tag{5.15}$$

oricare ar fi deplasarea δq^k. În aceste condiţii, din (5.15) rezultă:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^k} - Q_k - \lambda_s a_{sk} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{5.16}$$

care sînt ecuaţiile mişcării. Ecuaţiile (5.16) împreună cu cele m ecuaţii de mobilitate (5.14) determină necunoscutele q şi parametrii λ. Ele exprimă forma lagrangeiană a ecuaţiilor (5.5).

Relaţia (5.15) constituie formularea principiului lui d'A l e m b e r t, generalizat în spaţiul figurativ R_n.

Scanned with OKEN Scanner

Partea a treia

SISTEME NEOLONOME

Capitolul VI

CARACTERIZARE CINETICĂ

306. **Caracterele sistemelor neolonome.** Dacă relaţiile de mobilitate (§ 276):

$$a_{ks}(q^1, q^2, \ldots, q^n ; t)\, dq^s + b_k(q;t)\, dt = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots m) \qquad (6.1)$$

nu posedă o combinaţie integrabilă, legăturile sînt neolonome, iar sistemul dinamic este un sistem neolonom. Numărul coordonatelor independente $(q^1, \ldots, q^n)$ care determină configuraţia sistemului dinamic este mai mare decît gradul de libertate $n - m$ al sistemului. Avem, aşadar, o supraabundenţă de coordonate faţă de gradul de libertate. Nu vom putea atunci rezolva problema dinamică scriind ecuaţiile lui Lagrange pentru „numărul minim" de parametri q^r. Sîntem nevoiţi să introducem, în locul coordonatelor „veritabile" (numite astfel în înţelesul că ar putea să fie identificate unor coordonate euclidiene, esenţiale) un alt şir de mărimi $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$, legate de primele prin relaţiile:

$$\omega^k = \alpha_{ks}\dot{q}^s + \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \qquad (6.2)$$

unde α_{ks} sînt funcţii continue şi derivabile de q^r şi t, avînd determinantul diferit de zero:

$$|\alpha_{ks}| \neq 0 .$$

Cîtimile ω^k, funcţii liniare de vitezele generalizate, poartă numele de *caracteristice cinetice.*

Să asociem mărimilor (6.2) alte n mărimi, definite prin relaţiile:

$$d\pi^k = \omega^k dt = \alpha_{ks}\, dq^s + \alpha_k dt , \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \qquad (6.3)$$

pe care să le numim *cuasicoordonate* (căci pentru $\omega^k = \dot{q}^k$, rezultă $\pi^k = q^k$). Ele sînt funcţii liniare de diferenţialele coordonatelor lagrangeiene.

Cum determinantul cîtimilor α este diferit de zero, putem rezolva ecuaţiile (6.3) şi obţine:

$$dq^k = \beta_{ks}\, d\pi^s + \beta_k\, dt . \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \qquad (6.4)$$

Avantajul introducerii caracteristicilor cinetice, respectiv cuasicoordonatelor, constă în posibilitatea alegerii unui număr de m cîtimi ω, din cele n,

Scanned with OKEN Scanner

pe care să le identificăm cu membrul întîi al relațiilor de mobilitate (6.1):

$$\omega^r = a_{rs}\,\dot{q}^s + b_r\,, \qquad (r = 1, 2,\ldots\ m) \quad (6.5)$$

unde a_{rs} și b_r sînt funcțiile continue și derivabile în raport cu q^s și t, care figurează în expresiile (6.1). Prin aceasta, ecuațiile de mobilitate (6.1) se scriu în forma simplă:

$$\omega^r = 0\,. \qquad (r = 1, 2,\ldots\ m) \quad (6.1')$$

Atît expresiile (6.3) cît și relațiile (6.1) sînt cunoscute în Analiza matematică sub numele de *forme ale lui* P f a f f.

Am întîlnit și vom mai întîlni expresii de aceeași formă în dezvoltarea analitică a sistemelor dinamice. De aceea redăm, în paragraful următor, cîteva din proprietățile pfaffienilor, necesare în Mecanica analitică.

307. **Proprietăți ale formelor Pfaff.** Să considerăm un spațiu R_n, cu n dimensiuni, în care poziția unui punct figurativ este dată de n coordonate $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$. Fie o formă diferențială:

$$\theta\,(d) = \sum_{i=1}^{n} X_i\,(x_1\,, x_2,\ldots,\ x_n)\ dx_i\,, \qquad (6.6)$$

unde X_i sînt n funcții regulate de variabile, în R_n sau un domeniu din R_n. Dacă există nm funcții $X_{ki}\ (x_1,\ldots,\ x_n)$ putem forma m relații diferențiale:

$$\theta_k = \sum_i X_{ki}\ dx_i\,. \qquad (k = 1,\ 2,\ldots m) \quad (6.6')$$

În cazul cînd există o funcție $f(x_1,\ldots,\ x_n)$ care satisface la condiția:

$$\theta = df$$

atunci:

$$X_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Rezultă că vor fi satisfăcute următoarele $\frac{1}{2}\ n\ (n-1)$ relații:

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \qquad (i, j = 1,\ 2,\ldots n)$$

În acest caz, forma (6.6) este o diferențială totală exactă.

De asemenea, dacă există m funcții f_k astfel încît:

$$\theta_k = df_k\,,$$

sistemul (6.6′) este un sistem de ecuații cu diferențiale totale exacte.

În cazul cînd expresiile diferențiale (6.6) sau sistemele (6.6′) nu satisfac relațiile de condiție spre a fi diferențiale totale exacte, expresiile (6.6), respectiv sistemele (6.6′), se numesc *forme*, respectiv, *sisteme ale lui* P f a f f, după numele matematicianului J. F. P f a f f care a studiat aceste expresii pentru prima oară (1815).

Scanned with OKEN Scanner

a) *Covariantul biliniar.* Pe lîngă forma (6.6) să considerăm expresia corespunzătoare unei variații δ, independentă de variația infinitezimală d:

$$\Theta(\delta) = \sum_{i,j=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots x_n)\, \delta x_i. \tag{6.7}$$

Avînd în vedere relația de permutabilitate (§ 278), se verifică ușor că putem scrie:

$$\Theta = \delta\theta(d) - d\theta(\delta) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) dx_i\, \delta x_j \tag{6.8}$$

expresie ce poartă numele de *covariant biliniar* al formei (6.8). Numele de „covariant" se datorește proprietății lui Θ de a fi independent de variabilele alese și fiindcă:

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = T_{ij} \tag{6.9}$$

formează componentele unui tensor de rangul al doilea, antisimetric. În adevăr, dx_i și δx_j sînt componente de vectori contravarianți, iar Θ un invariant. Caracterul de invarianță se verifică ușor dacă efectuăm o schimbare de variabile:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (y_1, y_2, \ldots, y_n);$$

care să aducă forma (6.6) în forma:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_i \tag{6.10}$$

Fie:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y_j} - \frac{\partial Y_j}{\partial y_i} = T'_{ij}. \tag{6.9'}$$

Cum Θ este un invariant, urmează că:

$$\Theta = T_{ij}\, dx_i\, \delta x_j = T'_{ij}\, dy_i\, \delta y_j.$$

b) *Observații.* 1. Se verifică, fără dificultate, că două forme P f a f f care diferă prin diferențiala totală a unei funcții uniforme oarecare, de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, posedînd derivate de ordinul întîi și al doilea, au același covariant biliniar.

2. Dacă toți T_{kr} sînt nuli, prin urmare dacă și covariantul biliniar este identic nul, forma este o diferențială totală exactă.

3. Teorema lui F r o b e n i u s. Condiția necesară și suficientă ca un sistem P f a f f:

$$\theta = X_{ij}\, dx_j \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

să fie *complet integrabil* este ca derivatele primilor membri să se anuleze, ținînd seamă de ecuațiile sistemului. Prin definiție, un sistem P f a f f este „complet integrabil" dacă se poate pune sub forma:

$$dy_1 = 0;\ dy_2 = 0;\ \ldots;\ dy_n = 0.$$

O formă P f a f f este integrabilă dacă se anulează covariantul biliniar.

Scanned with OKEN Scanner

c) *Sistemul asociat formei* θ. Dacă variația δx este complet arbitrară, ceea ce admitem, atunci, condiția necesară și suficientă ca Θ (covariantul biliniar al formei θ) să fie nul, este ca pfaffianul asociat să se anuleze:

$$T_{ij}\,dx_i = \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) dx_i = 0. \quad (i = 1, 2, \ldots n) \quad (6.11)$$

Avem un sistem de n ecuații diferențiale, anume n forme P f a f f legate de forma inițială. De aceea (6.11) se numește *sistem asociat*. Ecuațiile (6.11) formează un sistem compatibil dacă n este fără soț. Tensorul T_{hr} fiind antisimetric, determinantul cantităților T_{hr} este strîmb-simetric. Pentru problemele puse de Mecanică este interesant să luăm pentru n un număr *fără soț*. Atunci, determinantul coeficienților ecuațiilor (6.11) fiind nul, sistemul (6.11) va fi compatibil.

Este evident că sistemul asociat formei (6.6) este echivalent cu sistemul:

$$T_{ij}\,dy_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

asociat formei (6.9).

Aceste sisteme asociate joacă un rol însemnat în teoria analitică a sistemelor Dinamicii puse sub forma liniară.

Să reluăm analiza sistemelor neolome și să începem prin a stabili expresia covariantului biliniar al formelor (6.3) care ne va servi la stabilirea ecuațiilor de mișcare pentru sistemele dinamice neolome.

308. **Relațiile de transitivitate.** Relațiile de permutabilitate dintre d și δ (§ 278), care rezultă din definiția unei mișcări posibile, infinitesimal vecină mișcării reale, sînt adevărate numai pentru coordonate „veritabile". Pentru cuasicoordonate, ele se înlocuiesc prin relațiile, numite de K. H e u n, *relații de transitivitate*.

Să aplicăm sistemului dinamic o deplasare virtuală δq^h, pentru care $\delta t = 0$. Din relațiile (6.3) rezultă:

$$\delta\pi^h = \alpha_{hs}\,\delta q^s. \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \quad (6.4')$$

Diferențiind, obținem:

$$d(\delta\pi^h) = \frac{\partial \alpha_{hs}}{\partial q^r}\,dq^r\,\delta q^s + \frac{\partial \alpha_{hs}}{\partial t}\,dt\,\delta q^s + \alpha_{hs}\,d(\delta_q{}^s)$$

Pe de altă parte, aplicînd variația δ ecuațiilor (6.3), avem:

$$\delta(d\pi^h) = \frac{\partial \alpha_{hr}}{\partial q^s}\,\delta q^s\,dq^r + \frac{\partial \alpha_h}{\partial q^s}\,\delta q^s\,dt + \alpha_{hs}\,\delta(dq^s).$$

Scăzînd aceste două relații și observînd ecuațiile de permutabilitate (1.15) § 278, operatorii d și δ fiind independenți, căpătăm:

$$d(\delta\pi^h) - \delta(d\pi^h) = \left(\frac{\partial \alpha_{hs}}{\partial q^r} - \frac{\partial \alpha_{hr}}{\partial q^s}\right) dq^r\,\delta q^s + \left(\frac{\partial \alpha_{hs}}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_h}{\partial q^s}\right)\delta q^s\,dt.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să facem substituţiile (6.4) şi (6.4′) şi notaţiile:

$$\gamma_{ij}^{h} = \sum_{r,\,s} \left(\frac{\partial \alpha_{hs}}{\partial q^{r}} - \frac{\partial \alpha_{hr}}{\partial q^{s}} \right) \beta_{ri}\, \beta_{sf}\,; \tag{6.12}$$

$$\gamma_{j}^{h} = \sum \left(\frac{\partial \alpha_{hs}}{\partial q^{r}} - \frac{\partial \alpha_{hr}}{\partial q^{s}} \right) \beta_{ri}\, \beta_{sj} + \sum_{s} \left(\frac{\partial \alpha_{hs}}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_{h}}{\partial q} \right) \beta_{sj}\,.$$

Vom obţine:

$$d\,(\delta\pi^{h}) - \delta\,(d\pi^{h}) = \gamma_{sr}^{h}\, d\pi^{r}\, \delta\pi^{s} + \gamma_{s}^{h}\, \delta\pi^{s}\, dt\,, \tag{6.13}$$

expresii numite, de H e u n, *relaţii de transitivitate*.

Mărimile γ sînt definite prin relaţiile (6.12) ca funcţii de $q^1, q^2, \ldots, q^n$ şi de t prin intermediul cîtimilor date α_{hs} şi al derivatelor lor.

Este clar că relaţiile:

$$\gamma_{sr}^{h} = -\,\gamma_{rs}^{h}\,;\ \gamma_{rr}^{h} = 0,$$

sînt satisfăcute.

Capitolul VII

ECUAŢIILE DE MIŞCARE

309. **Metoda reducerii la sistem olonom** (E d. R o u t h). Ecuaţiile lui L a g r a n g e, în forma pe care o au pentru sistemele olonome, nu mai pot folosi, direct, în problema dinamică posedînd legături neolonome, din cauza supraabundenţei de coordonate $q^1, q^2, \ldots, q^n$. În adevăr, dacă există m relaţii de legătură, numărul gradelor de libertate este $n-m$. Prin urmare, avem prea multe ecuaţii, fiindcă avem prea multe coordonate, spre deosebire de cazul sistemelor olonome, unde numărul coordonatelor independente este egal cu numărul gradelor de libertate.

Pentru a obţine un sistem de ecuaţii L a g r a n g e, convenabil, se caută a se reduce sistemul neolonom la un sistem olonom, considerînd că legăturile pot să fie obţinute prin aplicarea unor forţe suplimentare, cu condiţia de a nu produce lucru mecanic, şi care să imprime sistemului dinamic restricţia de a satisface ecuaţiile de legătură.

Fie $Q_r' = Q_r'\,(q^1, q^2, \ldots, q^n;\ t)$ componentele acestor forţe suplimentare.

Trebuie să fie satisfăcută relaţia:

$$Q_r'\, dq^r = 0 \tag{7.1}$$

pentru toţi dq^r care satisfac relaţiilor de neolonomie:

$$a_{hr}\, dq^r = 0 \tag{7.2}$$

în fiecare moment $dt = 0$. Punînd:

$$\frac{dq^1}{\lambda_1} = \frac{dq^2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{dq^m}{\lambda_m}\,,$$

Scanned with OKEN Scanner

ecuațiile (7.1) și (7.2) sînt satisfăcute simultan pentru:

$$Q'_r = \sum_{s=1}^{m} \lambda_s a_{rs}$$

λ_s fiind m necunoscute noi.

Considerăm pe Q'_r ca și pe Q_r drept forță aplicată. Ecuațiile lui Lagrange pot fi scrise sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^r} = Q_r + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s a_{rs}, \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

care, împreună cu relațiile de neolonomie:

$$a_{hs}\dot{q}_s + b_h = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

determină cele $n + m$ necunoscute $q_1, q_2, \ldots, q_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Regăsim, prin această metodă, o supraabundență de ecuații, căci m din cele n coordonate q nu sînt independente. Din această cauză metoda de mai sus nu este satisfăcătoare. De altfel, ea este identică metodei multiplicatorilor nedeterminați ai lui Lagrange, metodă care în cazul sistemelor olonome, este foarte utilă. Observăm că funcțiile care, figurează în (7.2) sînt exprimate în coordonatele q, ceea ce nu permite eliminarea coordonatelor supraabundente. Pentru a reuși să facem acest lucru și pentru a înlătura multiplicatorii lui Lagrange din ecuațiile mișcării, este nevoie să introducem cuasicoordonatele. În adevăr, prin aceasta, ne va fi posibil să eliminăm dintre coordonate pe cele supraabundente.

310. **Ecuațiile lui Lagrange în cuasicoordonate** (G. Hamel). Fie cuasicoordonatele introduse la § 306, prin relațiile:

$$\omega^h = \alpha_{hs}\dot{q}^s + \alpha_h, \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \quad (7.3)$$

din care însă m caracteristici cinetice să reprezinte relațiile de neolonomie (6.11) § 306, sub forma:

$$\omega^{n-m+1} = 0; \omega^{n-m+2} = 0; \cdots; \omega^n = 0.$$

Aplicăm sistemului dinamic o deplasare virtuală δq^s compatibilă cu legăturile (7.4). Avînd în vedere că, pentru o variație virtuală $\delta t = 0$, relațiile (6.3) § 306, devin după (7.4):

$$\delta\pi^h = \alpha_{hs}\,\delta q^s \qquad (k = 1, 2, \ldots n - m) \quad (7{\cdot}4)$$

$$0 = \alpha_{n-m+r,s}\,\delta q^s. \qquad (r = 1, 2, \ldots m) \quad (7.5)$$

Rezolvînd sistemul (7.5), cum determinantul cîtimilor α este diferit de zero, obținem:

$$\delta q^h = \beta_{hs}\delta\pi^s \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \quad (7.6)$$

observînd că numai $n-m$ cîtimi $\delta\pi$ sînt arbitrare.

Să considerăm expresia energiei cinetice în care am înlocuit vitezele $\dot{q}$ din relațiile (6.4) § 306. Ea devine o funcție de gradul al doilea

Scanned with OKEN Scanner

în ω, de forma următoare (admiţînd, pentru generalitate, că T conţine explicit timpul):

$$T = \omega_0(q, t) + \sum_{h=1}^{n} T_h(q, t)\,\omega^h + \frac{1}{2}\sum_{s,h=1}^{n} T_{s,h}(q, t)\,\omega^s\omega^h. \tag{7.7}$$

Avem, evident:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h} = \frac{\partial T}{\partial \omega^s}\frac{\partial \omega^s}{\partial \dot{l}^h} = \frac{\partial T}{\partial \omega^s}\alpha_{hs} \tag{7.8}$$

şi, avînd în vedere relaţiile fundamentale (7.5) (numai primii $n-m$ din $\delta\pi^s$ sînt diferiţi de zero):

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{l}^h}\delta q^h = \frac{\partial T}{\partial \omega^s}(\alpha_{hs}\delta q^h) = \sum_{s=1}^{n-m}\frac{\partial T}{\partial \omega^s}\delta\pi^s$$

sau încă:

$$\delta J = p_h\delta q^h = P_s\delta\pi^s$$

dacă extindem denumirea de *impuls*, în cuasicoordonate, expresiei:

$$P_s = \frac{\partial T}{\partial \omega^s},$$

pe care o numim *cuasiimpuls*. Să exprimăm lucrul mecanic virtual în noile coordonate. Vom avea:

$$-\sum_{h=1}^{n} Q_h\delta q^h = -\beta_{hs}Q_h\delta\pi^s = -\sum_{s=1}^{n-m} K_s\delta\pi^s \tag{7.9}$$

punînd:

$$K_s = \beta_{hs}Q_h,$$

şi considerînd aceste cîtimi drept componentele vectorului forţă.

Pe de altă parte, avem evident din (7.7):

$$-\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_h}\delta q^h = -\left(\frac{\partial T}{\partial l^h} + \frac{\partial T}{\partial \omega^s}\frac{\partial \omega^s}{\partial l^h}\right)\delta q^h = -\frac{\partial T}{\partial \pi^s}\delta\pi^s - \frac{\partial T}{\partial \omega^s}\frac{\partial \omega^s}{\partial q^h}\delta q^h \tag{7.10}$$

unde am scris simbolic:

$$\frac{\partial T}{\partial \pi^s} = \frac{\partial T}{\partial q^h}\beta_{hs}.$$

Derivînd în raport cu timpul relaţia (7.8), înmulţind cu δq^h şi sumînd pe k de la 1 la n, avem succesiv:

$$\delta q^h\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h}\right) = \delta\pi^s\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega^s}\right) + \frac{\partial T}{\partial \omega^s}\left[\frac{d}{dt}(\delta\pi^s) - \frac{\partial \omega^s}{\partial \dot{l}^h}\delta\dot{q}^h\right]. \tag{7.11}$$

Pentru a forma ecuaţia (5.15) § 305, care exprimă principiul lui d' A l e m b e r t, trebuie să adunăm (7.11) cu (7.10) şi (7.9). Observăm, în pre-

Scanned with OKEN Scanner

alabil, că ultimul temen din (7.10) și cu ultimul termen din (7.11) adunați, dau:

$$-\frac{\partial T}{\partial \omega^s}\left(\frac{\partial \omega^s}{\partial q^h}\delta q^h+\frac{\partial \omega^s}{\partial \dot{q}^h}\delta \dot{q}^h\right)=-\frac{\partial T}{\partial \omega^s}\delta\omega^s=-\frac{\partial T}{\partial \omega^s}\delta\left(\frac{d\pi^s}{dt}\right).$$

Adunînd, așadar, (7.11), (7.10) și cu (7.9) obținem, pentru ecuația care exprimă principiul lui d'A l e m b e r t în cuasicoordonate:

$$\sum_{s=1}^{n-m}\left\{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega^s}\right)-\frac{\partial T}{\partial \pi^s}-K_s\right]\delta\pi^s+\frac{\partial T}{\partial \omega^s}\left[\frac{d}{dt}(\delta\pi^s)-\delta\left(\frac{d\pi^s}{dt}\right)\right]\right\}=0.$$

Paranteza a doua se determină cu ajutorul ecuațiilor de transivitate (6.13) § 308. Înlocuind aceste expresii în ecuația precedentă și observînd că toate cele $n-m$ variații $\delta\pi^s$ sînt complet arbitrare, deducem ecuațiile căutate (G. H a m e l):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega^s}\right)+\frac{\partial T}{\partial \omega^r}(\gamma^r\omega^k+\gamma_s^r)-\frac{\partial T}{\partial \pi^s}=K_s, \qquad (s=1,2,\ldots n-m) \quad (7.12)$$

unde mărimile γ au semnificațiile de la (6.12) § 308. Ecuațiile (7.12) formează un sistem de ecuații L a g r a n g e în număr egal cu gradul de libertate, anume $n-m$. Împreună cu cele n ecuații (6.5) avem $2n-m$ ecuații pentru cele $2n-m$ necunoscute $q^1, q^2, \ldots, q^n$ și $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-m}$.

În cazul legăturilor olonome, pfaffienii (6.3) § 306 sînt complet integrabili, iar mărimile (6.12) § 308 sînt nule; ecuațiile (7.12) reiau forma normală a ecuațiilor lui L a g r a n g e, iar cuasicoordonatele devin coordonate „veritabile".

311. **Ecuațiile lui Appell.** P. A p p e l l a scris ecuațiile mișcării unui sistem dinamic sub o formă simplă, convenabilă atît sistemelor olonome cît și sistemelor neolonome.

Fie un sistem dinamic cu n coordonate $q^1, q^2, \ldots, q^n$, supus la m legături (olonome sau neolonome):

$$a_{ks}\dot{q}^s+b_k=0. \qquad (k=1,2,\ldots m) \quad (7.13)$$

P. A p p e l l consideră, în locul energiei cinetice, o expresie formată la fel ca și energia cinetică, însă cu ajutorul accelerațiilor, nu cu vitezele, anume:

$$A=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}m_k\ddot{r}_k^2 \qquad (7.14)$$

pe care o numim *funcția lui Appell* sau, după A. d e S a i n t G e r m a i n, *energia de accelerație*.

Din cele m ecuații (7.13) putem deduce valorile a m viteze $\dot{q}$ în funcție de celelalte $n-m$ care rămîn. Pe acestea, spre distincție, le notăm cu $\dot{\omega}^1, \dot{\omega}^2, \ldots, \dot{\omega}^{n-m}$.

Derivînd în raport cu timpul relațiile (7.13) obținem m relații care vor permite să exprimăm m accelerații $\ddot{q}$ în funcție de q, $\dot{\omega}$, $\ddot{\omega}$.

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind aceste valori în funcţia lui A p p e l l, aceasta va fi exprimată ca funcţie de aceleaşi variabile noi q, $\dot{\omega}$, $\ddot{\omega}$.

Să aplicăm sistemului dinamic o deplasare virtuală $\delta\bar{r}_k$. Îi va corespunde în R_n o deplasare virtuală δq^s, prin relaţiile (1.6) § 275 compatibilă cu legăturile; adică, astfel încît, după (7.13) să avem:

$$a_{ks}\delta q^s = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

Aceste m ecuaţii permit să se poată exprima m dintre δq^s în funcţie de $\delta\omega^s$. În aceste condiţii, variaţia virtuală:

$$\delta\bar{r}_k = \sum_1^n \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q^s}\,\delta q^s$$

se va putea scrie:

$$\delta\bar{r}_k = \sum_{s=1}^{n-m} \pi_s\,\delta\omega^s. \qquad (7.15)$$

Din relaţia precedentă rezultă:

$$\dot{\bar{r}}_k = \bar{\pi}_s\dot{\omega}^s + \bar{r}_k^0;$$

$$\ddot{\bar{r}}_k = \bar{\pi}_s\ddot{\omega}^s + \dot{\bar{\pi}}_s\dot{\omega}^s + \dot{\bar{r}}_k^0.$$

De unde:

$$\frac{\partial\ddot{\bar{r}}_k}{\partial\ddot{\omega}^s} = \bar{\pi}_s = \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial\omega^s} \qquad (7.16)$$

avînd în vedere (7.15).

Făcînd substituţiile indicate în text, putem scrie:

$$m_k\ddot{\bar{r}}_k\,\delta\bar{r}_k = P_s\,\delta\omega^s \qquad (7.17)$$

însemnînd cu:

$$P_s = \sum_1^n m_k\ddot{\bar{r}}_k\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial\omega^s}. \qquad (7.18)$$

Dar după (7.16) relaţia (7.17) devine, avînd în vedere definiţia (7.14):

$$P_s = m_k\ddot{\bar{r}}_k\frac{\partial\ddot{\bar{r}}_k}{\partial\ddot{\omega}^s} = \frac{\partial A}{\partial\ddot{\omega}^s}. \qquad (s = 1, 2, \ldots n-m) \quad (7.19)$$

Să considerăm lucrul mecanic virtual al forţelor exterioare. Vom avea, evident, introducînd noile coordonate:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k\,\delta\bar{r}_k = \sum_{s=1}^{n-m}\Omega_s\,\delta\omega^s. \qquad (7.20)$$

Principiul lui d'A l e m b e r t:

$$\sum_{k=1}^n (m_k\ddot{\bar{r}}_k - \bar{F}_k)\,\delta\bar{r}_k = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

devine, avînd în vedere (7.17) şi (7.20):

$$\sum_{s=1}^{n-m} (P_s - \Omega_s)\, \delta\omega^s = 0$$

unde variaţiile $\delta\omega^s$ sînt complet arbitrare. Deducem ecuaţiile căutate, ale lui P. A p p e l l, observînd relaţia (7.19), sub forma simplă:

$$\frac{\partial A}{\partial \ddot{\omega}^s} = \Omega_s \qquad (s = 1, 2, \ldots n - m) \quad (7.21)$$

aşadar, atîtea ecuaţii cîte grade de libertate avem şi cîte coordonate independente sînt.

312. **Exemplu de mişcare neolonomă: problema cercului.** Un rigid de rotaţie, greu, se termină cu o muchie în formă de cerc (rază R), avînd planul perpendicular pe axa de rotaţie; centrul de greutate al rigidului să fie aşezat în centrul de figură al cercului. Să presupunem că acest rigid este obligat să se *rostogolească, fără alunecare*, pe un plan orizontal astfel încît să rămînă mereu în contact cu planul, de-a lungul muchiei circulare.

Să alegem un sistem de axe fix în spaţiu: $Oxyz$ cu axa Oz perpendiculară pe planul fix luat ca plan $(x, y.)$ Prin centrul de greutate, deci prin centrul cercului O' să ducem un sistem $O'x_1y_1z_1$ paralel cu $Oxyz$ şi un sistem $O'x'y'z'$ legat solidar de corp, avînd axa $O'z'$ perpendiculară pe planul cercului (axul de rotaţie), axa x' în direcţia liniei nodurilor [intersecţia planelor (x_1, y_1) şi (x', y')], iar axa y' în direcţia liniei de cea mai mare pantă.

Punctul M de contact al cercului (rigidului) cu planul fix se găseşte pe axa y' în regiunea $y'<0$.

Fie x_0, y_0, z_0 coordonatele centrului de greutate O' faţă de $Oxyz$. Întrucît $\varphi = 0$, ecuaţiile (14.10) § 164, care leagă unghiurile lui E u l e r de viteza momentană de rotaţie $\bar{\omega}$, se reduc la:

$$\omega_{x'} = \dot{\theta};\ \omega_{y'} = \dot{\psi} \sin\theta;\ \omega_{z'} = \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi}. \qquad (7.22)$$

După teorema lui K ö n i g, expresia energiei cinetice este:

$$2T = m\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2\right) + A\omega_{x'}^2 + A\omega_{y'}^2 + C\omega_{z'}^2 \qquad (7.23)$$

corpul fiind simetric în raport cu $O'z'$, iar A, C însemnînd momentele principale de inerţie ale rigidului faţă de sistemul $O'x'y'z'$. Singura forţă exterioară fiind greutatea, energia potenţială este:

$$-mgR \sin\theta.$$

Să exprimăm condiţiile de legătură: rostogolire, fără alunecare. Aceasta înseamnă că viteza punctului M de contact dintre cerc şi planul orizontal fix trebuie să fie mereu nulă. Această viteză este:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times \bar{r}_M' \qquad (7.24)$$

faţă de sistemul fix $Oxyz$.

Condiţia de rostogolire, fără alunecare, cere ca $\bar{v}_M = 0$. Să proiectăm

Scanned with OKEN Scanner

relația (7.24) pe următoarele direcții: 1. pe $O'x'$, obținem:

$$\dot{x}_0 \cos\psi + \dot{y}_0 \sin\psi + R\,(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) = 0; \tag{7.25}$$

2. pe $O'y'$, axă perpendiculară pe $O'x'$ în planul (x_1, y_1); obținem:

$$-\dot{x}_0 \sin\psi + \dot{y}_0 \cos\psi + R\dot{\theta}\sin\theta = 0; \tag{7.26}$$

3. pe axa $O'z$; obținem:

$$\dot{z}_0 - R\dot{\theta}\cos\theta = 0; \tag{7.27}$$

θ, φ, ψ fiind unghiurile lui E u l e r. Observăm că ultima relație este integrabilă, deci olonomă. Ea elimină din ecuații reacțiunea normală a planului. Primele două relații sînt *neolonome*. Nu vom putea scrie așadar, ecuația mișcării aplicînd direct ecuațiile lui L a g r a n g e deduse din (7.23), ci vom aplica metoda multiplicatorilor lui L a g r a n g e. Să notăm cu:

$$a\,(q) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q}. \tag{7.28}$$

Metoda amintită ne dă ecuațiile, λ și μ fiind doi parametri oarecare:

$$\begin{aligned}
&a\,(x_0) - \lambda\cos\psi + \mu\sin\psi = 0\\
&a\,(y_0) - \lambda\sin\psi - \mu\cos\psi = 0\\
&a\,(\theta) - \mu R\sin\theta + mgR\cos\theta = 0\\
&a\,(\varphi) - \lambda R\cos\theta = 0\\
&a\,(\psi) - \lambda R = 0.
\end{aligned}$$

Prin eliminarea parametrilor lui L a g r a n g e λ și μ și exprimarea mărimilor (7.28) deducem, în definitiv, ecuațiile:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(A\,\dot{\psi}\sin^2\theta\right) - C\omega_z\sin\theta\cdot\dot{\theta} = 0\\
&\frac{d}{dt}\omega_z - \frac{mR^2}{mR^2 - C}\dot{\psi}\sin\theta\cdot\dot{\theta} = 0
\end{aligned} \tag{7.29}$$

$$(mR^2 + A)\,\ddot{\theta} - \frac{1}{2}A\sin 2\theta\,\dot{\psi}^2 + (mR^2 + C)\,\omega_z\sin\theta\,\dot{\psi} + mgR\cos\theta = 0.$$

Ultima ecuație (7.29) poate fi înlocuită prin ecuația energiei. Primele două ecuații (7.29) ne dau următoarea ecuație diferențială pentru ω_z:

$$\frac{d^2\omega_z}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\,\frac{d\omega_z}{d\theta} - \frac{mCR^2}{A\,(mR^2 + C)}\,\omega_z = 0.$$

Punînd $\cos^2\theta = \xi$, obținem:

$$\xi\,(1-\xi)\,\frac{d^2\omega_z}{d\xi^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\xi\right)\frac{d\omega_z}{d\xi} - \frac{mCR^2}{A\,(mR^2 + C)}\,\omega_z = 0$$

ecuație diferențială cunoscută sub numele de ecuația lui E u l e r. Inte-

Scanned with OKEN Scanner

grala generală a acestei ecuații este dată de *seria ipergeometrică*, sub forma[1]):

$$\omega_z = \lambda F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}, \cos^2\theta\right) + \tag{7.30}$$

$$+ \mu \cos\theta F\left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2\theta\right),$$

λ și μ sînt constante arbitrare, iar:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2} \; ; \; \alpha\beta = \frac{mR^2 C}{A(mR^2 + C)}.$$

Din a doua ecuație (7.29) deducem pe ω_y prin ecuația:

$$\omega_y = \frac{mR^2 + C}{mR^2} \frac{d\omega_z}{d\theta}. \tag{7.31}$$

Valoarea lui ω_x, deci θ, se deduce din a treia ecuație (7.29) printr-o cuadratură, $t = t(\theta)$. Această relație, împreună cu (7.30) și (7.31), permite calcularea unghiurilor lui E u l e r. Mișcarea centrului de greutate este dată de ecuațiile (7.25) și (7.26).

313. **O geometrizare a sistemelor mecanice neolonome.** Să considerăm un sistem mecanic olonom și scleronom, a cărui poziție este caracterizată în fiecare moment t de coordonatele generalizate $q^1, q^2, \ldots, q^n$. Dacă:

$$T = \frac{1}{2} g_{ij} q^i q^j \tag{7.32}$$

este energia cinetică a sistemului, putem considera spațiul riemannian definit în spațiul figurativ de elementul diferențial:

$$ds^2 = \frac{1}{2} g_{ij} dq^i dq^j. \tag{7.33}$$

Principiul lui H a m i l t o n spune că, dacă asupra sistemului nu lucrează nici o forță, atunci traiectoriile reale în spațiul figurativ $R_n(q^1, \ldots, q^n)$ sînt geodezicele acestui spațiu dotat cu metrica (7.33).

Putem da o formulare geometrică acestui principiu dacă utilizăm noțiunea de paralelism L e v i-C i v i t a într-un spațiu riemannian R_n. Se știe că dacă $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ sînt simbolii lui C h r i s t o f f e l de speța a doua ai lui R_n, formulele:

$$dv^i = -\left\{ {i \atop jk} \right\} v^j dq^k$$

definesc un transport paralel al vectorului v^j, cu originea în punctul $(q^1, \ldots, q^n)$, vectorul transportat avînd originea în punctul $(q^1 + dq^1, \ldots, q^n + dq^n)$ și componentele $v^i + dv^i$. Geodezicele spațiului R_n pot fi atunci definite drept curbele de-a lungul cărora vectorul tangent se transportă prin paralelism.

Utilizînd acest rezultat, putem enunța *principiul lui H a m i l t o n* astfel:

---

[1]) v. *E. Whittaker and G. Watson*, Modern Analysis, 1940, Cambridge; p. 283.

Traiectoriile reale ale unui sistem mecanic, olonom și scleronom, nesupus nici unei forțe, sînt curbe auto-paralele, pentru care vectorul tangent la o traiectorie rămîne mereu paralel cu el însuși.

Acest enunț generalizează principiul inerției din mecanică, deoarece dreptele din spațiul euclidian sînt chiar curbele lui auto-paralele.

Principiul enunțat mai sus este interesant prin faptul că el poate fi extins la sistemele neolonome. Această extensiune a fost tratată de G. Vrănceanu în 1926 într-o lucrare[1]) în care a introdus noțiunea de spațiu neolonom și a arătat cum se poate introduce într-un astfel de spațiu un transport paralel analog cu cel al lui Levi-Civita. G. Vrănceanu a arătat apoi că *fiecărui sistem mecanic scleronom neolonom i se poate asocia un spațiu neolonom* și că *traiectoriile reale, în absență de forțe, sînt curbele auto-paralele ale spațiului neolonom asociat.*

Pentru a demonstra această teoremă, trebuie să introducem unele noțiuni de *calculul congruențelor*, dezvoltat de Ricci și Levi-Civita.

Fiind dat un spațiu riemannian $R_n(q^1, \ldots, q^n)$ avînd metrica (7.33) se spune că formele lui Pfaff:

$$ds^a = \lambda_i^a \, dq^i \qquad (a = 1, \ldots, n) \tag{7.34}$$

definesc un sistem de „congruențe ortogonale" în R_n, dacă determinantul $|\lambda_i^a|$ este diferit de zero și dacă sînt satisfăcute relațiile:

$$\lambda_j^a \lambda_j^{\acute{a}} = \frac{1}{2} g_{ij} \tag{7.35}$$

Relațiile (7.35) ne spun că avem

$$ds^2 = (ds^1)^2 + \ldots + (ds^n)^2, \tag{7.36}$$

deci metrica lui R_n a fost adusă la o sumă de pătrate cu ajutorul formelor lui Pfaff $ds^1, \ldots, ds^n$.

Congruențele ortogonale definitive de formele ds^a se obțin anulînd cîte $n - 1$ din aceste forme; de exemplu ecuațiile:

$$ds^2 = ds^3 = \ldots = ds^n = 0$$

definesc congruența (λ_1).

Ecuațiile (7.34) pot fi rezolvate în raport cu dq^i sub forma

$$dq^i = \mu_a^i \, ds^a, \tag{7.37}$$

unde μ_a^i sînt reciprocii determinantului $|\lambda_i^a|$; deci avem:

$$\lambda_i^a \mu_b^i = \delta_b^a \tag{7.38}$$

unde δ_b^a este simbolul lui Kronecker.

Se vede atunci că congruența (λ_a) este definită de sistemul diferențial:

$$\frac{dq^1}{\mu_a^1} = \frac{dq^2}{\mu_a^2} = \ldots = \frac{dq^n}{\mu_a^n}$$

---

[1]) *G. Vrănceanu*, „Sur les espaces nonholonomes". C. R. Ac. sc. Paris, t. 183, 1926, p. 852.

care definește o familie de curbe în R_n, astfel încît prin fiecare punct trece o curbă a familiei; $\mu_a^1, \ldots, \mu_a^n$ sînt componentele vectorului tangent într-un punct la curba ce trece prin acel punct.

Dacă înmulțim în relațiile (7.35) cu $\mu_b^i \mu_c^j$, sumăm în raport cu i, j și ținem seama de (7.38), obținem relațiile:

$$\frac{1}{2} g_{ij} \mu_b^i \mu_c^j = \delta_c^b$$

care ne spune că, în fiecare punct, vectorii $\mu_1^i, \ldots, \mu_n^i$ sînt unitari și ortogonali cîte doi, deoarece se știe că lungimea l a unui vector μ^i într-un spațiu riemannian este dată de formula:

$$l^2 = \frac{1}{2} g_{ij} \mu^i \mu^j$$

și doi vectori μ^i, ν^j se numesc ortogonali dacă $\frac{1}{2} g_{ij} \mu^i \nu^j = 0$.

Să considerăm covarianții biliniari ai formelor ds^a:

$$\Delta s^a = \left(\frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_j^a}{dx^i} \right) dq^i \, dq^j$$

pe care îi putem scrie, ținînd seama de (7.37) și de formulele analoge $\delta q^i = \mu_a^i \, \delta s^a$:

$$\Delta s^a = w_{bc}^a \, ds^b \, \delta s^c \tag{7.39}$$

unde am introdus cantitățile:

$$w_{bc}^a = \left(\frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_j^a}{\partial x^i} \right) \mu_b^i \mu_c^j \tag{7.39'}$$

care se numesc coeficienții covarianților biliniari. Acești coeficienți sînt nuli dacă ds^a sînt diferențiale totale exacte.

Fiind dat un vector V^i în R_n, se numesc componentele lui V^i pe congruențele (λ), cantitățile:

$$V^a = \lambda_i^a V_i \, . \tag{7.40}$$

V^a sînt, de altfel, proiecțiile vectorului V^i pe direcțiile vectorilor μ_a $(a = 1, \ldots, n)$. Fie $P(q^1, \ldots, q^n)$ originea vectorului V^i și $P'(q^1 + dq^1, \ldots, q^n + dq^n)$ un punct infinit vecin de P. Prin transportul paralel Levi-Civita al lui V^i din P în P', obținem vectorul $V^i + dV^i$, unde:

$$dV^i = - \left\{ \begin{matrix} i \\ j \quad k \end{matrix} \right\} V^j \, dq^k \tag{7.41}$$

Înlocuind cantitățile dq^k, V^j prin $\mu_a^k \, ds^a$, $\mu_a^j \, V^a$ și diferențialele dV^i prin

$$d(\mu_a^i \, V^a) = \left(\frac{\partial \mu_a^i}{\partial x^j} \right) V^a \, dq^j + \mu_a^i \, dV^a = \left(\frac{\partial \mu_a^i}{\partial x^j} \right) \mu_b^j \times V^a \, ds^b + \mu_a^i \, dV^a,$$

putem scrie formula (7.41) astfel:

$$\mu_a^i \, dV^a = \left(- \left\{ \begin{matrix} i \\ j \quad k \end{matrix} \right\} \mu_a^j \, \mu_b^h - \frac{\partial \mu_a^i}{\partial x^j} \, \mu_b^j \right) V^a \, ds^b$$

sau, înmulțind cu λ_i^a, sumînd în raport cu j și ținînd seama de (7.38):

$$dV^a = \gamma_{bc}^a \, V^b \, ds^c \tag{7.42}$$

unde am introdus ceea ce se numesc coeficienții de rotație ai lui R i c c i:

$$\gamma_{bc}^a = - \left\{ \begin{matrix} i \\ j \quad k \end{matrix} \right\} \lambda_i^a \, \mu_b^j \, \mu_c^h - \lambda_i^a \, \frac{\partial \mu_b^i}{\partial x^j} \, \mu_c^j \, . \tag{7.43}$$

Derivînd formula (7.38), în raport cu x^j, avem:

$$- \lambda_i^a \, \frac{\partial \mu_b^i}{\partial x^j} = \mu_b^i \, \frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} \, .$$

Formula (7.43) se poate scrie:

$$\gamma_{bc}^a = - \left\{ \begin{matrix} i \\ j \quad k \end{matrix} \right\} \lambda_i^a + \frac{\partial \lambda_j^a}{\partial x^k} \mu_b^j \, \mu_c^k \, . \tag{7.43'}$$

Ținînd seama de expresia simbolilor lui C h r i s t o f f e l și de formulele (7.39'), se poate verifica ușor că avem:

$$\gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} \left(W_{bc}^a + W_{ca}^b + W_{ba}^c \right) . \tag{7.43''}$$

Din formulele (7.43') se deduce, înlocuind pe b cu c și scăzînd din (7.43'), relația:

$$W_{bc}^a = \gamma_{bc}^a - \gamma_{cb}^a \tag{7.44}$$

De asemenea, ținînd seama că transportul L e v i - C i v i t a conservă lungimile vectorilor și că lungimea vectorului V^i se poate exprima în funcție de componentele V^a:

$$l^2 = (V^1)^2 + \ldots + (V^n)^2$$

avem condiția $V^a \, dV^a = 0$. Ținînd seama de (7.42), această condiție ne dă $\gamma_{bc}^a \, V^a \, V^b \, ds^c = 0$, și cum această formulă se verifică pentru orice vector și orice deplasare avem:

$$\gamma_{bc}^a + \gamma_{ac}^b = 0. \tag{7.45}$$

Formulele (7.44) și (7.45) ne dau succesiv:

$$\frac{1}{2} \left(W_{bc}^a + W_{ca}^b + W_{ba}^c \right) = \frac{1}{2} \left(\gamma_{bc}^a - \gamma_{cb}^a + \gamma_{ca}^b - \gamma_{ac}^b + \gamma_{ba}^c - \gamma_{ab}^c \right) = x_{bc}^a .$$

Să presupunem acum că se dă în $R_n(q^1, \ldots, q^n)$ un sistem al lui P f a f f:

$$ds^{m+1} = \ldots = ds^n = 0 \, ; \tag{7.46}$$

vom spune că sistemul (7.46) definește un spațiu neolonom X_n^m; o deplasare dx^i se va numi interioară acestui spațiu dacă $ds^{\alpha'} = \mu_i^{\alpha'} dx^i = 0$ pentru $\alpha' = m+1, \ldots, n$. Mai general, un vector V se numește interior spațiului neolonom R_n^m dacă componentele $V^{\alpha'}$ sînt toate nule ($\alpha' = m+1, \ldots, n$).

314. **Teoremele lui Gh. Vrănceanu.** Odată stabilite cele de mai sus, ne putem pune problema:

Să se determine un transport paralel în R_n^m, adică o lege care permite să se treacă de la un vector interior cu origina într-un punct P la un vector interior cu origina în P'; deplasarea $\overline{PP'}$, fiind interioară; acest transport conservînd tot odată lungimile vectorilor.

Fie V^α componentele nenule pe componentele (λ), ale vectorului V interior, și ds^β componentele nenule ale deplasării PP'. ($\alpha, \beta = 1, \ldots, m$).

Transportul paralel fiind de forma:

$$dV^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta \, ds^\gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, m) \quad (7.47)$$

unde am notat prin $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ simbolii lui Christoffel de speța a doua, lungimea $l^2 = (V^1)^2 + \ldots + (V^m)^2$ va fi păstrată dacă avem $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta = 0$; deci această condiție este verificată dacă luăm:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \gamma_{\beta\gamma}^\alpha. \qquad (7.48)$$

Se arată[1]) că transportul paralel (7.47), (7.48) este asociat în mod invariant spațiului R_n^m, definit de metrica (7.33) și de sistemul (7.46). Aceasta înseamnă că dacă luăm în R_n^m un alt sistem de congruențe ortogonale definit de formele:

$$ds^a = \lambda_i^a \, dq^i$$

astfel încît sistemul $ds^{m+1} = \ldots = ds^n = 0$ și dacă γ_{bc}^a sînt coeficienții de rotație ai lui Ricci relativ la congruențele ds^a, atunci formulele:

$$dV^\alpha = \gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta \, ds^\gamma \qquad (V^\alpha = \lambda_i^\alpha V^i)$$

definesc același transport paralel ca și formulele (7.47), (7.48). Avem deci teorema lui Vrănceanu:

Unui spațiu neolonom îi putem asocia în mod invariant un transport paralel al vectorilor interiori, de-a lungul drumurilor interioare, cu păstrarea lungimilor.

Considerăm vectorii

$$u^a = \lambda_i^a \frac{dq^i}{dt} \qquad (a = 1, \ldots, n), \qquad (7.48')$$

și atunci avem $u^{\alpha'} = 0$ ($\alpha' = m+1, \ldots, n$), deci

$$\frac{dq^i}{dt} = \mu_\alpha^i u^\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, m), \ (i = l, \ldots, n) \qquad (7.49)$$

unde u^α sînt componentele vectorului tangent la curbă, pe congruențele λ; deci curba este auto-paralelă dacă relația:

$$du^a = \gamma_{bc}^a u^b \, ds^c$$

---

[1]) *Gh. Vrănceanu* „Les espaces nonholonomes", Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. LXXVI, 1936, p. 33.

Scanned with OKEN Scanner

este verificată cînd punem:

$$u^a = \frac{ds^a}{dt};$$

aşadar, curbele auto-paralele verifică ecuaţiile:

$$\frac{du^\alpha}{dt} = \gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\beta u_\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, m). \tag{7.50}$$

Ecuaţiile (7.49), (7.50) definesc curbele auto-paralele ale spaţiului R_n^m; aceste ecuaţii formează un sistem diferenţial de primul ordin, de $n + m$ ecuaţii în $n + m$ funcţii necunoscute q^i, u^α. O curbă auto-paralelă este definită dacă ne dăm un punct şi un vector interior lui R_n^m.

Dacă ecuaţiile (7.46) sînt legăturile unui sistem mecanic neolonom avînd energia cinetică (7.43), formulele (7.49), (7.50) sînt echivalente cu ecuaţiile lui L a g r a n g e în cuasicoordonatele ds^α, care definesc traiectoriile în absenţă de forţe. Avem deci teorema (V r ă n c e a n u):

Curbele auto-paralele ale unui spaţiu neolonom definit de metrica (7.33) *şi ecuaţiile* (7.46) *coincid cu traiectoriile reale, în absenţă de forţe, ale unui sistem mecanic avînd energia cinetică* (7.32) *şi legăturile* (7.46).

Aplicaţie. Ca aplicaţie a acestor consideraţii să căutăm condiţiile pentru ca traiectoriile reale ale unui sistem mecanic neolonom, în absenţă de forţe, să se găsească printre traiectoriile reale ale aceluiaşi sistem eliberat de legăturile neolonome. Aceasta înseamnă că toate curbele integrale ale sistemului (7.49), (7.50) sînt în acelaşi timp integrale ale sistemului care defineşte geodezicele spaţiului R_n. Dar geodezicele lui R_n sînt integralele sistemului:

$$\frac{dx^i}{dt} = \mu^i_a u^a, \quad \frac{du^a}{dt} = \gamma^a_{bc} u^b u^c \quad (i, a, b, c = 1, \ldots, n). \tag{7.51}$$

Pentru ca sistemul (7.51) să fie o consecinţă a sistemului (7.49), (7.50), trebuie să avem pentru $u^{\alpha'} = 0$, $\frac{du^{\alpha'}}{dt} = \gamma^{\alpha'}_{\beta\gamma} u^\beta u^\gamma = 0$; deci:

$$\gamma^{\alpha'}_{\beta\gamma} + \gamma^{\alpha'}_{\gamma\beta} = 0, \ (\alpha' = m + 1, \ldots, n; \beta, \gamma = 1, \ldots, m). \tag{7.52}$$

Dacă ţinem seama de (7.43'') avem condiţiile:

$$w^\beta_{\gamma\alpha'} + w^\gamma_{\beta\alpha'} = 0. \tag{7.52'}$$

care ne spune că traiectoriile sistemului neolonom sînt geodezice în spaţiul R_n.

Să presupunem că sistemul (7.46) nu admite nici o combinaţie integrală, adică nu putem găsi funcţii $c_{\alpha'}$ $(\alpha' = m + 1, \ldots, n)$ astfel ca ecuaţia $c_{\alpha'} ds^{\alpha'} = 0$ să fie complet integrabilă. Ne putem oricînd reduce la acest caz, micşorînd eventual numărul coordonatelor lagrangeiene $q^1, \ldots, q^n$. Se arată atunci[1]) că sistemul (7.46) împarte spaţiul R_n în domenii deschise disjuncte D_i astfel încît:

1. Punctele care nu fac parte din nici un D_i formează o mulţime închisă fără puncte interioare.

2. Două puncte oarecare dintr-un acelaşi D_i se pot uni prin arce de traiectorii reale, deci de curbe integrale ale sistemului (7.49), (7.50).

---

[1]) *C. Teleman*, „Asupra sistemelor mecanice neolonome", Analele Universităţii C. I. Parhon, 1956.

Scanned with OKEN Scanner

TEORIA SISTEMELOR HAMILTONIENE

Capitolul VIII

ECUAȚIILE LUI HAMILTON

315. **Deducerea ecuațiilor canonice din ecuațiile lui Lagrange.** Ecuațiile dinamicii, în diferitele forme stabilite pînă acum, se prezintă sub aspectul unor ecuații diferențiale de ordinul al doilea.

W. R. Hamilton a dat ecuațiilor Dinamicii forma unui sistem de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întîi, care se bucură de proprietăți analitice remarcabile din punct de vedere teoretic și care își găsește aplicații importante mai ales în dezvoltările Fizicii teoretice din ultimele decenii. În special, existența unor expresii integrale, invariante la transformări de coordonate și la mișcare, descoperite de H. Poincaré, a permis formularea matematică riguroasă și elegantă a teoriei cuantelor, iar ecuația diferențială cu derivate parțiale a lui Hamilton-Jacobi a dat, între altele, posibilitatea transformării *Mecanicii cuantice matriciale* (W. Heisenberg), concepută la început prin calcul „cu diferențe", discontinue, într-o metodă analitică care operează cu mărimi continue (E. Schrödinger), numită *Mecanica ondulatorie* (Louis de Broglie).

Fie un sistem dinamic olonom și conservativ, reonom, cu n grade de libertate $q^1, q^2, \ldots, q^n$; funcția lui Lagrange fiind:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(q^1, q^2, \ldots, q^n; \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n; t).$$

Ecuațiile lui Lagrange sînt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^r} = 0. \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \qquad (8.1)$$

Să introducem impulsurile generalizate prin relațiile cunoscute (2.12) § 283:

$$p_r = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r}. \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \qquad (8.2)$$

Folosind relațiile (8.2), ecuațiile (8.1) se pot scrie sub forma:

$$\dot{p}_r = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^r}. \qquad (r = 1, 2 \ldots n) \qquad (8.3)$$

Sistemul de $2n$ ecuații liniare (8.2) și (8.3) este echivalent ecuațiilor de

Scanned with OKEN Scanner

ordinul al doilea (8.1) în număr de n. Acest sistem poate fi considerat că rezolvă problema mecanică, deoarece permite aflarea celor $2n$ cîtimi luate drept necunoscute $q^1, q^2,\ldots, q^n$; $p_1, p_2,\ldots,p_n$. Totuşi, în forma de mai sus, sistemul nu este convenabil de tratat analitic. Se caută să i se dea un aspect simetric, punînd şi ecuaţiile (8.2) care dau pe $\dot{q}^r$, sub formă identică ecuaţiilor (8.3) care dau pe $\dot{p}_r$. În acest scop, aplicăm funcţiei lui L a g r a n g e o variaţie virtuală δ, astfel încît variaţiei coordonatelor $q^1, q^2,\ldots, q^n$ în spaţiul figurativ R_n să-i corespundă o variaţie a vitezelor $\dot{q}^r$ şi, prin (8.2), o variaţie a impulsurilor generalizate p_r.

Avem, succesiv, pentru o variaţie virtuală ($\delta t = 0$):

$$\delta \mathfrak{L} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^r}\,\delta q^r + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r}\,\delta \dot{q}^r = \dot{p}_r\,\delta q^r + p_r\,\delta \dot{q}^r =$$

$$= \delta\,(p_r\,\dot{q}^r) + \dot{p}_r\,\delta q^r - \dot{q}^r\,\delta p_r$$

de unde rezultă că:

$$\delta\,(p_r\,\dot{q}^r - \mathfrak{L}) = \dot{q}^r\,\delta p_r - \dot{p}_r\,\delta q^r. \tag{8.4}$$

Cu ajutorul ecuaţiilor (8.2) să exprimăm membrul întîi al relaţiilor (8.4) în funcţie de (q^r, p_r). Putem defini o funcţie de variabilele $q^1, q^2,\ldots, q^n$; $p_1, p_2,\ldots, p_n$; t, numită *funcţia lui* H a m i l t o n, prin:

$$H\,(q^1, q^2,\ldots, q^n; p_1, p_2, \ldots, p_n; t) = \sum_{r=1}^{n} p_r\,\dot{q}^r - \mathfrak{L}. \tag{8.5}$$

Ecuaţia (8.4) se scrie, dacă facem notaţia (8.5), sub forma:

$$\delta H = \dot{q}^r \delta p_r - \dot{p}_r \delta q^r.$$

Dezvoltînd membrul întîi şi identificînd cu membrul al doilea, observînd că variaţia δ este complet arbitrară, deducem:

$$\dot{q}^r = \frac{\partial H}{\partial p_r}\,;\quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q^r}\,; \qquad (r = 1, 2,\ldots n) \tag{8.6}$$

aşadar, un sistem de $2n$ ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întîi, care înlocuieşte sistemul de n ecuaţii de ordinul al doilea ale lui L a g r a n g e. Sistemul (8.6) poartă numele de *ecuaţiile canonice ale lui* H a m i l t o n.

O soluţie determinată a sistemului (8.6):

$$q^r = q^r\,(t;\, c_1,\, c_2,\ldots,\, c_{2n}) \quad ; \quad p_r = p_r\,(t;\, c_1,\, c_2,\ldots,\, c_{2n})$$

reprezintă o curbă traiectorie în spaţiul fazelor $2n$-dimensional R_{2n}, în care un punct figurativ este determinat prin cele $2n$ coordonate $q^1, q^2,\ldots, q^n$; $p_1, p_2,\ldots, p_n$. Aceste cîtimi determină *starea* sistemului dinamic. Impulsurile generalizate p_r poartă numele de *coordonate conjugate*, faţă de q^r.

Soluţia precedentă poate fi interpretată şi ca o curbă orară în spaţiul fază — timp $2n + 1$-dimensional R_{2n+1} $(q^1,\ldots, q^n; p_1,\ldots, p_n; t)$. Dacă în funcţia hamiltoniană nu apare t explicit, curba orară se reduce la traiectoria din R_{2n}. Geometric, traiectoriile sistemului canonic alcătuiesc „liniile de curent" pentru mişcarea unei substanţe în R_{2n}. Aceste linii se spune că sînt „staţionare în spaţiu" pentru că *divergenţa* este nulă.

316. **Proprietățile funcției lui Hamilton.** Funcția (8.5), *uniformă* în tot domeniul de integrare, poate fi considerată drept energia totală a sistemului dinamic. În adevăr, cum pentru sisteme reonome:

$$T = T_0 + T_1 + T_2; \quad \dot{q}^r \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^r} = 2T_2 + T_1,$$

rezultă,

$$H = 2T_2 + T_1 - (T_0 + T_1 + T_2 - U) = T_2 + (U - T_0).$$

Considerăm pe $U - T_0$ drept energia potențială, ceea ce este posibil căci T_0 nu depinde de viteze; pe T_2 (expresie pătratică și omogenă) îl putem considera drept expresia energiei cinetice. Atunci, este posibil a privi pe H drept suma energiei cinetice și a energiei potențiale; așadar, drept energia *totală* a sistemului mecanic.

Faptul interesant, care justifică punctul de vedere de mai sus, este că, în cazul *sistemelor scleronome*, $T = T_2$ și $T_0 = 0$; așadar,

$$H = T + U \tag{8.7}$$

reprezintă *energia totală* a sistemului dinamic.

Derivînd funcția H, total, în raport cu timpul, obținem pentru sisteme reonome:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t^r} \dot{q}^r + \frac{\partial H}{\partial p_r} \dot{p}_r + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{8.8}$$

după ecuațiile canonice (8.6).

Dacă sistemul este scleronom, H nu conține explicit timpul, iar ecuația (8.8):

$$H = E \text{ (const.)}$$

reprezintă *integrala energiei.*

Prima chestiune în rezolvarea unei probleme mecanice prin metoda lui H a m i l t o n, este construirea hamiltonianei problemei respective.

317. **Interpretare geometrică. Mecanica ondulatorie.** Dacă efectuăm integrala de acțiune:

$$V = \int \mathfrak{L}\, dt$$

de-a lungul traiectoriei reale a punctului figurativ, de la un punct inițial q_0^k, fix, și pînă la o poziție finală, oarecare, q^k, putem considera mărimea V ca funcție de q^k și de t. Coordonatele q_0^k pot fi privite ca niște parametri, ale căror valori se determină prin condițiile inițiale.

Avînd în vedere definiția lui H prin expresia (8.5), relația fundamentală (3.10) § 298, aplicată integralei V, ne dă:

$$dV = -H\, dt + p_k\, dq^k - p_k^0\, dq_0^k,$$

unde $V = V(q_0^k, q^k, t)$. Prin identificare găsim:

$$H = -\frac{\partial V}{\partial t}; \quad p_k^0 = -\frac{\partial V}{\partial q_0^k}; \quad p_k = \frac{\partial V}{\partial q^k}. \tag{8.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Șirul uniparametric de funcții $V = c$ (const) reprezintă, în spațiul figurativ R_n, un șir de suprafețe care pot fi privite ca succesiunea pozițiilor unei suprafețe mobile. Această suprafață mobilă figurează o „undă" (de explozie) fără periodicitate, avînd izvorul într-un punct $t = 0$, pentru care, de pildă, $V = 0$. Avem imaginea mișcării unei unde luminoase din optica geometrică.

Prima ecuație (8.9) ne arată că funcția de acțiune V este o soluție a ecuației diferențiale cu derivate parțiale, numită *ecuația lui H a m i l t o n - J a c o b i*:

$$H\left(q^h, \frac{\partial V}{\partial q^h}, t\right) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{8.10}$$

asupra căreia vom reveni mai tîrziu (Cap. XII). În adevăr, ecuația (8.10) se obține din prima ecuație (8.9) substituind în $H(q, p, t)$ pe toți p_h prin valorile lor date de a treia ecuație (8.9).

Al doilea șir de ecuații (8.9) definește traiectoria punctului figurativ care trece prin poziția inițială (t_0, p_0^h). În adevăr, q_0^h fiind parametri constanți, iar derivata lui V în raport cu q_0^h o funcție de q^h și t, ea definește traiectoria.

Odată aleasă această traiectorie care răspunde condițiilor inițiale date, a treia serie de ecuații (8.9) dau cîtimile p_h în fiecare punct al traiectoriei. Avînd așadar, determinat în fiecare moment *elementul de stare* $(q^h, p_h,)$ problema este rezolvată. Cazul sistemelor scleronome este deosebit de instructiv din punct de vedere geometric. În acest caz, energia totală este constantă. Expresia integralei de acțiune devine:

$$V = \int_0^t \mathfrak{L}\, dt = \int_0^t (T - U)\, dt = \int_0^t (2T - E)\, dt$$

sau:

$$V = \int_0^t 2T\, dt - \int_0^t E\, dt$$

sau încă, după (4.7) § 302:

$$V(q_0, q, t) = S(q_0, q) - Et \tag{8.11}$$

căci $E = \text{const.}$ și $t_0 = 0$. Funcția V poartă numele de *funcția principală*, pentru sistemul dinamic considerat.

Să luăm una din suprafețele de undă, de pildă suprafața inițială $V = 0$. Ea se propagă în timp, cu condiția, dedusă din (8.11):

$$V = S(q_0^r, q^r) - Et = 0;$$

ceea ce înseamnă că ocupă succesiv $(t = t_0, t_1, \ldots)$ pozițiile familiei de suprafețe fixe:

$$S(q_0^r, q^r) = \text{const.}$$

Cum avem:

$$p_h = \frac{\partial V}{\partial q^h} = \frac{\partial S}{\partial q^h}; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -E \tag{8.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă că funcția (8.10) satisface ecuația diferențială cu derivate parțiale:

$$H\left(q^h, \frac{\partial S}{\partial q^h}\right) = E.$$

a) Suprafețele de acțiune $S(q_0, q) = \text{const.}$ sînt ortogonale la traiectoria punctului figurativ în R_n. Rezultă evident că de aceeași proprietate se bucură și suprafețele de undă mobile, $V(q_0, q, t) = \text{const.}$ Această proprietate constituie o generalizare, pentru varietățile R_n, a proprietății similare stabilită la Anexa II § 37 pentru spațiile euclidiene.

Fie un punct P în R_n pe o suprafață de acțiune $S = \text{const.}$ Considerăm o deplasare arbitrară δq^h pe planul tangent prin P la S. Avem, evident:

$$\frac{\partial S}{\partial q^h}\,\delta q^h = 0 \tag{8.13}$$

căci, pe o anumită suprafață $S = \text{const.}$, valoarea lui S nu se schimbă. Din (8.12) rezultă însă, pentru (8.13):

$$p_h\,\delta q^h = 0. \tag{8.14}$$

Dar, pentru sisteme scleronome, cum T este o formă pătratică omogenă de $\dot{q}^h$ și cum:

$$p_h = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h} = \sum_s g_{hs}\dot{q}^s = \sum_s g_{hs}\frac{dq^s}{dt}$$

rezultă pentru condiția (8.14):

$$dq^r\,\delta q^r = 0;$$

ceea ce demonstrează propoziția enunțată (δq^r fiind componente de vector așezat în planul tangent la S, iar dq^r fiind componente de vector tangent la traiectorie).

b) Suprafețele de undă $V = \text{const.}$ se propagă cu viteza de fază:

$$u = \frac{\text{const.}}{\sqrt{2\,(E-U)}}, \tag{8.15}$$

definită, în § 303, prin relația (4.13).

În adevăr, în elementul de timp, mobilul parcurge pe traiectoria sa distanța dS dată de relația [v. relația (4.7) § 322]:

$$dS = 2T\,dt.$$

Suprafața $V = 0$ se propagă astfel încît, în elementul de timp δt, trebuie să fie satisfăcută relația:

$$dS - E\,\delta t = 0.$$

Viteza de propagare a suprafeței de undă va fi, așadar, cum $ds = \sqrt{2T}\,dt$:

$$u' = \frac{ds}{\delta t} = \sqrt{2T}\,\frac{dt}{\delta t} = \frac{E}{\sqrt{2T}} = \frac{E\ (\text{const.})}{\sqrt{2\,(E-U)}}.$$

Prin aceasta, propoziția a doua este stabilită, căci $u' = u$, după (8.15).

În rezumat, suprafața $V = 0$ se comportă ca o suprafață de undă ocupînd, în propagarea ei, succesiv, pozițiile suprafețelor potențiale fixe,

astfel încît să rămînă mereu ortogonală curbelor traiectorii; viteza de propagare este exact viteza de fază a fenomenului ondulator, în varietatea R_n.

Această imagine dovedește că metoda lui Hamilton-Jacobi permite să aplicăm fenomenelor mecanice, corpusculare, raționamentele Opticii ondulatorii (C. Huygens) și este, prin aceasta, drumul indicat spre unificarea sau, cel puțin, suprapunerea celor două fenomene naturale „conjugate": ondulatorii și corpusculare, — ceea ce a împlinit Louis de Broglie, în *Mecanica ondulatorie* (1924).

Ecuația fundamentală a Mecanicii ondulatorii a fost scrisă de Ervin Schrödinger (1926). Acest autor pornește dela observația că ecuația fundamentală a Opticii *geometrice* își are drept corespondent în Mecanică ecuația cu derivate parțiale a lui Hamilton-Jacobi. El se întreabă, care va fi în Mecanică ecuația corespunzătoare ecuației fundamentale a Opticii *ondulatorii*, anume, ecuația undelor:

$$\Delta\Psi - \frac{1}{u^2}\ddot{\Psi} = 0 \tag{8.16}$$

unde Δ este operatorul cunoscut sub numele de laplaceian și u este viteza de propagare a undei, iar $\Psi(x, y, z, t)$ reprezintă fenomenul ondulator respectiv. Pentru a răspunde la această întrebare, Schrödinger atribuie undelor hamiltoniene o periodicitate determinată de frecvența ν și de lungimea de undă λ, legate prin relația:

$$\lambda\nu = u = \frac{E}{\sqrt{2\ m\ (E - U)}} \tag{8.17}$$

dacă luăm masa unui corpuscul $m \neq 0$ și E energia totală.

Cum, prin postulatul lui L. de Broglie, fiecare corpuscul material de energie totală E are asociată o undă de frecvență ν, prin relația:

$$E = h\nu \tag{8.18}$$

h fiind constanta lui Planck, punînd $p = mv$, rezultă:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\ m\ T}} = \frac{h}{p}. \tag{8.19}$$

Ca soluție pentru funcția de undă $\Psi(x,y,z,t)$, Schrödinger admite o undă hamiltoniană cu periodicitatea definită prin relația (8.17) dată de:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\, e^{2\pi i\nu t}. \tag{8.20}$$

Substituind (8.20) în (8.16) și ținînd seamă de (8.17) și (8.18), obținem ecuația fundamentală a Mecanicii ondulatorii, numită *ecuația lui Schrödinger:*

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - U)\,\psi = 0; \tag{8.21}$$

ea este echivalentul mecanic al fenomenelor Opticii ondulatorii.

Capitolul IX

TRANSFORMĂRI DE CONTACT
TRANSFORMĂRI CANONICE
TRANSFORMĂRI INFINITEZIMALE

A. TRANSFORMĂRI DE CONTACT

318. **Transformări punctuale şi de contact** (S o p h u s L i e). Să considerăm, pentru moment, spaţiul euclidian E_3 şi un punct (x, y, z). Orice transformare care subordonează punctelor (x, y, z) punctele (x', y', z'), biunivoc, se numeşte *transformare punctuală*.

Să asociem, însă, fiecărui punct (x, y, z) şi o direcţie (α, β, γ) satisfăcînd relaţiei de perpendicularitate $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Orice transformare definită printr-o funcţie transformatoare care efectuează schimbarea:

$$(x, y, z;\ \alpha, \beta, \gamma) \to (x', y', z';\ \alpha', \beta', \gamma')$$

în E_3, menţinînd condiţia $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$, se numeşte, după S. L i e, o *transformare de contact*. Ea este mai restrictivă decît transformarea punctuală. Numele „de contact" provine din proprietatea geometrică: dacă două suprafeţe σ, σ' se ating într-un punct (x, y, z), transformatele lor Σ, Σ' se vor atinge în punctul transformat (x', y', z').

Punctul (x, y, z) descriind o curbă în E_3 (de exemplu, o traiectorie determinată de ecuaţiile mişcării), punctul transformat va descrie de asemenea, în E_3, curba transformată. În acest sens, transformarea de contact poate fi considerată drept o transformare dinamică.

Să extindem noţiunea precedentă la un spaţiu oarecare cu $n + 1$ dimensiuni, în care $(z; q^1, q^2, \ldots, q^n)$ să definească poziţia unui punct dat prin coordonatele sale.

Vom numi „element" totalitatea cîtimilor care determină poziţia unui punct dat $(z^0;\ q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^n)$, numit *centrul* elementului, precum şi a cîtimilor care determină direcţiile imediat vecine centrului, aşezate pe un plan, care trece prin centru $(p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0)$. Ecuaţia unui astfel de plan se scrie:

$$z - z^0 = \sum_{k=1}^{n} p_k^0 (q^k - q_0^k), \tag{9.1}$$

unde p_k^0 sînt n coeficienţi bine determinaţi, cari orientează planul. În felul acesta, parametrii ce definesc „elementul" considerat sînt:

$$z^0;\ q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^n;\ p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0.$$

Fie o suprafaţă:

$$z = z(q^1, q^2, \ldots, q^n) \tag{9.2}$$

care admite în fiecare punct $(z^0; q_0)$ un plan tangent determinat, a cărui ecuaţie este dată de expresia (9.1) în care facem:

$$p_k^0 = \left(\frac{\partial z}{\partial q^k}\right)_{q = q_0} \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

Scanned with OKEN Scanner

În felul acesta, varietatea (9.2) definește o mulțime de ∞^n elemente. Două elemente foarte apropiate $(z; q, p)$ și $(z + dz;\ q + dq,\ p + dp)$ se numesc *racordate*, dacă planul unuia trece prin centrul celuilalt. Această condiție se exprimă prin relația:

$$dz - \sum p_h\, dq^h = 0. \tag{9.3}$$

Pentru ca această proprietate să se mențină și în varietatea transformată (Z, P, Q), este necesar ca:

$$dZ - P_r\, dQ^r = \lambda\ (z,\ p_h,\ q^h)\ (dz - p_r\, dq^r). \tag{9.3'}$$

Observăm, însă, că relațiile de transformare:

$$q^r = q^r\ (Q^h,\ P_h);\ \ p_r = p_r\ (Q^h,\ P_h),$$

nu depind de z. Așadar, vom lua funcția λ egală cu o constantă, pe care o putem pune egală cu unitatea (ceea ce revine a schimba variabila z în const. z.).

Transformarea de contact constă, prin urmare, în schimbarea de variabile:

$$Z = z - S\,(q^r,\ p_r);\ \ Q^h = Q^h\,(q^r,\ p_r);\ \ P_h = P_h\,(q^r,\ p_r) \qquad (k = 1,\ 2,\ldots\ n) \tag{9.4}$$

care transpune două elemente racordate în alte două elemente racordate. Funcțiile care figurează în (9.4) admit primele două derivate și au un determinant funcțional diferit de zero.

Ținînd seamă de (9.4), condiția (9.3) care definește transformarea de contact, poate fi scrisă sub forma:

$$p_h\, dq^h - P_h\, dQ^h = dS\ (q,\ p,\ Q,\ P) \tag{9.5}$$

unde nu am mai scris semnul sumei, aplicînd convenția de sumare știută. În ecuația precedentă presupunem că am făcut substituția (9.4), astfel încît membrul al doilea reprezintă o diferențială totală exactă a unei funcții de una din perechile q, p, Q, P. În aceste împrejurări, ecuația (9.5) reprezintă condiția ca transformarea (9.4) să fie de contact: membrul întîi să fie o diferențială totală exactă. Dacă în relațiile (9.4) avem:

$$Q = Q\ (q),\ \ P = P\ (p,\ q),$$

adică, variabilele de poziție devin variabile de poziție, transformarea se numește *punctuală extinsă*, în spațiul fazelor (v. § 389).

Transformarea de contact posedă proprietățile unei operații de grup, și anume, a grupului liniar general: 1. conține transformarea identică $(q,\ p) \to (q,\ p)$; 2. din $(q,\ p) \to (Q,\ P)$ rezultă $(Q,\ P) \to (q,\ p)$, deci, orice transformare posedă și o transformare inversă; 3. produsul a două transformări constituie o nouă transformare, deci:

$$(q,\ p) \to (Q_1,\ P_1) \text{ și } (Q_1,\ P_1), \to (Q_2,\ P_2), \text{ duce la } (q,\ p) \to (Q_2,\ P_2).$$

319. **Expresia analitică a transformării de contact.** Relația (9.5), care condiționează caracterul transformării, ar putea servi spre a deduce însești expresiile legilor de transformare dacă am cunoaște expresia funcției carac-

teristice $S(q, p, Q, P)$ care figurează în (9.5). Această funcție primește, din această cauză, numele de *funcția generatoare a transformării.*

Să presupunem că în spațiul figurativ R_n $(q^1, q^2, \ldots, q^n)$, punctele figurative sînt obligate să satisfacă unor anumite relații de constrîngere: să se afle pe suprafețe, linii sau, în general, să umple anumite varietăți date α-dimensionale, unde $\alpha \leqslant n$. Analitic, aceste condiții se exprimă prin relații de forma:

$$\Omega_r (q^1, q^2, \ldots, q^n; Q^1, Q^2, \ldots, Q^n) = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \tag{9.6}$$

deoarece punctele spațiului transformat (Q) trebuie să satisfacă aceleași relații.

În asemenea condiții, o variație (dq, dQ) nu mai este independentă în (9.5) ci trebuie să satisfacă și relațiilor de condiție:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q^s} dq^s + \frac{\partial \Omega}{\partial Q^s} dQ^s = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots m) \tag{9.7}$$

dedusă din (9.6) Așa fiind, aplicăm metoda multiplicatorilor nedeterminați ai lui L a g r a n g e. Din (9.5) și (9.7) deducem:

$$P_k = -\frac{\partial S}{\partial Q^k} - \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \frac{\partial \Omega_s}{\partial Q^k}; \qquad p_k = \frac{\partial S}{\partial q^k} + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \frac{\partial \Omega_s}{dq^k}. \tag{9.8}$$
$$(k = 1, 2, \ldots n)$$

Am presupus că în (9.5) am exprimat, cu ajutorul relațiilor (9.4), cîtimile p_k, P_k în funcție de q^r, Q^r. În adevăr, după nevoie, avem posibilitatea să alegem funcția de determinat S ca funcție de una din perechile de parametri q, p, Q, P.

Ecuațiile (9.8) și (9.6), stabilite de J a c o b i, permit exprimarea analitică a transformării de contact, dacă se cunosc: funcția generatoare S și funcțiile de legătură Ω_r; în total deci, $m + 1$ funcții de variabilele (q, Q).

320. **Condiția ca o transformare să fie de contact.** Această condiție pe care am scris-o sub forma:

$$p_k\, dq^k - P_k\, dQ^k = \text{diferențială totală exactă}, \tag{9.5}$$

se poate traduce cu ajutorul proprietăților covariantului biliniar (§ 327) al formelor pfaffiene $P_k\, dQ^k$ și $p_k\, dq^k$, în următoarea teoremă: condiția necesară și suficientă ca transformarea:

$$q^k = q^k (Q^r, P_r); \quad p_k = p_k (Q^r, P_r) \qquad (k, r = 1, 2, \ldots n)$$

să fie de contact, este ca expresia:

$$\sum (\delta p_k\, dq^k - dp_k\, \delta q^k) \tag{9.9}$$

să rămînă invariantă pentru transformarea dată.

În adevăr, cum două forme P f a f f, care diferă printr-o diferențială totală exactă, au același covariant biliniar (§ 327), rezultă:

$$\delta P_k\, dQ^k - dP_k\, \delta Q^k = \delta p_k\, dq^k - dp_k\, \delta q^k;$$

ceea ce demonstrează afirmația de mai sus.

Scanned with OKEN Scanner

321. **Conexiune cu principiul lui Hamilton.** Considerăm forma:

$$\delta V = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}\,(q,\ \dot{q},\ t)\,dt = 0.$$

Dacă ecuaţiile lui L a g r a n g e sînt satisfăcute, avem (§ 337):

$$\delta V = \Big| p_h\ \delta q^h - H\ \delta t \Big|_0^1 . \tag{9.10}$$

Să considerăm următorul pfaffian, posedînd $2n + 1$ variabile, în R_{2n+1}:

$$\theta = \sum_{h=1}^{n} p_h\ dq^h - H\ dt \tag{9.11}$$

numit *forma canonică a lui* P f a f f. Ţinînd seamă de (9.11), expresia (9.10) devine:

$$\delta V = \theta_1 - \theta_0.$$

Aşadar, principiul lui H a m i l t o n care condiţionează $\delta V = 0$ pentru o traiectorie actuală, se transformă în condiţia $\theta_1 = \theta_0$. Deci, forma canonică a lui P f a f f (9.11) trebuie să rămînă constantă. Dar atunci, covariantul biliniar al acestei forme va fi nul; ceea ce înseamnă că trebuie să fie satisfăcut sistemul diferenţial asociat formei canonice. Cine este acest sistem asociat?

322. **Sistemul asociat formei canonice este sistemul hamiltonian.** În adevăr, covariantul biliniar al formei (9.11) este

$$\Theta = \delta p_h\ dq^h - dp_h\ \delta q^h + dH\ \delta t - \frac{\partial H}{\partial t}\ \delta t\ dt =$$

$$= -\left(dp_h + \frac{\partial H}{\partial q^h}\ dt\right)\delta q^h + \left(dq^h - \frac{\partial H}{\partial p_h}\ dt\right)\delta p_h + \left(dH - \frac{\partial H}{\partial t}\ dt\right)\delta t.$$

Identificînd cu zero această expresie, pentru orice variaţie arbitrară δ, vom avea sistemul pfaffian asociat formei canonice (9.11):

$$\dot{q}^h = \frac{\partial H}{\partial p_h};\quad \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q^h};\quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

Acest sistem este însuşi sistemul hamiltonian, numit „canonic“ fiindcă este asociat formei canonice a lui P f a f f.

Această constatare ne face să considerăm o transformare de contact executată asupra variabilelor $(q^h,\ p_h)$ ce satisfac ecuaţiilor hamiltoniene, ca o transformare dinamică: o transformare care duce punctul figurativ dintr-o poziţie iniţială, în spaţiul fazelor, de-a lungul unei traiectorii, în altă poziţie, finală.

Sistemul canonic se zice că *admite* transformarea de contact: această transformare aplicată diverselor puncte ale unei curbe integrale a sistemului canonic, furnizează puncte aparţinînd toate unei aceleiaşi noi curbe integrale.

C. C a r a t h e o d o r y introduce o transformare canonică generală (v. § 323) în care se transformă şi timpul. O astfel de transformare nu mai este,

în general, transformare de contact în spațiu-timp R_{n+1}. Transformarea canonică:

$$P_k = P_k(q^r, p_r; t);\ Q^k = Q^k(q^r, p_r; t);\ T = T(q^r, p_r; t),$$

care transportă fiecare element $(P_k, Q^k; T)$ în $(p_r, q^r; t)$ prin deplasare de-a lungul extremalei corespunzătoare sistemului canonic a fost numită de C a r a t h e o d o r y *transformare de alunecare* [1]).

B. TRANSFORMĂRI CANONICE

323. **Condiția necesară și suficientă ca o transformare să fie canonică.** Fie o transformare definită prin relațiile:

$$q^k = q^k(Q^r, P_r; t);\ p_k = p_k(Q^r, P_r; t), \tag{9.12}$$

unde intră și timpul t explicit; funcțiile din membrul al doilea sînt regulate și posedă derivate în tot domeniul considerat al variabilelor; determinantul funcțional este diferit de zero, așa încît transformarea (9.12) să poată fi inversată.

Să punem condiția ca transformarea (9.12) să lase invariantă forma canonică a ecuațiilor hamiltoniene; așa fel ca, *orice* sistem canonic:

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k};\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k}, \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{9.13}$$

unde funcția hamiltoniană este $H(q^r, p_r; t)$, să fie transformat, prin (9.12), într-un sistem tot canonic:

$$\dot{Q}^k = \frac{\partial K}{\partial P_k};\ \dot{P}_k = -\frac{\partial K}{\partial Q^k}, \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{9.14}$$

unde $K(Q^r, P_r; t)$ este noua funcție hamiltoniană.

O transformare care satisface condiției de mai sus se numește *transformare canonică*. Variabilele (q, p) și (Q, P) sînt numite *variabile canonice*, formînd o pereche de variabile „canonic conjugate".

Sistemul (9.13), deoarece după § 322 este un sistem canonic, este asociat formei canonice a lui P f a f f (9.11) cu $2n + 1$ variabile $(q^k, p_k; t)$:

$$\theta = p_k\, dq^k - H(q, p; t)\, dt. \tag{9.11}$$

Pe de altă parte, sistemul (9.14) împlinind condiții identice, este asociat formei canonice cu $2n + 1$ variabile (noi):

$$\theta' = P_k\, dQ^k - K(Q, P; t)\, dt. \tag{9.15}$$

Atît forma θ cît și forma θ' au același covariant biliniar, anume, egal cu zero, căci variabilele respective trebuie să satisfacă ecuațiile canonice (9.13), respectiv (9.14), care nu sînt altceva decît sistemele asociate formelor θ și θ'. Dar, două forme P faff, care au același covariant biliniar, diferă între ele, cel mult, prin diferențiala totală a unei funcții arbitrare de variabile. Așadar:

$$(p_k dq^k - H dt) - (P_k dQ^k - K dt) = dV(q, p; Q, P; t). \tag{9.16}$$

[1]) v. *G. Prange*, [16], p. 776.

Este clar că transformările (9.12) permit să se aleagă funcția V ca să depindă numai de *una* din perechile care pot fi formate cu cele patru variabile q, p, Q, P și de t. Să luăm, pentru a fixa ideile, $V = V(q, Q, t)$.

324. **Transformări „complet" canonice.** Dacă în ecuațiile (9.16) funcția V nu conține explicit timpul, transformarea canonică se numește *completă*. În acest caz, nici relațiile de transformare (9.12) nu vor conține explicit timpul. Dar atunci, funcția hamiltoniană H se va bucura de aceeași proprietate, rămînînd neschimbată prin transformare. Ecuația (9.16) devine:

$$p_k\, dq^k - P_k\, dQ^k = dV\,(q, p;\ Q, P;\ t). \tag{9.17}$$

O formulare, deosebită de precedenta, a condiției necesare și suficiente pentru ca o transformare să fie complet canonică, dăm la § 367, cu ajutorul simbolilor numiți *parantezele lui* Lagrange și *parantezele lui* Poisson.

325. **Transformări omogene** (E. Mathieu). În cazul cînd funcția V este identic nulă, transformarea (9.17) se reduce la forma omogenă:

$$p_k\, dq^k = P_r\, dQ^r \tag{9.18}$$

care definește variabilele p, q și P, Q ca egal îndreptățite. Numele de „omogen" provine din proprietatea: înmulțind o variabilă, p, de pildă, cu un factor, variabila P se va multiplica prin același factor.

326. **Teoremă.** *Orice transformare canonică este transformare de contact.* Dacă vom considera timpul drept un parametru, transformarea canonică generală (9.16), unde apare t, poate să fie exprimată ca o transformare de contact:

$$p_k\, dq^k - P_k\, dQ^k = dV\,(q, Q;\ t). \tag{9.19}$$

În adevăr, este suficient să punem:

$$K(Q, P;\ t) = H(q, p;\ t) + \frac{\partial V(q, p;\ t)}{\partial t}. \tag{9.20}$$

Se verifică imediat că o transformare complet canonică satisface condiției:

$$K(Q, P;\ t) = H(q, p;\ t) \tag{9.20'}$$

unde însă t apare ca un parametru *invariabil la transformare*.

Funcția V din (9.19) se numește *funcție generatoare a transformării*.

327. **Ecuațiile de transformare.** Din (9.19) deducem:

$$p_k = \frac{\partial V}{\partial q^k};\qquad P_k = -\frac{\partial V}{\partial Q^k},\qquad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{9.21}$$

relații care definesc explicit transformarea canonică generată de funcția $V(q^r, Q^r, t)$. În adevăr, din primele n ecuații (9.21) vom deduce pe cele n coordonate Q^k; apoi, din celelalte n ecuații (9.19) vom calcula coordonatele conjugate P^k. Ecuația (9.20) ne va da noua funcție hamiltoniană $K(Q, P;\ t)$.

Scanned with OKEN Scanner

Din punct de vedere analitic, trebuie observat că sistemul (9.21) permite calculul variabilelor q^h și p_h în funcție de Q^h și P_h. Pentru aceasta este necesar ca determinantul lui Hesse să fie diferit de zero:

$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial q^r \, \partial Q^r} \right| \neq 0;$$

ceea ce admitem că are loc.

328. **Existența legăturilor.** Ecuațiile de legătură:

$$\Omega_r (q, Q; t) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots m < n) \tag{9.22}$$

modifică ecuațiile de transformare (9.21). Aplicînd metoda multiplicatorilor lui Lagrange deducem, din (9.19), cu condițiile suplimentare (9.22), ecuațiile de transformare:

$$p_h = \frac{\partial V}{\partial q^h} + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \frac{\partial \Omega_s}{\partial q^h}; \quad P_h = -\frac{\partial V}{\partial Q^h} - \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \frac{\partial \Omega_s}{\partial Q^h} \tag{9.23}$$

$$(k = 1, \ldots n)$$

$$K (Q^h, P_h; t) = H (q^h, p_h; t) + \frac{\partial V (q, Q; t)}{\partial t} + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \frac{\partial \Omega_s (q, Q; t)}{\partial t}. \tag{9.24}$$

329. **Transformare punctuală extinsă.** Dacă legăturile (9.22) sînt în număr de n și independente de t, transformarea omogenă (9.18) devine o transformare punctuală extinsă. În adevăr, cele n ecuații (9.22) independente de t:

$$\Omega_r (q, Q) = 0$$

permit calcularea lui q în funcție de Q:

$$q^r = q^r (Q^1, \ldots, Q^n). \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \tag{9.25}$$

După relația (9.18) va trebui să avem, în acest caz:

$$P_r = p_h \frac{\partial q^r}{\partial Q^h}. \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \tag{9.26}$$

Presupunînd determinantul jacobian diferit de zero:

$$\left| \frac{\partial q^r}{\partial Q^h} \right| \neq 0,$$

ecuațiile (9.26) se pot rezolva în raport cu p_h:

$$p_h = p_h (P_r, Q^r). \tag{9.27}$$

Relațiile (9.25) și (9.27) definesc o *transformare punctuală extinsă*.

330. **Observație.** Dacă în ambii membri ai relației (9.17) adunăm diferențiala totală:

$$d (\Sigma P_h Q^h)$$

și considerăm drept funcție generatoare pe $V (q, P)$, ceea ce revine a înlocui în V pe toți Q cu P, din (9.18), obținem:

$$p_h \, dq^h + Q^h \, dP_h = dV^* (q, P)$$

Scanned with OKEN Scanner

însemnînd cu:

$$V^* = V + \sum P_k Q^k.$$

Relațiile de transformare (9.21) devin:

$$p_k = \frac{\partial V^*}{\partial q^k}; \quad Q^k = \frac{\partial V^*}{\partial P_k}. \tag{9.28}$$

În mod analog putem construi și alte combinații de cîte o pereche din cele patru variabile care apar în argumentul lui V. Transformarea (9.28) are, în special, o aplicație deosebit de utilă în teoria cuantelor și în calculul perturbațiilor (Cap. XIII).

C. TRANSFORMĂRI INFINITEZIMALE

331. **Definiția transformării infinitezimale.** Să considerăm o transformare:

$$Q^k = Q^k(q^r, p_r; \lambda); \; P_k = P_k(q^r, p_r; \lambda), \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{9.29}$$

care depinde de un parametru λ, așa fel încît, pentru o anumită valoare a acestui parametru $\lambda = \lambda_0$, transformarea (9.29) să devină o transformare identică:

$$Q^k(\lambda_0) = q^k; \; P_k(\lambda_0) = p_k. \tag{9.30}$$

Punem $\lambda - \lambda_0 = \varepsilon$ și presupunem că putem dezvolta funcțiile (9.29) după puterile lui ε, sub forma:

$$\begin{aligned} Q^k &= q^k + \varepsilon\varphi_k(q^r, p_r) + \cdots; \\ P_k &= p_k + \varepsilon\psi_k(q^r, p_r) + \cdots \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{9.31}$$

Dacă ne mărginim la valori extrem de mici pentru ε, putem opri dezvoltarea (9.31) la termenii de gradul întîi în ε. Numim o astfel de transformare, *o transformare infinitezimală*. Ea este complet determinată prin cunoașterea funcțiilor φ_k și ψ_k. Se numește „simbol al transformării infinitezimale", expresia:

$$Af(q^r, p_r) = \varphi_k \frac{\partial f}{\partial q^k} + \psi_k \frac{\partial f}{\partial p_k} \tag{9.32}$$

analogă expresiei care dă diferențiala totală a unei funcții f continuă și derivabilă:

$$df(q^r, p_r) = dq^k \frac{\partial f}{\partial q^k} + dp_k \frac{\partial f}{\partial p_k}. \tag{9.33}$$

Simbolul Af, conceput ca un operator diferențial, se deosebește de simbolul diferențial df. În adevăr, df arată o operație nedeterminată, spre deosebire de Af care arată că dq^k, dp_k se înlocuiesc prin anumite funcții de q^r, p_r, definind prin aceasta, o operație determinată.

Operatorul A este permutabil cu d. În adevăr, aplicînd în (9.31) diferențiala, găsim:

$$dQ^k = dq^k + \varepsilon\, d\varphi_k; \quad dP_k = dp_k + \varepsilon\, d\psi_k.$$

Așadar:

$$A(df) = d(Af).$$

Scanned with OKEN Scanner

332. **Transformări infinitezimale de contact.** Să supunem transformarea (9.31) condiției de a fi o transformare de contact:

$$p_k\, dq^k - P_k\, dQ^k = dV\,(q, p). \tag{9.17}$$

După (9.31) membrul întîi este dezvoltabil după puterile lui ε. Este evident că același lucru se va petrece și cu membrul al doilea:

$$V = V_0 + \varepsilon V_1\,(q, p) + \ldots$$

Neglijînd termenii în ε^2 și superiori din (9.17), obținem:

$$\varepsilon\,(\psi_k\, dq^k + p_k\, d\varphi_k) = \varepsilon\, dV_1\,(q^r, p_r).$$

Simplificăm cu ε și adăugăm în ambii membri diferențiala totală $d(p_k \varphi_k)$. Deducem:

$$\varphi_k\, dp_k - \psi_k\, dq^k = dK\,(q^r, p_r) \tag{9.34}$$

unde, după relația (9.20) am pus:

$$H \to K = V_1 + p_k \varphi_k\,(q, p).$$

Relația (9.34) definește transformarea:

$$\varphi_k = \frac{\partial K\,(q,\ p)}{\partial p_k};\quad \psi_k = -\frac{\partial K\,(q,\ p)}{\partial q^k}. \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

Dar atunci, (9.31) devine:

$$Q^k = q^k + \frac{\partial K\,(q,\ p)}{\partial p_k}\,\varepsilon\,;\quad P_k = p_k - \frac{\partial K\,(q,\ p)}{\partial q^k}\,\varepsilon. \tag{9.35}$$

333. **Teoremă.** *Deplasarea punctului figurativ pe traiectorie în spațiul fazelor, conform cu ecuațiile de mișcare ale lui H a m i l t o n, poate fi considerată ca o succesiune automată de transformări infinitezimale de contact.*

În adevăr, considerînd transformarea (9.35) ca o transformare „admisă" de sistemul canonic, variabilele q, p pot fi considerate ca valori inițiale luate de coordonate în momentul t, cînd punctul figurativ începe deplasarea pe traiectorie, iar (Q, P) ar fi valorile „elementului" în momentul $t + \delta t$.

Atunci, ecuațiile (9.35) pot să fie scrise:

$$\delta q^k = \frac{\partial K}{\partial p_k}\,\varepsilon;\quad \delta p_k = -\frac{\partial K}{\partial q^k}\,\varepsilon. \tag{9.36}$$

Punînd, în (9.36), $\varepsilon = \delta t$ și trecînd la limită, obținem sistemul hamiltonian. Așadar, succesiunea de valori pentru q^k și p_k, obținută prin (9.36), reprezintă variația datorită deplasării conformă ecuațiilor canonice și, în același timp, un șir de transformări infinitezimale.

334. **Teorema reciprocității.** (H. v. H e l m h o l t z). În anumite chestiuni de Fizică teoretică, de pildă în teoria propagării fasciculelor de radiații care transportă energia radiantă[1]), prin urmare, pentru anumite sisteme dinamice definite prin starea ce posedă în anumit moment, joacă un rol important teorema citată mai sus, după care: „variația (suficient de mică)

[1]) v. *I. Plăcinteanu*, Electromagnetismul [34].

aplicată asupra coordonatelor, într-un interval de timp dat (suficient de mic), atunci cînd variația se efectuează în sensul direct al mișcării sistemului dinamic, este egală cu variația produsă asupra coordonatelor, în același interval de timp, cînd mișcarea ar avea loc în sens invers".

Considerînd coordonatele (q, p) în momentul t drept transformatele de contact ale coordonatelor q_0, p^0 din momentul $t_0 < t$, le aplicăm două deplasări virtuale, pe două traiectorii vecine, δ_1 și δ_2, independente.

Condiția ca transformarea să fie de contact este:

$$\delta_1 p_r \, \delta_2 q^r - \delta_2 p_r \, \delta_1 q^r = \delta_1 p_r^0 \, \delta_2 q_0^r - \delta_2 p_r^0 \, \delta_1 q_0^r. \tag{9.37}$$

Să particularizăm deplasările virtuale δ_1 și δ_2, precum urmează:

δ_1 să reprezinte variația $(q, p) \to (q^1, \ldots, q^n; p_1, \ldots, p_{s-1}, p_s + \delta p_s, p_{s+1}, \ldots, p_n)$ în momentul t;

δ_2 să reprezinte variația $(q^0, p_0) \to (q_0^1, \ldots, q_0^n; p_{11}^0, \ldots, p_{k-1}^0, p_k^0 + \delta p_k^0, p_{k+1}^0 \ldots, p_n^0)$ în momentul t_0.

Condiția (9.37) devine:

$$\delta_1 p_s \, \delta_2 q^s = - \delta_2 p_k^0 \, \delta_1 q_k^0.$$

Această relație exprimă teorema enunțată. În adevăr, din cauza variației lui p_k^0 (anume, $\delta_2 p_k^0$) în sensul direct al mișcării, coordonata q^s suferă o variație $\delta_2 q^s$, care este egală și de sens contrar cu variația pe care o suferă q_k^0 (anume, $\delta_1 q_k^0$) în sens contrar mișcării, din cauza variației $\delta_1 p_s$.

Capitolul X

INVARIANȚII INTEGRALI AI SISTEMELOR HAMILTONIENE

335. **Proprietăți generale ale sistemelor diferențiale hamiltoniene.** Sistemul de ecuații diferențiale ale Dinamicii, sub forma canonică datorită lui W. R. Hamilton, face parte din clasa generală de ecuații diferențiale de ordinul întîi, scrise sub *forma normală*:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_m; t) \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \tag{10.1}$$

unde X_i sînt funcții date, continue și derivabile de variabilele x_i și t. Distincția între variabilele dependente x_i și variabila independentă t (exemplu, timpul) nu are, din punct de vedere *analitic*, mare însemnătate; de aceea, vom opera adeseori în spațiul A_{m+1} al varietății $(x_1, x_2, \ldots; x_m; t)$, pentru generalitatea și simetria raționamentului.

Sistemele de forma (10.1) se bucură de proprietăți analitice de mare importanță. Aceste proprietăți sînt, în consecință, de mare însemnătate și pentru Mecanică, deoarece sistemul hamiltonian intră în tipul (10.1).

Scanned with OKEN Scanner

Una din aceste proprietăţi este calitatea pe care-o posedă sistemul (10.1) de a păstra invariante anumite expresii integrale şi forme diferenţiale, în sensul ce vom defini mai jos. Această proprietate este, între altele, capitală pentru dezvoltarea matematică a teoriei cuantelor, clasică.

Folosind imaginea spaţiu-timp, putem spune că în varietatea $A_{m+1}(x_1, \ldots, x_m; t)$ există o curbă orară satisfăcînd sistemului (10.1), anume:

$$x_i = x_i(t), \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \tag{10.2}$$

care trece prin punctul dat $P_0\ (t = 0;\ x_i^0)$. Şirul acestor curbe traiectorii formează (după T. Levi-Civita) o *congruenţă*. Punînd în evidenţă condiţia de a trece prin P_0, ecuaţia unei traiectorii (10.2) se scrie:

$$x_i = x_i\,(t; x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0); \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \tag{10.3}$$

valorile iniţiale fiind, aşadar, definite prin ecuaţiile:

$$x_i^0 = x_i\,(0; x_1^0, \ldots, x_m^0). \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

Să admitem că determinantul jacobian este diferit de zero:

$$\Delta(t) = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)} \neq 0.$$

În acest caz, putem rezolva sistemul (10.3). Se obţine:

$$x_i^0 = y_i\,(t; x_1, x_2, \ldots, x_m). \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \tag{10.4}$$

Reamintim că o funcţie de forma (10.4) (*una* singură, x_i^0 fiind o constantă arbitrară), constituie o integrală primă a sistemului (10.1) dacă se reduce identic la o constantă x_i^0 cînd toţi x_i sînt soluţii de-ale sistemului considerat (10.1).

Mai multe integrale prime y_1, $y_2 \ldots$ se numesc independente dacă nu satisfac identic la o relaţie algebrică de forma:

$$F(y_1, y_2 \ldots) = 0.$$

Cîtimea x_i^0 fiind constantă, condiţia ca funcţia (10.4) să fie o integrală a sistemului (10.1) este:

$$\frac{dy_i}{dt} = 0; \quad \text{deci,} \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial y_i}{\partial t} = 0;$$

sau, după (10.1):

$$X(y_i) \equiv \sum_{j=1}^{m} X_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial y_i}{\partial t} = 0.$$

Pentru simetrie, să punem $X_{n+1} = 1$ şi $x_{m+1} = t$. Ecuaţia precedentă se va scrie:

$$X(y_i) \equiv \sum_{j=1}^{m+1} X_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = 0. \tag{10.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relațiile (10.4) și (10.5) rezultă că orice integrală a ecuației diferențiale:

$$X(y) = 0 \tag{10.6}$$

se reduce la o constantă pentru $x_i(t)$ satisfăcînd sistemul (10.1).

Diferențiala totală a oricărei funcții $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_m; t)$ se poate pune sub forma:

$$df = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (dx_i - X_i\, dt) + X(f)\, dt \tag{10.7}$$

unde λ_i sînt funcții convenabile de (x_i, t). În adevăr, este suficient să observăm că $\lambda_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ și că X exprimă membrul întîi al ecuației (10.5) pentru a verifica relația (10.7). După (10.6), condiția necesară și suficientă ca f să fie o integrală primă $f = y$ a sistemului (10.1) este $X(f) = 0$. Dar atunci, expresia (10.7) a diferențialei totale df a unei integrale prime formulează teorema: diferențiala totală a oricărei integrale prime este o combinație liniară a următoarelor m forme diferențiale liniare:

$$dx_i - X_i\, dt$$

și reciproc, fiecare din aceste forme este o combinație liniară a diferențialelor totale a m integrale prime independente.

Întregul sistem de m funcții (10.4) care reprezintă aceeași curbă traiectorie ca și ecuațiile (10.3) constituie integrala generală a sistemului diferențial (10.1).

Dacă se cunosc m integrale independente $y_1, y_2, \ldots, y_m$, atunci, orice altă integrală y, a sistemului, (10.1) este o funcție de aceste m integrale prime. În acest caz, determinantul funcțional este nul:

$$\Delta'(y) = \frac{D(y; y_1, y_2, \ldots, y_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})} = 0; \tag{10.8}$$

ceea ce se verifică imediat diferențiind pe $y = y(y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

Din această observație putem deduce echivalența ecuațiilor (10.6) și (10.8). Vom putea, atunci, găsi o funcție multiplicatoare $M(x_1, x_2, x_m; t)$, astfel încît

$$M X(y) = \Delta'(y).$$

Asupra proprietăților funcției M vom reveni mai tîrziu (§ 350).

336. **Condiția ca sistemul diferențial normal să admită o transformare infinitezimală.** Fie sistemul diferențial:

$$Af = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Condiția ca el să admită o transformare infinitezimală se poate exprima prin relația:

$$X(Af) - A(Xf) = \lambda X(f) \tag{10.9}$$

unde λ este un coeficient convenabil, iar $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_m; t)$. În adevăr,

Scanned with OKEN Scanner

dacă sistemul (10.1) posedă integrala primă $f = \text{const}$, este satisfăcută ecuația:

$$X(f) = 0.$$

Transformarea infinitezimală considerată preface pe f în Af. Așadar, a spune că sistemul (10.1) *admite* această transformare, înseamnă a spune că Af este tot o integrală primă. Prin urmare, trebuie să fie satisfăcută ecuația:

$$X(Af) = 0.$$

Or, această ecuație conține derivate parțiale de ordinul al doilea. De aceea, este mai convenabil s-o înlocuim prin ecuația echivalentă:

$$X(Af) - A(Xf) = 0$$

care, după cum se poate verifica ușor, nu conține decît derivate parțiale de ordinul întîi.

Dar această condiție implică, pentru membrul întîi al ecuației de mai sus, forma exprimată prin relația (10.9).

Observație. Transformarea infinitezimală de simbol $X(f)$ satisface, evident, condiției (10.9). Dar această transformare nu reprezintă altceva decît deplasarea unui punct P pe curba integrală ce trece prin acest punct: ea lasă invariante curbele integrale (§ 326).

337. **Ecuațiile variațiilor.** Fie o soluție particulară pe care o vom numi *soluție fundamentală* $x_1, x_2, \ldots, x_m$, a sistemului diferențial (10.1). Să considerăm în același moment t, soluția vecină $x_1 + \delta x_1, \ldots, x_m + \delta x_m$, deplasarea foartea mică δ fiind compatibilă cu ecuațiile de mișcare (10.1). Sistemul de valori precedent trebuie să satisfacă ecuațiile:

$$\frac{d}{dt}(x_i + \delta x_i) = X_i(x_1 + \delta x_1, \ldots, x_m + \delta x_m ; t). \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

Scăzînd din ecuația precedentă ecuația (10.1), deducem:

$$\frac{d}{dt}(\delta x_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \delta x_j + \text{termeni de ordin superior în } \delta x.$$

Trecînd la o variație infinitezimală $\delta \to d$, putem neglija termenii mici, începînd cu $(dx)^2$. Rezultă că variațiile dx_i ale soluției fundamentale vor satisface sistemului de m ecuații diferențiale numite de Poincaré ecuațiile variațiilor soluțiilor sistemului (10.1), anume:

$$\frac{d}{dt}(dx_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j. \quad (i = 1, 2, \ldots m) \qquad (10.10)$$

Substituind în ecuațiile (10.10) soluția fundamentală, vom calcula pe $dx_1, \ldots, dx_m$, și prin urmare, vom deduce o *soluție infinitezimal vecină*.

338. **Observație.** Este posibil să cunoaștem o soluție particulară a ecuațiilor (10.10′) fără să cunoaștem, în prealabil, soluția fundamentală a sistemului (10.1) care a servit la formarea ecuațiilor (10.10) corespunzătoare acelei soluții. În adevăr, dezvoltînd derivata din membrul întîi al ecuațiilor (10.10) și punînd:

$$dx_i = \varepsilon \varphi_i(x_1, \ldots, x_m; t)$$

unde ε este o cîtime foarte mică, deducem că funcțiile φ_i satisfac sistemului:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + X_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \varphi_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}. \quad (i = 1, 2, \ldots m) \quad (10.10')$$

La orice soluție φ_i a ecuațiilor (10.10') corespunde o infinitate de transformări infinitezimale care lasă invariant sistemul (10.1). În adevăr, este evident că:

$$Af = \sum_1^m \varphi_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

este simbolul transformării infinitezimale $x_i' = x_i + \varepsilon\varphi_i$ (unde $t = \text{const.}$), admisă de (10.10'). Dar atunci, și:

$$Bf = Af + \lambda \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + X_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)$$

unde λ este o funcție arbitrară, va fi o transformare infinitezimală admisă de (10.10').

339. **Proprietate.** Cunoașterea unei integrale prime $F(q, p; t) = \text{const.}$, a sistemului hamiltonian, face posibilă găsirea unei soluții particulare a sistemului de ecuații ale variațiilor coordonatelor conjugate hamiltoniene:

$$\frac{d}{dt}(\delta q^k) = \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q^s} \delta q^s + \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_s} \delta p_s;$$

$$\frac{d}{dt}(\delta p_k) = -\frac{\partial^2 H}{\partial q^k \partial q^s} \delta q^s - \frac{\partial^2 H}{\partial q^k \partial p_s} \delta p_s.$$

Să aplicăm transformarea infinitezimală (9.36) § 333 generată de funcția cunoscută $F(q, p; t)$:

$$\delta q^s = \varepsilon \frac{\partial F}{\partial p_s}; \quad \delta p_s = -\varepsilon \frac{\partial F}{\partial q^s}. \quad (10.11)$$

Substituind în ecuațiile precedente, obținem:

$$\frac{d}{dt}(\delta q^k) = \varepsilon \sum_{s=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q^s} \frac{\partial F}{\partial p_s} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_s} \frac{\partial F}{\partial q^s} \right] =$$

$$= \varepsilon \frac{\partial}{\partial p_k} \sum_s \left[\left(-\frac{\partial F}{\partial p_s} \dot{p}_s - \frac{\partial F}{\partial q^s} \dot{q}^s \right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p_k \partial p_s} \dot{p}_s + \frac{\partial^2 F}{\partial p_k \partial q^s} \dot{q}^s \right) \right] =$$

$$= \varepsilon \frac{\partial}{\partial p_k} \left(-\frac{dF}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} \right) + \varepsilon \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} \right) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} \right) = \frac{d}{dt} \left(\varepsilon \frac{\partial F}{\partial q_k} \right)$$

și în mod analog:

$$\frac{d}{dt}(\delta p_k) = -\frac{d}{dt} \left(\varepsilon \frac{\partial F}{\partial q^k} \right).$$

Așadar, soluția:

$$\delta q^k = \varepsilon \frac{\partial F}{\partial p_k}; \quad \delta p_k = -\varepsilon \frac{\partial F}{\partial q^k} \quad (10.11')$$

Scanned with OKEN Scanner

satisface identic ecuațiile variațiilor soluțiilor q^k, p_k ale sistemului hamiltonian. Or, soluția (10.11′) definește exact transformarea infinitezimală (10.11). Așadar, transformarea (10.11) care transportă fiecare traiectorie în una vecină, transformă întreaga familie de curbe traiectorii în ea însăși.

Din ecuațiile (10.11) deducem forma finită a transformării infinitezimale:

$$\delta q^s = \varphi_s\,(q^1, q^2, \ldots, q^n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n;\ t)$$
$$\delta p_s = \psi_s\,(q^1, q^2, \ldots, q^n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n;\ t)$$
$$\delta t = 0$$

care transportă fiecare curbă integrală într-o curbă integrală infinitezimală vecină. Prin integrarea ecuațiilor precedente se obține un *grup de transformări* cu un termen.

Teorema precedentă se exprimă sub forma: oricărei integrale $F\,(q, p;\ t) = \text{const.}$ a sistemului canonic îi corespunde un grup posedînd transformarea infinitezimală (10.11) care transportă curbele integrale ale sistemului canonic în ele însele.

340. **Definiția invarianților integrali.** Henry Poincaré numește „invariant integral" al sistemului (10.1) *o integrală* extinsă la un domeniu V_α constituind o varietate α-dimensională ($\alpha \leqslant m$) din R_m, formată din puncte *simultane* (deci, considerate în același moment t_0), integrală care nu-și schimbă valoarea dacă deplasăm punctele acestui domeniu de-a lungul traiectoriilor respective care satisfac ecuațiile (10.1) pînă într-un moment t. Analitic, această definiție se exprimă precum urmează. Să considerăm în $R_m\,(t = \text{const.})$ o varietate α-dimensională V_α^0 ocupată de toate punctele P, în momentul t. Cum $\Delta \neq 0$, toate aceste puncte vor ocupa, în momentul t, o regiune α-dimensională V_α, în R_m.

Să considerăm o funcție continuă, cu derivate continue și finite de mărimile care figurează în argument $F\left[x_i\left(t, x_j^0\right);\ t\right]$, așadar, funcție de variabilele x_i soluții ale sistemului (10.1). Fie $d\tau_{k\alpha}$ una din cele $\nu = C_m^\alpha$ expresii ale elementului de volum α-dimensional care se pot alcătui în V_m; de exemplu

$$d\tau_{k,\alpha} = dx_1 \cdot dx_2 \ldots dx_\alpha .$$

Integrala:

$$J = \int_{V_\alpha} \sum_{k=1}^{\nu} F_k\,(x_r;\ t)\,d\tau_{k,\alpha} \tag{10.12}$$

este un *invariant integral* al sistemului (10.1) dacă posedă o valoare independentă de t pentru x_r soluții ale sistemului (10.1). Numărul α se numește *ordinul* invariantului corespunzător.

Prin definiție, urmează că:

$$J = \int_{V_\alpha^0} \sum_{k=1}^{\nu} F_k\,(x_r^0\ ;\ 0)\,d\tau_{k,\alpha}^0 . \tag{10.12′}$$

Invariantul este *absolut* dacă domeniul V_α^0 este *oarecare*; dacă însă domeniul

V_α^0, asupra căruia este extinsă integrala (10.12), este *închis*, invariantul corespunzător se numește *relativ*. Această deosebire se înlătură analitic cu ajutorul teoremei lui G. G. Stokes (Anexa III § 52), care permite transformarea unui invariant relativ în absolut.

341. **Invariant integral absolut, complet** (E. Cartan). Să considerăm în R_m o varietate V_α infinitezimal vecină lui V_α^0, care să fie, la rîndul ei, arbitrară. Atunci, integranții ce figurează în (10.12) și (10.12′) vor fi egali:

$$\sum_k F_k\,(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ t)\ d\tau_{k,\alpha} = \sum_k F_k\,(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0;\ 0)\ d\tau_{k,\alpha}^0. \quad (10.13)$$

Pentru prescurtare și generalizare să notăm forma diferențială care figurează în (10.13) prin $F\,(x_i;\ t;\ dx_i)$, numită „elementul" invariantului. Să facem în membrul al doilea al egalității (10.13) substituția (10.4); el va deveni, prin aceasta, o funcție de $(x_i,\ t)$ și $(dx_i,\ dt)$; s-o însemnăm cu Φ. Avem:

$$F\,(x_i^0;\ 0;\ dx_i) = \Phi\,(x_i;\ t;\ dx_i;\ dt). \quad (10.14)$$

Trebuie de observat însă, și aceasta este esențial, că din modul cum a fost formată funcția Φ rezultă că valoarea ei numerică depinde numai de valorile inițiale $(x_i^0,\ dx_i^0)$ și nu depinde de punctul special ales $(x_i,\ t)$ pe traiectoria actuală și nici de punctul $(x_i + dx_i;\ t + dt)$ ales pe traiectoria infinitezimal vecină. Așadar, Φ este o formă invariantă, dar de o categorie mai generală decît invariantul de la care am pornit, deoarece nu mai sîntem obligați să ne restrîngem numai la considerarea punctelor simultane. Tehnica de alcătuire a formei finale Φ, din forma inițială F, este simplă. Dacă socotim pe t constant în relațiile (10.4), trebuie să avem, prin definiție:

$$\Phi\,(x_i;\ t;\ dx_i,\ 0) = F\,(x_i;\ t;\ dx_i). \quad (10.15)$$

Dacă, însă, am considera pe t variabil, el va interveni în (10.15) și sub forma diferențială dt; dar, în membrul al doilea, această diferențială va apare numai din calcularea variațiilor $dx_i^0 = dy_i$. Or, ultima diferențială este diferențială totală a unei integrale prime; deci, după § 335, ea se exprimă drept o combinație liniară a formelor $dx_i - X_i\,dt$. Așadar, egalitatea (10.15) devine:

$$\Phi\,(x_i;\ t;\ dx_i;\ dt) = F\,(x_i;\ t;\ dx_i - X_i\,dt). \quad (10.16)$$

Invariantul integral absolut, pe care îl obținem din (10.11) dacă în forma diferențială de sub integrală înlocuim pe toți dx_i prin $dx_i - X_i\,dt$, se numește *invariant complet*. Trebuie de reținut că procedeul (10.16) de constituire a invarianților completi este valabil numai pentru invarianți *absoluți*; el *nu* este aplicabil invarianților *relativi*, căci, pentru aceștia, din invarianța integralei (10.12) nu putem conclude invarianța formei diferențiale (10.13) de sub integrală.

Concluzie. O formă diferențială care poate să fie exprimată cu ajutorul integralelor prime și al diferențialelor lor este invariantă pentru sistemul ecuațiilor diferențiale care posedă aceste integrale prime.

342. **Teoreme.** 1. *Un invariant integral relativ de ordinul α este echivalent cu un invariant integral absolut de ordinul $\alpha + 1$.*

Scanned with OKEN Scanner

Pentru simplificare, să considerăm un invariant relativ de ordinul întîi:

$$\oint \sum_i F_i\,(x_j;\ t)\,dx_i$$

integrala fiind extinsă la o curbă închisă. Din condiția de invarianță:

$$\frac{d}{dt}\oint \sum_i F_i\,dx_i = 0\,,$$

nu putem deduce constanța elementului, căci nu este permis să derivăm sub semnul integralei, domeniul de integrare nefiind complet arbitrar.

Formula lui G. G. S t o k e s (Anexa II § 52) ne dă însă:

$$\oint \sum F_k\,dx_k = \int_{(s)} \sum_{ij} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right) dx_i\,dx_j$$

integrala din membrul a doilea fiind extinsă la domeniul arbitrar care trece prin curba închisă asupra căreia se extinde integrala din membrul întîi.

Se vede că teorema lui S t o k e s mărește cu o unitate multiplicitatea varietății asupra căreia este extinsă integrala care exprimă invariantul relativ.

2. *Orice sistem diferențial de forma* (10.1) *posedă un număr arbitrar de invarianți integrali.*

În adevăr, dacă în expresia (10.12) înlocuim sistemul de valori inițiale x_i^0, dx_i^0 prin expresiile (10.4), se obține un invariant de forma:

$$\int_{V_\alpha} \sum_1^\nu \Phi_k\,(x_i;\ t)\,d\tau_k$$

al cărui integrand depinde de sistemul de valori inițial ales. Or, cum aceste valori pot fi variate la voie, teorema este stabilită.

343. **Invarianți integrali de ordinul întîi.** O categorie importantă de invarianți integrali, pentru Mecanică, este grupa invarianților de ordinul întîi. Ea joacă, de altfel, un mare rol și în modelul cuantic de atom, pentru determinarea „traiectoriilor stabile" prin atribuirea unor valori discrete anumitor invarianți integrali ai ecuațiilor de mișcare (A. S o m m e r f e l d).

Din punct de vedere analitic, invarianții de ordinul întîi se bucură de proprietăți interesante, deoarece integrandul se poate prezenta drept o formă P f a f f, așa încît, cel puțin pentru invarianții absoluți, studiul lor se reduce la studiul pfaffienilor.

344. **Ecuația diferențială de condiție.** Dacă integrala:

$$J = \int \sum_{i=1}^{m} F_i(x_1, x_2, \ldots, x_m; t)\,dx_i \qquad (10.17)$$

este un invariant absolut al sistemului (10.1), atunci din relația de condiție $\frac{dJ}{dt} = 0$, deducem:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{m} F_i\,(x_j;\ t)\,dx_i = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Efectuînd derivarea, obținem succesiv:

$$\sum_i \left[dx_i \frac{dF_i}{dt} + F_i \frac{d}{dt}(dx_i) \right] = 0$$

sau, după (10.10):

$$\sum_{i,j} \left[dx_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{dt} \right) + F_i \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j \right] = 0$$

sau încă:

$$\sum_{i,j} \left(\frac{\partial F_i}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} X_j + F_j \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) dx_i = 0.$$

Or, cum $dx_1, \ldots, dx_m$ sînt independente, ecuația precedentă se transformă în ecuația de condiție la care trebuie să satisfacă funcția F_i pentru ca expresia (10.17) să fie un invariant integral absolut de ordinul întîi al sistemului (10.1), anume:

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j} X_j + \sum_j F_j \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \quad (10.18)$$

Consecință. Dacă integrala (10.17) este un invariant absolut pentru sistemul (10.1), atunci:

$$\sum_i F_i (x_1, \ldots, x_m)\, dx_i = \text{const.}$$

este o integrală primă a sistemului diferențial (10.10) și reciproc. În adevăr, această proprietate este implicită în condiția ca F_i să satisfacă ecuația (10.18).

345. **Invariant integral relativ de ordinul întîi, al ecuațiilor lui Hamilton.** Un astfel de invariant a fost construit pentru prima oară de H. Poincaré, sub forma:

$$J_1 = \oint \sum_k p_k dq^k \qquad (10.19)$$

pentru sistemul canonic:

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k} \qquad (10.20)$$

(q^k, p_k) fiind elementul de fază în spațiul fazelor. Integrala (10.19) este extinsă la o curbă închisă (C) în R_{2n}.

Invarianța lui J_1 se verifică dacă dJ_1/dt va fi nul atunci cînd punctul repezentativ se deplasează pe o traiectorie corespunzătoare sistemului (10.20). Ecuațiile unei traiectorii fiind:

$$p_k = p_k (t; q_0^r, p_r^0); \quad q^k = q^k (t; q_0^r, p_r^0) \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \quad (10.21)$$

aceste relații definesc o *corespondență biunivocă* între (q^k, p_k) la momentul t și valorile inițiale (q_0^k, p_k^0) la momentul $t = 0$.

Fie (C_0) o curbă închisă, inițială; ecuația parametrică a acestei curbe se scrie:

$$p_k^0 = p_k^0(s); \quad q_0^k = q_0^k(s). \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \quad (10.22)$$

Curba (C), închisă, pe care se vor găsi în momentul t toate punctele care erau inițial pe (C_0), se va deduce din (C_0) prin corespondența (10.21). Vom obține pentru (C) ecuațiile:

$$p_k = p_k(t; s); \quad q^k = q^k(t; s). \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

În felul acesta, J_1 va fi o funcție de timp, prin integrand, conturul de integrare (C) putînd fi socotit independent de t. Vom deriva, atunci, sub semnul integralei. Din (10.19) deducem:

$$\frac{dJ_1}{dt} = \oint \sum_k (\dot{p}_k dq^k + p_k d\dot{q}^k);$$

sau încă, integrînd odată prin părți termenul al doilea:

$$\frac{dJ_1}{dt} = \oint \sum_k (\dot{p}_k dq^k - \dot{q}^k dp_k);$$

iar, după (10.20):

$$\frac{dJ_1}{dt} = -\oint dH = 0$$

căci funcția hamiltoniană este uniformă. Prin aceasta este dovedită existența invariantului (10.19) pentru sistemele hamiltoniene.

Ne putem propune și problema inversă: care este forma sistemelor diferențiale care admit ca invariant integral relativ, de ordinul întîi, expresia (10.19).

346. **Teorema reciprocă.** *Sistemele diferențiale care admit ca invariant integral relativ de ordinul întîi expresia* (10.19) *se reduc la forma ecuațiilor hamiltoniene.*

În locul invariantului relativ (10.19) să considerăm invariantul absolut, echivalent, de ordinul al doilea:

$$J_1 = \int_{V_2} \sum_k dp_k dq^k \qquad (10.23)$$

integrala fiind extinsă la o suprafață arbitrară V_2 care trece prin curba (C), în spațiul R_{2n}.

În varietatea bidimensională V_2 să alegem coordonatele curbilinii u și v independente de t; toate punctele care aparțin lui V_2 figurînd configurații simultane. Introducînd noile coordonate, după regula schimbării de variabile sub semnul integrală, vom avea:

$$J_1 = \int \sum_{k=1}^{n} \frac{D(p_k, q^k)}{D(u, v)} du\, dv. \qquad (10.24)$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiția de invarianță a lui (10.23) devine, prin (10.24):

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{h=1}^{n}\frac{D(p_h, q^h)}{D(u, v)}\,du\,dv\right] = 0. \qquad (10.25)$$

Să dăm sistemului diferențial (10.1) forma adecvată:

$$\dot{q}^k = Q^k(q^r, p_r; t); \quad \dot{p}_k = P_k(q^r, p_r; t). \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \quad (10.26)$$

Atunci, condiția (10.25) devine:

$$\sum_{h=1}^{n}\left[\frac{D(P_h, q^h)}{D(u, v)} + \frac{D(p_h, Q^h)}{D(u, v)}\right] = 0. \qquad (10.25')$$

Cum:

$$\frac{\partial P_k}{\partial u} = \sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial P_k}{\partial q^s}\frac{\partial q^s}{\partial u} + \frac{\partial P_k}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial u}\right] \text{etc.}$$

putem scrie pentru (10.25):

$$\sum_{s,k=1}^{n}\left[\frac{\partial P_s}{\partial p_k}\frac{D(p_k, q^s)}{D(u, v)} + \frac{\partial P_s}{\partial q^k}\frac{D(q^k, q^s)}{D(u, v)} + \frac{\partial Q^s}{\partial p_k}\frac{D(p_s, p_k)}{D(u, v)} + \frac{\partial Q^s}{\partial q^k}\frac{D(p_s, q^k)}{D(u, v)}\right] = 0.$$

Dar V_2 este arbitrară; u și v de asemenea; deci, condiția precedentă cere anularea tuturor coeficienților expresiilor:

$$\frac{\partial p_s}{\partial u}\frac{\partial q^k}{\partial v}; \quad \frac{\partial q^s}{\partial u}\frac{\partial q^k}{\partial v}; \quad \frac{\partial p_s}{\partial u}\frac{\partial p_k}{\partial v}.$$

Egalînd cu zero coeficienții respectivi, obținem condițiile:

$$\frac{\partial P_k}{\partial p_s} + \frac{\partial Q^s}{\partial q^k} = 0; \quad \frac{\partial P_s}{\partial q^k} - \frac{\partial P_k}{\partial q^s} = 0; \quad \frac{\partial Q^s}{\partial p_k} - \frac{\partial Q^k}{\partial p_s} = 0.$$

Aceste relații sînt satisfăcute dacă alegem o funcție $H(q^k, p_k; t)$ astfel încît:

$$P_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k}; \quad Q^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}. \qquad (k = 1, 2, \ldots. n)$$

Or, în asemenea condiții, sistemul diferențial (10.26) ia exact forma sistemului hamiltonian cu funcția lui H a m i l t o n $H(q^k, p_k; t)$.

347. **Asupra invariantului integral relativ.** Acest invariant se definește prin relația:

$$\oint p_k\,dq^k.$$

Să considerăm un sistem de valori ale coordonatelor canonice $(q^1, q^2, \ldots, q^n; p_1, p_2, \ldots, p_n)$ drept valori finale și un sistem de valori (q_0^r, p_r^0) drept valori

inițiale, pentru o mișcare dată. Transformarea de contact $(q, p) \to (q_0, p^0)$ satisface condiției:

$$p_k dq^k - p_k^0 dq_0^k = \text{diferențială totală exactă a unei funcții uniforme.} \quad (10.27)$$

Fie (C_0) o curbă închisă, în spațiul fazelor, pe care se găsesc punctele figurative în momentul t_0; fie (C) curba închisă, în spațiul fazelor, pe care se vor găsi, în momentul t, toate punctele figurative care au aparținut curbei (C_0) în momentul t_0, după ce au străbătut traiectoriile respective, simultan, în intervalul de timp $t - t_0$, conform ecuațiilor mișcării. Să integrăm expresia (10.27) de-a lungul unui contur care pornește, pentru fiecare punct figurativ, dintr-un punct geometric al curbei (C_0), străbate traiectoria respectivă, înconjoară curba (C) într-un sens definit ca sens pozitiv, se reîntoarce pe traiectoria precedentă, înconjoară curba (C_0) și revine în punctul geometric de plecare. Rezultatul va fi:

$$\oint_C p_k dq^k = \oint_{C_0} p_k^0 dq_0^k.$$

348. **Invariantul integral, complet, al dinamicii.** Să considerăm invariantul integral absolut de ordinul al doilea:

$$J_1 = \int_{V_2} \sum_k dp_k dq^k$$

și să facem substituția pe care o putem considera drept o transformare infinitezimală:

$$dp \to dp - \dot{p}\, dt; \quad dq \to dq - \dot{q}\, dt$$

conform prescripțiilor de la § 331, și să neglijăm termenii pătratici în dt. Integrandul devine:

$$\sum_k \Phi_k = \sum_k dp_k dq^k - \sum_k \left(\dot{q}^k dp_k - \dot{p}_k dq^k\right) dt = \sum dp_k dq^k - dH\, dt.$$

În modul acesta obținem invariantul integral absolut, complet, al dinamicii:

$$\int \left[\sum_{k=1}^{n} dp_k dq^k - dH\, dt\right]. \quad (5.28)$$

Aplicînd expresiei (5.28) teorema lui S t o k e s, obținem invariantul echivalent de ordinul întîi, relativ, complet:

$$\oint \left[\sum_{k=1}^{n} p_k dq^k - H\, dt\right]. \quad (5.28')$$

Prin definiție, urmează din (5.28'):

$$\oint_{(C;\, t \neq 0)} \left(\sum_k p_k dq^k - H\, dt\right) = \oint_{(C_0;\, t=0)} \sum_k p_k^0 dq_0^k. \quad (5.28'')$$

Însemnînd cu $\varphi = \varphi(q, p; t)$ o funcţie satisfăcînd relaţiei:

$$\int_{(C_0)} d\varphi = 0,$$

din (5.28'') rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n} (p_k dq^k - p_k^0 dq_0^k) - H dt = d\varphi. \tag{5.29}$$

Expresia (5.29) este o diferenţială totală exactă.

349. **Observaţie.** În cazul invariantului de ordinul al doilea, absolut:

$$\int dp_k dq^k,$$

trecerea de la forma F la forma completă Φ (§ 341) se face mai riguros decît prin asimilarea substituţiei preconizată la § 348 cu o transformare infinitezimală (§ 341), dacă în locul elementului superficial $dp_k dq^k$ se consideră forma binară $dp_k d'q^k - dq^k d'p_k$, unde d reprezintă variaţia corespunzătoare unei coordonate curbilinii u, iar d' variaţia corespunzătoare celeilalte coordonate curbilinii v, pe care le introducem în varietatea bidimensională considerată (q, p).

Punînd:

$$F = \begin{vmatrix} dp & dq \\ d'p & d'q \end{vmatrix}$$

vom avea;

$$\Phi = \begin{vmatrix} dp - \dot{p}dt & dq - \dot{q}dt \\ d'p - \dot{p}d't & d'q - \dot{q}d't \end{vmatrix};$$

sau:

$$\Phi = dpdq - dHdt.$$

Această metodă se extinde la invarianţi mai complicaţi decît precedentul. De exemplu, $f(x, y)\, dx\, dy$, în planul (x, y); sau $f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, în spaţiul euclidian (x, y, z).

În primul caz:

$$F = f\, dxdy; \quad \Phi = f \begin{vmatrix} dx - Xdt & dy - Ydt \\ d'x - Xd't & d'y - Yd't \end{vmatrix};$$

deci:

$$\Phi = fdxdy + fdt\,(Xdy + Ydx).$$

În al doilea caz,

$$F = fdxdydz; \quad \Phi = f \begin{vmatrix} dx - Xdt & dy - Ydt & dz - Zdt \\ d'x - Xd't & d'y - Yd't & d'z - Zd't \\ d''x - Xd''t & d''y - Yd''t & d''z - Zd''t \end{vmatrix}.$$

Deci;

$$\Phi = f\,[dxdydz - (Xdydz + Ydzdx + Zdxdy)\, dt].$$

Scanned with OKEN Scanner

Această formă reprezintă în *Hidrodinamică* sau *Mecanica statistică*, *elementul de materie*, dacă $f = \rho(x, y, z)$ este *densitatea* mediului.

Invarianți integrali de ordin superior unității. Studiul invarianților integrali de ordin mai mare ca unu este legat de proprietățile *multiplicatorului lui* J a c o b i. Vom reaminti cîteva propoziții care ne vor fi de folos, datorite lui C. G. J. J a c o b i.

350. **Multiplicatorul lui Jacobi.** Să considerăm varietatea spațiu — timp $(x_1, x_2, \ldots, x_m; t)$. Funcția $M(x_1, \ldots, x_m; t)$ definită prin ecuația:

$$MX(y) = \Delta'(y)$$

se numește *multiplicatorul lui* J a c o b i.

Fie Δ_i' minorul corespunzător elementului $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ în dezvoltarea determinantului Δ', din relația (10.8) § 335. Din proprietățile determinanților urmează:

$$\Delta' = \sum_{i=1}^{m+1} \Delta_i' \frac{\partial y}{\partial x_i}.$$

Ținînd seamă de această exprimare, din relațiile (10.8) și (10.5) rezultă:

$$M(x_j)X_i = \Delta_i'. \qquad (i = 1, 2, \ldots m+1) \quad (10.30)$$

351. **Ecuația diferențială la care satisface multiplicatorul** este:

$$\sum_{i=1}^{m+1} \frac{\partial}{\partial x_i}(MX_i) = 0. \qquad (10.31)$$

Demonstrația. Observăm că ecuația (10.31) este identică ecuației:

$$\sum_{i=1}^{m+1} \frac{\partial \Delta_i'}{\partial x_i} = 0 \qquad (10.32)$$

dacă avem în vedere relația (10.30). Rămîne, așadar, să stabilim relația (10.32). Redăm demonstrația lui J a c o b i.

Să considerăm determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{m+1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & & \frac{\partial y_1}{\partial x_{m+1}} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & & \frac{\partial y_m}{\partial x_{m+1}} \end{vmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$ sînt $m+1$ constante care nu intră în expresiile $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Să dezvoltăm acest determinant după linia întîia:

$$D = \sum_{h=1}^{m+1} \Delta_i' a_i;$$

de unde:

$$\Delta_i' = \frac{\partial D}{\partial a_i}. \tag{10.33}$$

Pe de altă parte, necunoscutele $x_1, \ldots, x_{m+1}$ intră în Δ_i' numai prin intermediul derivatelor $\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}$ $\left(\text{în afară de } \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i}\right)$. Facem notația:

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} = u_{\alpha\beta}.$$

Vom avea:

$$\frac{\partial \Delta_i'}{\partial x_i} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m+1} \frac{\partial \Delta_i'}{\partial u_{\alpha\beta}} \frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial x_i} = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial \Delta_i'}{\partial u_{\alpha\beta}} \frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x_i \partial x_\beta}.$$

Sumăm ecuația precedentă pe toți i spre a obține membrul întîi al ecuației pe care o avem de stabilit (10.32). Grupînd termenii asemeni obținem:

$$\sum_{i=1}^{m+1} \frac{\partial \Delta_i'}{\partial x_i} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq i} \left(\frac{\partial \Delta_i'}{\partial u_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \Delta_i'}{\partial u_{\alpha i}} \right) \frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x_i \partial x_\beta}. \tag{10.34}$$

Ecuația (10.32) va fi stabilită dacă arătăm că paranteza din (10.34) este identic nulă. Aceasta revine a arăta că:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial a_i \partial u_{\alpha\beta}} + \frac{\partial^2 D}{\partial a_\beta \partial u_{\alpha i}} = 0 \tag{10.35}$$

după (10.33).

Să considerăm în D linia întîia $(a_1, a_2, \ldots, a_{m+1})$ și linia $(\alpha+1)$ $\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_{m+1}}\right)$, precum și coloanele i și β. Din teoria determinanților se știe că putem dezvolta D astfel încît să punem în evidență subminorul:

$$\begin{vmatrix} a_i & a_\beta \\ u_{\alpha i} & u_{\alpha\beta} \end{vmatrix} \tag{10.36}$$

În adevăr, este clar că putem scrie:

$$D = R(a_i u_{\alpha\beta} - a_\beta u_{\alpha i}) + R_1$$

unde R nu mai conține nici un element al subminorului (10.36), iar R_1 le conține liniar. Deci:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial a_i \partial u_{\alpha\beta}} = R; \qquad \frac{\partial^2 D}{\partial a_\beta \partial u_{\alpha i}} = -R.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin aceste ultime relaţii, formula (10.35) este verificată şi, prin urmare, ecuaţia (10.32), respectiv (10.31), stabilită.

Definiţie. Prin generalizare, se numeşte *multiplicator* orice soluţie a ecuaţiei (10.31).

352. **Teoremă.** *Cîtul a doi multiplicatori este o integrală primă a sistemului* (10.1) *şi reciproc.*

În adevăr, ecuaţiile (10.31) pentru multiplicatorii M_1 şi M_2 se scriu:

$$\sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\log M_1) + \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$\sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\log M_2) + \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0.$$

Prin scădere obţinem:

$$\Sigma X_i \frac{\partial}{dx_i} \left(\ln \frac{M_1}{M_2} \right) = 0$$

ceea ce înseamnă, după ecuaţia (10.5), că $\ln \frac{M_1}{M_2} = \text{const.}$ este o integrală a sistemului (10.1)

Observaţie. Însemnăm cu:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$$

şi numim această mărime *divergenţă* (Anexa III, § 44). Observăm că $\Omega = 0$ exprimă condiţia ca $M = 1$ să fie un multiplicator al sistemului (10.1).

353. **Schimbare de variabile.** Dacă în loc de variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_m$ luăm alte variabile $y_1, y_2, \ldots, y_m$, astfel încît sistemul iniţial (10.1):

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = dt$$

să se transforme în sistemul tot de aceeaşi formă:

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \ldots = dt,$$

atunci avem:

$$\Omega = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial (\Delta Y_i)}{\partial y_i} \qquad (10.37)$$

unde:

$$\Delta = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} = \frac{D(x)}{D(y)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În adevăr:

$$\Omega = \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt}\right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\frac{dy_j}{dt}\right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j Y_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)$$

sau încă,

$$\Omega = \sum_{i,j,l} \frac{\partial}{\partial y_l}\left(Y_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)\frac{\partial y_l}{\partial x_i} = \sum_{i,j,l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i}\left(Y_j \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_l \partial y_j} + \frac{\partial Y_j}{\partial y_l}\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right).$$

Dar coeficientul lui $\frac{\partial Y_i}{\partial y_l}$ este $\sum_i \frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \delta_{lj}$ (simbolul lui Kronecker).

Apoi:

$$\frac{\partial y_l}{\partial x_i} = \frac{1}{\Delta}\Delta_{il}, \text{ unde } \Delta_{il} \text{ este minorul lui } \frac{\partial x_i}{\partial y_l} \text{ în } \Delta.$$

Așadar, coeficientul lui Y_j se va scrie:

$$\frac{1}{\Delta}\sum_{i,l}\Delta_{il}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_l \partial y_j} = \frac{1}{\Delta}\sum_i \frac{D(x_1,\ldots,x_{i-1},\frac{\partial x_i}{\partial y_j},x_{i+1},\ldots,x_m)}{D(y_1,y_2,\ldots,y_m)} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial y_j}.$$

Prin urmare, expresia (10.38) devine:

$$\Omega = \sum_i \left\{\frac{1}{\Delta}Y_i\frac{\partial \Delta}{\partial y_i} + \frac{\partial Y_i}{\partial y_i}\right\} = \frac{1}{\Delta}\sum_i \frac{\partial}{\partial y_i}(\Delta Y_i)$$

și prin aceasta, relația (10.37) este stabilită.

354. **Proprietăți.**

1. Expresia $X(\psi)$ este invariantă la transformarea considerată de variabile. În adevăr:

$$X(\psi) = \sum_{i=1}^{m+1} X_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \sum_{i,j} X_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^{m+1} Y_j \frac{\partial \psi}{\partial y_j}.$$

2. Dacă M este un multiplicator relativ la variabilele (x), atunci $M\Delta$ este un multiplicator relativ la variabilele (y).

În adevăr, fie $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ integrale independente; ψ o funcție arbitrară și M_0 multiplicatorul care verifică identitatea (10.8):

$$M_0 X(\psi) = \frac{D(\psi;\psi_1,\ldots,\psi_m)}{D(x_1,\ldots,x_{m+1})}. \qquad (10.38)$$

Aplicînd schimbarea de variabile în determinantul funcțional, după relația cunoscută:

$$\frac{D(\psi)}{D(y)} = \frac{D(\psi)}{D(x)}\frac{D(x)}{D(y)}$$

Scanned with OKEN Scanner

putem scrie:

$$M_0 \frac{D(x)}{D(y)} X(\psi) = \frac{D(\psi); \psi_1, \ldots, \psi_m)}{D(y_1, \ldots, y_{m+1})}.$$

Relaţia precedentă defineşte un multiplicator:

$$M_0' = M_0 \frac{D(x)}{D(y)} \tag{10.39}$$

pentru noile variabile $(y_1, \ldots, y_m)$.

Fie o integrală f a sistemului diferenţial (10.1). După teorema de la § 352 rezultă că:

$$M = M_0 f$$

este un multiplicator relativ la variabilele (x). Aşadar, după (10.39):

$$M' = M\Delta = M_0 \, \Delta f = M_0' f \tag{10.40}$$

este un multiplicator relativ la variabilele (y). Am stabilit, prin aceasta, propoziţia enunţată.

355. **Proprietate a multiplicatorului.** Dacă se cunosc $k<m$ integrale independente $y_1, y_2, \ldots, y_k$, se poate efectua o schimbare de variabile $(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1} = t) \to (y_1, y_2, \ldots, y_{m+1})$, dintre care un număr de k variabile sînt exprimate în funcţie de celelalte $m - k + 1$ şi de k mărimi constante arbitrare (egale cu $y_1, y_2, \ldots, y_k$).

Pentru a fixa ideile, rezolvînd cele k ecuaţii ce reprezintă integralele prime, deducem primele $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ în funcţie de $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{m+1})$. Fie:

$$x_{k+1} \to y_{k+1}; \ \ldots; \ x_{m+1} \to y_{m+1}$$

şi Y_{k+i} ceea ce devine X_{k+i} cînd se înlocuiesc $x_1, \ldots, x_k$ prin $x_{k+j} = y_{k+j}$. Sistemul iniţial:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_{m+1}}{X_{m+1}} \tag{10.41}$$

se va transforma în:

$$\frac{dy_1}{0} = \ldots = \frac{dy_k}{0} = \frac{dy_{k+1}}{Y_{k+1}} = \ldots = \frac{dy_{m+1}}{Y_{m+1}}. \tag{10.42}$$

Dacă M este multiplicator pentru sistemul (10.41) putem găsi un multiplicator relativ la sistemul (10.42) şi reciproc.

Ecuaţia multiplicatorului M este:

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{dt} + \Omega = 0. \tag{10.43}$$

Dar, după relaţia (10.37):

$$\Omega = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{m-k+1} \frac{\partial (\Delta Y_{k+i})}{\partial y_{k+i}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în (10.43) $x_1,\ldots, x_k$ prin x_{k+1}, această ecuație (10.31) devine:

$$\frac{1}{M}\frac{dM_1}{dt}+\frac{1}{\Delta_1}\sum_{i=1}^{m-k+1}\frac{\partial(\Delta_1 Y_{k+i})}{\partial y_{k+i}}=0 \qquad (10.43')$$

unde prin indicele 1 am notat ceea ce devine M sau Δ prin substituția valorilor lui $x_1,\ldots,x_k$. Este ușor de verificat că ecuația (10.43') se scrie:

$$\sum_{i=1}^{m-k+1}\frac{\partial}{\partial y_{k+i}}(M_1\Delta_1 Y_{k+i})=0 \qquad (10.44)$$

care arată că $M_1\Delta_1$ este multiplicator pentru sistemul (10.42). Teorema reciprocă este evidentă.

356. **Teorema „ultimului" multiplicator** (J a c o b i). Presupunem că se cunosc $m-1$ integrale ale sistemului (10.41). Atunci, sistemul (10.42) se reduce la ecuația:

$$\frac{dy_m}{Y_m}=\frac{dy_{m+1}}{Y_{m+1}}$$

sau,

$$Y_{m+1}\,dy_m - Y_m\,dy_{m+1}=0. \qquad (10.45)$$

Dacă există un factor integrant al sistemului inițial, va exista un multiplicator $\Delta_1 M_1$ pentru sistemul redus, satisfăcînd ecuației (10.44), redusă la ultimii doi termeni, astfel încît primul membru al ecuației (10.45) se transformă într-o diferențială totală exactă. De aceea $M'=M_1\Delta_1$ ia numele de „ultim" multiplicator. Vom avea:

$$\int M_1\Delta_1\,(Y_{m+1}\,dy_m - Y_m\,dy_{m+1})=\text{const.}, \qquad (10.46)$$

care va fi o nouă integrală a sistemului inițial. Reamintim că, în (10.46), mărimile M_1, Δ_1, Y_1 reprezintă ceea ce devin M, Δ și X cînd înlocuim pe $x_1,\ldots,x_{m-1}$ prin x_m, x_{m+1} și cele $m-1$ constante inițiale, cu ajutorul ecuațiilor care exprimă cele $m-1$ integrale prime.

Această proprietate duce la rezultate interesante pentru sistemul hamiltonian.

357. **Teoremă.** În spațiul $R_m(x_1, x_2,\ldots, x_m)$ condiția ca expresia:

$$J_m=\int_{V_m}M(x_i;\,t)\,d\tau_m \qquad (10.47)$$

să fie un invariant integral absolut al sistemului diferențial (10.1), integrala fiind extinsă la varietatea m-dimensională V_m din R_m, este ca integrandul să satisfacă ecuației diferențiale:

$$\frac{dM}{dt}+M\sum_{1}^{m}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}=0. \qquad (10.48)$$

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOTECA CENTRALĂ REGIONALĂ IAȘI

Pentru ca J_m să fie invariant integral absolut, cum, prin definiție:

$$J_m = \int_{V_m^0} M \frac{D(x)}{D(x^0)} d\tau_m^0$$

trebuie ca:

$$\frac{dJ_m}{dt} = 0;$$

ceea ce revine a deriva funcția de sub integrală, V_m^0 și $d\tau_m^0$ fiind invariabili. Precum se știe, condiția de invarianță se scrie:

$$\frac{d}{dt}\left[M \frac{D(x)}{D(x^0)}\right] = 0;$$

sau încă,

$$\frac{D(x)}{D(x^0)} \frac{dM}{dt} + M \sum_i \frac{D(x_1,\ldots,x_{i-1}, X_i, x_{i+1},\ldots,x_m)}{D(x^0)} = 0, \qquad (10.49)$$

dacă ținem seamă de regula de derivare a unei determinant și de ecuațiile (10.1). Observăm că:

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_l^0} = \sum_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_l^0};$$

astfel încît pentru (10.49) putem scrie:

$$\frac{D(x)}{D(x_0)} \frac{dM}{dt} + M \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{D(x)}{D(x^0)} = 0$$

și deci, cum $\Delta \neq 0$, rezultă ecuația căutată (10.48) care este însăși ecuația (10.31) a multiplicatorului lui J a c o b i (scrisă explicit pentru variabilele x și t separat).

Prin urmare, condiția ca J_m, dat de relația (10.47) să fie un invariant integral absolut al sistemului diferențial (10.1) este ca integrandul $M(x,t)$ să fie un multiplicator al sistemului inițial (10.1).

358. **Teorema lui Liouville.** Pentru sistemul canonic scris sub forma:

$$\frac{dq^1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{dq^2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{dq^n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial H}{\partial q^1}} = \ldots = \frac{dp_n}{-\frac{\partial H}{\partial q^n}} = \frac{dt}{1} \qquad (10.50)$$

este verificată, identic, ecuația:

$$\Omega = \sum_k \frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\right) + \frac{\partial}{\partial p_k}\left(-\frac{\partial H}{\partial q^k}\right) = 0.$$

Divergența fiind nulă, urmează, după observația de la § 338, că $M = 1$

Scanned with OKEN Scanner

este un multiplicator al sistemului (10.50). Prin urmare, după § 341, integrala:

$$\eta = \int_{V_{2n}} dp_1\, dp_2 \ldots dp_n\, dq^1\, dq^2 \ldots dq^n \qquad (10.51)$$

care exprimă *măsura* domeniului finit $2n$-dimensional V_{2n} în spațiul fazelor R_{2n}, este un invariant absolut al sistemului hamiltonian. Integrala (10.51) joacă un rol însemnat în *Mecanica statistică* și aplicațiile ei la *Teoria cinetică a gazelor* și la *Termodinamică*. În *Teoria cuantelor clasică*, invariantul η ocupă un loc de căpetenie. În adevăr, M a x P l a n c k a dovedit că fenomenele Fizicii clasice, care se petrec în lumea continuumului, posedă proprietatea caracteristică, după care, elementul de volum η din spațiul fazelor $R_{2n}(q, p)$ ce le corespunde, poate să fie făcut oricît de mic, astfel încît „stările fizice" se succed în mod continuu, tinzînd către un punct limită cu $\eta \to 0$. Dimpotrivă, fenomenelor fizice supuse regimului cuantic, discontinuu, le corespunde un spațiu al fazelor care se bucură de proprietatea caracteristică după care elementul de volum η nu poate fi nul niciodată, ci dimpotrivă, păstrează o valoare constantă:

$$\eta = h^{2n}$$

unde h este constanta de acțiune a lui P l a n c k. Spațiul fazelor fenomenelor cuantice este, așadar, un *spațiu celular*. Toate „stările" sistemului fizic cuprins într-o celulă h posedă o anumită valoare discretă și *nu* pot evolua continuu spre alte stări vecine, ci trebuie să ia o altă valoare determinată, diferind printr-o cantitate finită de starea inițială, spre a putea trece într-o celulă vecină.

359. **Criteriile de cuantificare ale lui A. Sommerfeld**. Regulile de cuantificare preconizate de S o m m e r f e l d, și folosite de noi (în § 138), constau în atribuirea unor valori constante expresiilor $\oint p_r dq^r$ *pentru fiecare grad de libertate* în parte, al unui atom. Acest procedeu se justifică precum urmează.

În cazul unui singur grad de libertate, ecuația energiei:

$$H(q, p) = E = \text{const.}$$

determină în spațiul fazelor curbele închise, fără puncte duble, a căror arie este dată de integrala:

$$\oint p\, dq. \qquad (10.52)$$

În cazul a n grade de libertate, modelele de atom sînt tratate mecanic prin metodele analitice care se aplică sistemelor „condiționat periodice", care posedă calitatea de a li se putea separa variabilele. Pentru astfel de sisteme, pe lîngă integrala energiei, mai există un număr $m < n$ de integrale, datorite apariției coordonatelor ciclice:

$$p_s = c_s\ (\text{const.}) \qquad (s = 1, 2 \ldots m)$$

În acest caz, sistemul canonic cu n grade de libertate se reduce la un sistem canonic cu $n-m$ grade de libertate; așadar, într-un spațiu al fazelor

Scanned with OKEN Scanner

2 $(n-m)$ - dimensional, avînd drept coordonate $q^{m+1},\ldots,q^n$; $p_{m+1},\ldots,p_n$; în ipoteza că integrala energiei:

$$H(q^{m+1},\ldots,q^n;\ p_{m+1},\ldots,p_n;\ c_1,\ldots,c_m) = E$$

cuprinde în $R_{2(n-m)}$ o varietate închisă $V_{2(n-m)}$. În acest spațiu, integralele:

$$\int dp_{m+1}\ldots dp_n \cdot dq_{m+1}\ldots dq^n,$$

sînt invarianți integrali, exprimînd, ca și (10.51), volumul de fază.

În special, dacă se cunosc $n-1$ integrale prime pe lîngă integrala energiei, sistemul canonic fiind separabil, putem rezolva cele $n-1$ ecuații care dau integralele prime și calcula cîtimile $p_1,\ldots p_{n-1}$ în funcție de p_n. Înlocuim aceste valori în H și obținem hamiltonianul H'. Sistemul canonic se reduce la:

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H'}{\partial p_n};\quad \dot{p}_n = -\frac{\partial H'}{\partial q^n},$$

formă care arată că odată cu $p_1,\ldots p_{n+1}$ dispar din H și toți $q^1,\ldots q^{n-1}$. Problema se reduce la un singur grad de libertate, pentru care invariantul (10.52) permite aplicarea condițiilor cuantice. Dacă schimbăm succesiv pe H cu fiecare din cele $n-1$ integrale prime obținem, în total, n expresii (10.52), deci, atîtea condiții cuantice cîte grade de libertate posedă sistemul dinamic.

360. **Aplicație a multiplicatorului** (W i t t h a k e r). Fie un sistem hamiltonian conservativ, scleronom, cu două grade de libertate, deci posedînd integrala energiei:

$$H(q^1, q^2, p_1, p_2) = h\ (\text{const.}), \tag{10.53}$$

unde hamiltonianul nu conține explicit timpul t. Avem:

$$\frac{\partial p_1}{-\frac{\partial H}{\partial q^1}} = \frac{\partial p_2}{-\frac{\partial H}{\partial q^2}} = \frac{\partial q^1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{\partial q^2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = dt. \tag{10.54}$$

Presupunem că se mai cunoaște o integrală primă pe lîngă integrala energiei (10.53), anume:

$$V(q^1, q^2, p_1, p_2) = c\ (\text{const.}), \tag{10.55}$$

în care nu figurează explicit timpul.

După § 335 și 336 vom putea face o transformare de variabile luînd ca variabile restante q^1 și q^2 și exprimînd, prin (10.53) și (10.55), p_1 și p_2 în funcție de (q^1, q^2, h, c):

$$p_1 = p_1(q^1, q^2, h, c);\quad p_2 = p_2(q^1, q^2, h, c). \tag{10.56}$$

Sistemul (10.54) se reduce atunci la:

$$\frac{dq^1}{\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)_1} = \frac{dq^2}{\left(\frac{\partial H}{\partial p_2}\right)_1} = dt. \tag{10.57}$$

Indicele 1 arată că am făcut substituția (10.56) în mărimile respective.

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul hamiltonian (10.54) are ca multiplicator pe $M = 1$. Rezultă că sistemul (10.57) va poseda multiplicatorul:

$$\Delta_1 = \frac{D(p_1, p_2)}{D(c, h)},$$

care satisface ecuaţia (10.44):

$$\frac{\partial}{\partial q^1}\left(\Delta_1 \frac{\partial H}{\partial p_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q^2}\left(\Delta_1 \frac{\partial H}{\partial p_2}\right) = 0.$$

Or, această ecuaţie ne arată că:

$$\int \Delta_1 \left(\frac{\partial H}{\partial p_2} dq^1 - \frac{\partial H}{\partial p_1} dq^2\right)_1 = \text{const.} \tag{10.58}$$

este o integrală nouă a sistemului (10.54). Să transformăm această integrală. Pentru aceasta, observăm că după substituţia (10.56) putem admite că H şi V depind de c şi h prin intermediul lui p_1 şi p_2 (sau invers). Să efectuăm derivatele în raport cu c şi h,

$$\frac{dH}{dc} = 0; \text{ deci, } \quad \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial c} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial c} = 0$$

$$\frac{dH}{dh} = 1; \text{ deci, } \quad \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial h} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial h} = 1$$

şi la fel:

$$\frac{dV}{dc} = 1; \quad \frac{dV}{dh} = 0.$$

Rezolvînd aceste ecuaţii, determinantul Δ_1 fiind diferit de zero, se găseşte:

$$\begin{aligned} &\Delta_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} = -\frac{\partial p_2}{\partial c}; \quad \Delta_1 \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{\partial p_1}{\partial c}; \\ &\Delta_1 \frac{\partial V}{\partial p_1} = \frac{\partial p_2}{\partial h}; \quad \Delta_1 \frac{\partial V}{\partial p_2} = -\frac{\partial p_1}{\partial h}. \end{aligned} \tag{10.59}$$

Înlocuind în (10.58) primele două valori (10.59), obţinem:

$$\frac{\partial}{\partial c}\int (p_1\, dq^1 + p_2\, dq^2) = \text{const.} \tag{10.60}$$

Facem notaţia:

$$\int (p_1\, dq^1 + p_2\, dq^2) = \chi(q^1, q^2; h, c) \tag{10.61}$$

integrala fiind extinsă de-alungul unui arc de curbă traiectorie care leagă două puncte definite. Relaţia (10.60) ne spune că:

$$\frac{\partial}{\partial c}\chi = \text{const.}$$

este o integrală nouă a sistemului (10.54).

Scanned with OKEN Scanner

O ultimă integrală se scrie observînd că, din (10.57), rezultă:

$$dt = \Delta_1 \left(\frac{\partial V}{\partial p_1} dq^2 - \frac{\partial V}{\partial p_2} dq^1 \right);$$

iar, dacă facem substituțiile (10.59) și avem în vedere valoarea (10.61):

$$dt = \frac{\partial}{\partial h} (p_1 dq^1 + p_2 dq^2);$$

deci, integrînd:

$$t = \frac{\partial \chi}{\partial h} + \text{const.}$$

Prin urmare, cuadratura (10.61) care determină funcția χ termină complet integrarea problemei propuse.

361. **Invariant adiabatic.** *Aplicații cuantice. Aplicații astronomice.* În dezvoltarea teoriei cuantelor clasică a jucat un mare rol proprietatea de „invariant adiabatic" pe care o posedă integralele care exprimă condițiile cuantice, de forma invariantului:

$$\oint p \, dq. \tag{10.62}$$

Sistemul dinamic ce reprezintă un atom, sau o aglomerație de atomi, nu mai poate să fie considerat ca un sistem mecanic izolat, deoarece găsindu-se mereu în cîmpul de radiație produs de prezența altor corpuri, este mereu supus la influențe exterioare (temperatură, mase, încărcări electrice, forțe electromagnetice etc.). Asupra acestor influențe s-a făcut ipoteza, justificată de rezultatele experimentale, că ele se exercită, în anumite împrejurări, nu ca un cîmp de forțe obișnuite, ci ca o perturbație continuă foarte lentă; astfel încît, analitic, să poată fi reprezentată prin niște parametri foarte încet variabili cu timpul, funcții *cunoscute*, dar de altfel *arbitrare*: $a(t)$ care apar în funcția lui H a m i l t o n:

$$H = H(q, p; a_1, a_2, \ldots, a_m) \tag{10.63}$$

unde parametrii adiabatici $a_s(t)$ variază *foarte încet* cu timpul t. Mișcarea va fi, prin aceasta, perturbată. Natura acestei perturbații este similară proceselor numite în Termodinamică procese adiabatice: dacă prin variația lentă și continuă a parametrilor $a(t)$ nu se alterează natura calitativă a sistemului mecanic, procesul este adiabatic.

P. E h r e n f e s t [1]) a observat că mărimile care definesc „traiectoriile stabile" în atom, anume, energia sistemului atomic:

$$H(q^r, p_r; a_s) = E \text{ const.} \tag{10.64}$$

precum și *integralele care exprimă condițiile cuantice*, de forma (10.62), trebuie să fie invariante nu numai pentru transformări canonice și de contact, ci este necesar ca aceste mărimi să rămînă invariante și pentru variațiile imprimate sistemului mecanic de către procesele adiabatice care se pot petrece în regiunile atomice. Se presupune că sistemul mecanic este canonic și de tip L i o u v i l l e.

În aceste condiții observăm mai întîi că pentru a_s constanți ecuația (10.64) pune condiția ca traiectoriile sistemului mecanic, date de sistemul canonic, să se găsească pe varietatea V_{2n-1} definită de (10.64) în R_{2n}. Dacă această varietate este închisă, atunci ea mărginește un domeniu din spațiul fazelor, dat de (10.64), admițînd că *nu* avem puncte duble unde $\frac{\partial H}{\partial p}$ și $\frac{\partial H}{\partial q}$ să se anuleze simultan.

---

[1]) *P. Ehrenfest*, „Adiabatische Invarianten und Quantentheorie", Annalen der Physik, B. 51, 1916; și „Adiabatic invariants and the Theory of Quanta", Philosophical Magazine; vol. 33, 1917.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă însă parametrii a_s variază foarte încet cu timpul, membrul întîi al ecuației (10.64) va varia foarte încet. Pentru fiecare mișcare intermediară, ecuația (10.64) va fi satisfăcută. Putem concepe această împrejurare spunînd că, de fapt, constanta E variază foarte încet cu timpul din cauza procesului adiabatic.

P. Ehrenfest, reluînd o problemă mai veche, a demonstrat teorema lui Gibbs-Hertz: volumul de fază (10.62) rămîne invariant adiabatic, în anumite condiții, pentru procesele adiabatice. Aceste condiții analitice sînt: 1. ecuația energiei este *singura* integrală primă a sistemului canonic care nu-i „infinit multiformă"; 2. fiecare traiectorie de pe V_{2n-1} trece oricît de aproape de fiecare punct din V_{2n-1} (ipoteza cuasiergodică). Condițiile precedente răspund la proprietățile fizice ale sistemelor materiale supuse regimului cuantic. În aceste condiții, Ehrenfest reușește să înlocuiască „valorile medii temporale" prin „valori medii spațiale" aplicate asupra lui V_{2n-1}, astfel încît variația membrului întîi al ecuației (10.64) cu a_s compensează variația parametrului E cu t, ecuația rămînînd satisfăcută tot timpul mișcării. Atunci, volumul (10.62) închis în R_{2n} de suprafața (10.64) este un invariant adiabatic.

Teorema lui Burgers: *De aceeași proprietate se bucură invarianții* (10.62) *pentru fiecare grad de libertate, dacă sistemul canonic, de tip Stäckel, admite cele n integrale prime ciclice ale lui* Sommerfeld.

Studii însemnate asupra invarianților adiabatici, mai cu seamă privind aspectul fizic al problemei, se datoresc lui T. Levi-Civita [1]). Acest autor observă că pentru sistemele canonice de ordin $2n$:

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q^r}; \quad \dot{q}^r = \frac{\partial H}{\partial p_r}; \quad (r = 1, 2, \ldots n) \tag{10.65}$$

cu o funcție hamiltoniană care nu conține timpul explicit, ci prin intermediul unor parametri $a(t)$ extrem de încet variabili cu t: $H = H[q^r, p_r; a(t)]$, se cunosc două tipuri extreme de invarianți adiabatici, pe care-i putem numi clasici; și de care s-au folosit începînd cu Ehrenfest, aplicațiile la fizica atomilor clasică.

a. *Teorema lui Gibbs-Hertz.* Dacă sistemul canonic este *cuasiergodic*, deci nu există decît o singură integrală primă uniformă, — volumul V_{2n-1} închis în spațiul fazelor R_{2n} de varietatea:

$$H[q^r, p_r; a(t)] = E \text{ (const.)} \tag{10.66}$$

este invariantul adiabatic (singurul) căutat.

b. *Teorema lui Burgers.* Cele n integrale ciclice ale lui *Sommerfeld*:

$$J_r = \oint p_r \, dq^r \tag{10.67}$$

sînt invarianți adiabatici pentru sisteme condiționat-periodice (§ 388), de tip *Stäckel* (§ 380) unde n este gradul de libertate al sistemului.

Între aceste două cazuri se situează cazul intermediar, cînd în afară de integrala primă a energiei (10.64) mai există încă $m < n$ integrale prime uniforme și independente

$$F_r = c_r \text{ (const.)}. \qquad (r = 1, 2, \ldots m) \tag{10.68}$$

Levi-Civita numește astfel de sisteme *imprimitive* de ordinul n. Imprimitivitatea de ordin *zero* corespunde cazului Gibbs-Hertz; există o singură integrală primă: a energiei (10.64). Pentru imprimitivitatea de ordin n, adică

---

[1]) *Tullio Levi-Civita*, Sugli invariante adiabatici; Atti del congresso internazionale dei fisici. Como, Sept. 1927—Bologna, 1928.

Drei Vorlesungen über adiabatische Invarianten. Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität. B. VI. H. 3/4. Teubner, 1928.

A general survey of the theory of adiabatic invariants. Journal of Mathematic and Physics; U.S.A. V. 13; nr. 1; 1934.

Scanned with OKEN Scanner

pentru sisteme *primitive*, $m = n$, corespunde cazul lui B u r g e r s , al integralelor lui S o m m e r f e l d (§ 339).

Problema sistemelor canonice pentru care există m variabile ciclice q^r ($r = 1, 2, \ldots m$), va fi tratată mai tîrziu. Se obţin m integrale prime $p_r = c^r$ (const.), de tip S o m m e r f e l d deci invarianţi adiabatici. Cazul general cînd cele m integrale prime sînt de formă generală (10.68) se reduce la cazul particular $p_r = \text{const}$, dacă cele m funcţii F_r sînt în *involuţie între ele* (§ 369), adică dacă cele $\frac{m(m-1)}{2}$ paranteze ale lui Poisson (§ 364) se anulează ($r, s = 1, 2, \ldots, m$):

$$(F_r, F_s) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial F_s}{\partial q^k} - \frac{\partial F_r}{\partial l^k} \frac{\partial F_s}{\partial p_k} \right) = 0. \tag{10.69}$$

După o teoremă a lui S o p h u s - L i e [1]), condiţiile (10.58) sînt suficiente ca să deducem între P_r ($r = m+1, \ldots n$) şi Q_k ($k = 1, 2, \ldots n$) combinaţii independente, îndată ce cunoaştem $P_\alpha = F_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \ldots m$) valori. În aceste condiţii, vom putea efectua o transformare canonică de variabile $(q, p) \to (Q, P)$, astfel încît integralele prime de formă oarecare să devină de forma particulară $P_\alpha = C_\alpha$ (const.); deci, variabilele noi Q_k apar drept variabile ciclice. În aceste condiţii, se poate *afirma existenţa a* $m + 1$ *invarianţi adiabatici construibili prin cuadraturi.*

Problema analitică prezintă însă unele dificultăţi, pentru discuţia cărora trimitem la lucrările citate.

Pentru aplicaţiile noţiunii de invariant adiabatic în problemele de fizică atomică, aşa cum a arătat E h r e n f e s t , este necesar şi suficient să cunoaştem cele două teoreme extreme, enunţate mai sus. În cele ce urmează, vom demonstra aceste teoreme şi vom reproduce cîteva exemple interesante din fizica atomului şi o frumoasă aplicaţie din astronomie.

Teorema lui G i b b s - H e r t z . Admitem că în orice punct *ordinar* M al suprafeţei (10.66) cel puţin una din cele $2n$ derivate parţiale ale lui H este diferită de zero. Pentru fixarea ideilor, să notăm cu z acela dintre p_r sau q^r (în punctul respectiv) pentru care $\partial H/\partial z \neq 0$; însemnăm apoi cu $r_1, r_2 \ldots$ restul de $2n-1$ variabile rămase, cu dX produsul celor $2n-1$ diferenţiale $dx_1, dx_2 \ldots$ Presupunem că în ecuaţia (10.66) am făcut substituţia celor $2n$ variabile p, q, prin cele $2n-1$ variabile r şi E (luată drept o variabilă).

În aceste condiţii şi notaţii, elementul de volum euclidian dV al spaţiului fazelor se poate pune sub forma:

$$dV = dp_1 \cdots dp_n \cdot dq_1 \cdots dq_n = dz\,dX = \frac{dE\,dX}{\left| \frac{\partial H}{\partial Z} \right|} \tag{10.70}$$

în conformitate cu regulile de schimbare de variabile.

După principiile mecanicii statistice, spaţiul fazelor posedă o densitate uniformă; orice domeniu elementar dX (în jurul punctului M al unei suprafeţe Σ fără puncte multiple) contribuie la *valoarea medie* a unei funcţii $f(M)$, în punctul M, cu cîtimea:

$$\oint_{\Sigma} \frac{f(M)\,dX}{\left| \frac{\partial H}{\partial Z} \right|}. \tag{10.71}$$

---

[1]) v. *Sophus Lie*, „Theorie der Transformationsgruppen", B. II, p. 20.

Valoarea medie spațială a funcției $f(M)$ în punctul M se definește atunci prin:

$$\bar{f} = \frac{\oint_{\Sigma} \frac{f(M)\,dX}{\left|\frac{\partial H}{\partial Z}\right|}}{\oint_{\Sigma} \frac{dX}{\left|\frac{\partial H}{\partial Z}\right|}}. \tag{10.72}$$

Acestea fiind precizate, să considerăm volumul $V(a; E)$ definit de ecuația (10.64) ca funcție de parametrii adiabatici $a(t)$, și în consecință de $E(t)$. Teorema lui G i b b s - H e r t z afirmă că:

$$V(a; E) = \text{const.} \tag{10.73}$$

Pentru a stabili această proprietate, vom varia pe V păstrînd pe a, respectiv E, constanți. Obținem:

$$dV = d_a V + d_E V. \tag{10.74}$$

În primul rînd observăm că variația lui V cu E, între $H = E$ și $H = E + dE$, este dată de expresia:

$$d_E V = \frac{\partial V}{\partial E}\,dE; \quad \text{sau} \quad d_E V = dE \oint_{\Sigma} \frac{dX}{\left|\frac{\partial H}{\partial Z}\right|} \tag{10.75}$$

avînd în vedere relația (10.70).

Pe de altă parte, tot din (10.70) rezultă că variația volumului V, prin variația lui a, este dată de:

$$d_a V = -\oint_{\Sigma} \frac{d_a E \cdot dX}{\left|\frac{\partial H}{\partial Z}\right|}. \tag{10.76}$$

În adevăr, variind pe a în (10.64) ecuația (10.64) devine: $H + d_a H = E$; așadar, scrisă sub forma $H = E - d_a H \equiv E - d_a E$ exprimă variația lui E ca fiind $-d_a E$.

Expresiile (10.75) și (10.76) adunate, ne dau $dV = 0$, dacă ținem seamă de relația (10.72) care definește valoarea medie. Deci, volumul închis de suprafața (10.64) este un invariant adiabatic.

Vom dezvolta o demonstrație datorită lui B u r g e r s. Admitem pentru moment că avem *un singur grad de libertate*. Funcția hamiltoniană este:

$$H[q, p; a(t)], \tag{10.77}$$

iar ecuațiile de mișcare sînt:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{10.78}$$

Să aplicăm transformarea canonică definită de funcția

$$S^* = S - wJ, \tag{10.79}$$

unde J este „variabila de acțiune" și w este „variabila unghiulară"; transformarea va fi definită prin relațiile:

$$p = \frac{\partial S^*}{\partial q}; \quad J = -\frac{\partial S^*}{\partial w}. \tag{10.80}$$

Scanned with OKEN Scanner

Hamiltoniana transformată devine:

$$H(J) = H(\gamma, p) + \frac{\partial S^*}{\partial t} \tag{10.81}$$

iar ecuațiile de mișcare se scriu:

$$\dot{w} = \frac{\partial H}{\partial J} + \frac{\partial}{\partial J}\left(\frac{\partial S^*}{\partial t}\right) \tag{10.82}$$

$$\dot{J} = -\frac{\partial H}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial S^*}{\partial t}\right). \tag{10.83}$$

Cum $\frac{\partial H}{\partial w} = 0$ și $S^* = S^*\,[q, J; a\,(t)]$, rezultă:

$$\dot{J} = -\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)\dot{a}\,. \tag{10.84}$$

Derivarea în raport cu t și a se face păstrînd constante pe q și w; iar derivarea în raport cu w se face păstrînd constante pe J și a. Variația lui J în intervalul de timp arbitrar și suficient de mare (t_1, t_2) va fi dată de:

$$J^{(2)} - J^{(1)} = -\int_{t_1}^{t_2} \dot{a}\,\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial S^*}{\partial a}\right) dt. \tag{10.85}$$

Prin ipoteză, *variația adiabatică se efectuează extrem de încet și nu stă în legătură cu perioada sistemului*; în aceste condiții, putem scoate pe $\dot{a}$ de sub integrală în (10.85). Vom avea:

$$\frac{J^{(2)} - J^{(1)}}{\dot{a}} = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial S^*}{\partial a}\right) dt\,. \tag{10.86}$$

Totul revine a dovedi că integrala din membrul al doilea este de ordinul $\dot{a}\,(t_2 - t_1)$; astfel încît chiar cînd $\dot{a}\,(t_2 - t_1)$ ar rămîne finit, la limită cînd avem o variație infinit înceată $\dot{a} \to 0$, va trebui ca $J^{(2)} = J^{(1)}$; deci J este invariant adiabatic.

În teoria sistemelor cuantice (periodice) se demonstrează că funcția transformatoare S este periodică în $w = \nu t + \delta$ cu perioada 1; același lucru se întîmplă și cu $\frac{\partial S^*}{\partial a}$. Integrandul din (10.86) se va scrie atunci sub forma unei serii *Fourier, fără termen constant*:

$$F = \sum_{\tau} A_\tau\,(J;\ a)\ e^{2\pi i\,(\tau.\ w)} \tag{10.87}$$

unde am însemnat cu $(\tau.\ w) = \sum_k \tau_k\, w^k$ perioada exprimată în funcție de sistemul primitiv de perioada w^k. În aceste condiții, se observă că integrandul nu mai este exact periodic în t; să dezvoltăm funcția (10.87) în vecinătatea punctului $t = t_1$; avem:

$$F = \sum_{\tau} \left(A_\tau^0 + A_\tau^1\,\dot{a}t + \tfrac{1}{2}\,A_\tau^2\,\ddot{a}t^2 + \ldots\right) e^{2\pi i\tau\,[\nu^0 t + \delta^0 + \dot{a}\,(\nu' t + \delta' t) + \ldots]}$$

sau

$$F = \sum_i A_\tau^0\, e^{2\pi i\tau\,(\nu^0 t + \delta^0)} + \dot{a}\sum_\tau \left[2\pi i\,A_\tau^0\left(\nu' t^2 + \delta^1 t\right) + A_\tau^1\,t\right] e^{2\pi i\tau\,(\nu^0 t + \delta^0)} + \cdots \tag{10.88}$$

Scanned with OKEN Scanner

Valorile $A_\tau^0, A_\tau^1, \ldots$; $\nu^0, \nu^1, \ldots$; $\delta^0, \delta^1, \ldots$ sînt pentru $t = t_1$. Integrăm expresia pentru perioada finită T a primului termen, presupunînd $(\tau w) \neq 0$. Primul termen al dezvoltării (10.88) dispare şi rămîne numai o expresie avînd pe $\dot{a}T$ şi $\dot{a}T^2$, în factor. Ne rămîne deci, din intervalul total, restul $(t_2 - t_1 + T)$. Repetăm procedeul folosit anterior: dezvoltăm expresia rămasă din (10.88) în vecinătatea punctului $t_1 - T$, de la începutul acestui rest de interval. Integrăm apoi expresia astfel obţinută pentru o perioadă T a primului termen din noua dezvoltare; vom găsi ca rezultat o expresie conţinînd $\dot{a}T$ şi $\dot{a}T^2$ în factor. Procedăm astfel mereu pînă ne rămîne, după ultima dezvoltare, un rest de interval $t', t_2)$ mai mic decît o perioadă a primului termen. Integrînd, obţinem în definitiv o expresie de ordinul de mărime $\dot{a}(t_2 - t_1)$ care, pentru (t_1, t_2) suficient de mare, rămîne finită, pentru perioada T finită, cînd a tinde către zero. Aşadar, am demonstrat invarianţa adiabatică a integralei de acţiune J, pentru cazul unui singur grad de libertate.

În cazul *mai multor grade de libertate*, se procedează cu fiecare variabilă de acţiune J_k (10.67) ca şi în cazul unui singur grad de libertate şi se obţine o dezvoltare (10.88) în jurul lui t_1. Integrarea se efectuează pentru un interval de la începutul lui (t_1, t_2) astfel ales încît primul termen să dispară. Aceasta este posibil, căci integrala nedefinită a primului termen este o funcţie multiperiodică şi la distanţe de ordinul de mărime $1/(\tau\nu^0)$ trece mereu prin zero[1]). Integrala termenului al 2-lea în (10.88) este de ordinul $\dot{a}T$ sau $\dot{a}T^2$. Ne închipuim deci o nouă dezvoltare (10.88) făcută pentru începutul restului de interval şi de asemenea atîta extinsă cît trebuie ca primul termen să dispară. Procedeul repetat ne conduce pînă la un ultim rest de interval pentru care integrala primului termen să fie finită. Dacă $(\tau\nu)$ *nu* se anulează pe drumul de integrare, atunci integrala totală are ordinul de mărime $\dot{a}(t_2 - t_1)$.

În cazul cînd sistemul prezintă o degenerare (pentru o anumită valoare a lui $a(t)$ există o relaţie identică $(\tau\nu) = 0$), putem alege w şi J astfel încît ν_α să fie incomensurabili şi ν_ρ să fie nuli. În S^* avem atunci exponenţi constanţi: $(\tau\nu) = 0$, care cuprind numai w_ρ. Deci J_α rămîn invarianţi şi în acest caz; J_ρ nu ştim cum variază. Putem avea şi degenerări întîmplătoare: cînd $(\tau\nu)$ sînt nuli numai pentru unele valori de J_k. În aceste poziţii J_k nu mai sînt constanţi.

Exemplu cuantic. Teorema lui Gibbs-Hertz pentru un singur grad de libertate. Fie hamiltoniana $H[q, p; a(t)]$; T = perioada. Integrala (10.62) ne dă:

$$\delta J = \int_0^t \sum (\dot{q}\,\delta p + p\,\delta\dot{q})\,dt + \Big|\sum p\dot{q}\Big|_0^T$$

dar

$$\int_0^T p\,\delta\dot{q}\,dt = \int_0^T p\,d(\delta q) = \Big|\,p\,\delta q\,\Big|_0^T - \int_0^T \delta q\,\dot{p}\,dt.$$

Avem deci,

$$\delta J = \int_0^T \sum (\dot{q}\,\delta p - \dot{p}\,\delta q)\,dt + \Big|\sum p\,(\dot{q}\,\delta t + \delta q)\Big|_0^T.$$

Ultimul termen dispare din cauza periodicităţii. Rămîne deci:

$$\delta J = \int_0^T \sum (\dot{q}\,\delta p - \dot{p}\,\delta q)\,dt. \tag{10.89}$$

Ţinînd seama de ecuaţiile canonice, rezultă în definitiv:

$$\delta J = \int_0^T \delta H\,dt \tag{10.90}$$

---

[1]) v. *Max Born*, [21].

Scanned with OKEN Scanner

În condițiile specificate, sistemul admite integrala energiei:

$$H(p, q; a) = E \text{ (const.)} \tag{10.91}$$

dacă parametrii a sînt constanți. Dacă însă variem parametrii adiabatici extrem de încet, invarianța stabilită pentru variabilele J [date de relația (10.90)] ne arată că aria închisă de curba (10.91) — vorbim pentru un grad de libertate, — este neschimbată, această arie $V(E; a)$ constituind un invariant adiabatic al problemei considerate.

Aplicație la mecanica cerească. T. Levi-Civita [1]), reluînd o problemă tratată de G. Armellini [2]), găsește o frumoasă aplicație a metodei invarianților adiabatici în mecanica cerească. Armellini studiază prin metodele mecanicii obișnuite problema *a două corpuri cu mase variabile m și m'*, problemă pusă de astronomie pentru cazurile cînd masele variază prin cădere de meteoriți sau prin radiație termică, electromagnetică, luminoasă etc.; — deci, cu mărire, respectiv diminuare de masă.

Prin metode analitice deosebit de dificile, Armellini reușește să stabilească teorema I: *dacă masa totală $M(t) = m + m'$ crește odată cu t și devine infinită pentru $t \to \infty$, limita inferioară a lui $r(t)$, distanța celor două corpuri, tinde spre zero: — vom avea, deci, o ciocnire. Dacă $M \to 0$, atunci $r \to \infty$, corpurile se depărtează la infinit.*

I. T. Levi-Civita consideră masele variabile m și m' a două corpuri, sau $M(t) = m(t) + m'(t)$, drept *parametri adiabatici*, variind *extrem de încet* cu timpul. Luînd r = distanța celor două corpuri, G centrul de greutate al sistemului și P, P' pozițiile respective, avem:

$$GP = \frac{m'}{M} r; \quad GP' = \frac{m}{M} r. \tag{10.92}$$

Integrala momentului cinetic arată că mișcarea este plană: fie θ anomalia lui PP' în acest plan, față de o dreaptă fixă. Energia cinetică a sistemului este:

$$T = \frac{1}{2} \frac{mm'}{M} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2), \tag{10.93}$$

unde mm'/M este masa redusă, funcția de forță pentru problema newtoniană fiind:

$$U = f \frac{mm'}{r}. \tag{10.94}$$

Făcînd abstracție de factorul $\frac{M}{mm'}$ (constant, în problema neperturbată), care nu modifică ecuațiile lui Lagrange, putem scrie pentru energia cinetică T și potențialul U:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2); \quad U = f \frac{M}{r} \tag{10.95}$$

reducînd problema la cazul unui singur grad de libertate.

Punînd $H = T - U$, obținem:

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 \right) - f \frac{M}{r} \tag{10.96}$$

căci, prin definiție:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r}; \quad p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta}. \tag{10.97}$$

---

[1]) Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, 1928 — VI.
[2]) Memorie della Societa Italiana delle Scienze, t. XIX, 1915, p. 75—96.

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul canonic de mişcare este:

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r}\ ;\ \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r}; \tag{10.98}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0;\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta};$$

căci θ este, evident, variabilă ciclică şi conduce la integrala ariilor:

$$p_\theta = r^2\dot{\theta} = C\ (\text{const.}) \tag{10.99}$$

Problema adiabatică revine să se calculeze aria V a curbei dată de ecuaţia energiei, folosind (10.96) şi (10.99):

$$\frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) - \frac{fM}{r} = E, \tag{10.100}$$

unde C, f, M şi E sînt tratate drept constante; primele trei pozitive, iar ultima negativă (în mişcarea Kepleriană, $E < 0$).

Considerînd pe t ca variabilă independentă, aria V este dată de integrala $\oint p_r\,dr$ extinsă la o perioadă $T = \frac{2\pi}{n}$. Aşadar:

$$V = \int_0^T p_r^2\,dt; \tag{10.101}$$

sau, după (10.100):

$$V = 2E\frac{2\pi}{n} + 2fM\int_0^T \frac{dt}{r} - C\int_0^T \frac{C\,dt}{r^2}. \tag{10.102}$$

Ţinînd seama de relaţia (10.99), ultima integrală din (10.102) se evaluează la 2π. În ceea ce priveşte prima integrală din (10.102), ea se calculează folosind ecuaţia lui Kepler: $(1 - e\cos u)\,du = n\,dt$, introducînd anomalia excentrică u, excentricitatea orbitei e şi semiaxa mare a; avem: $r = a(1 - e\cos u)$; aşadar:

$$\int_0^T \frac{dt}{r} = \frac{2\pi}{an}. \tag{10.103}$$

Cu aceste valori obţinem:

$$\frac{1}{2\pi}V = \frac{1}{n}\left(2E + \frac{2fM}{a}\right) - C. \tag{10.104}$$

Mişcarea eliptică sub acţiunea forţei newtoniene (§ 79) ne dă relaţiile:

$$E = -\frac{fM}{2a};\quad n^2 = \frac{fM}{a^3}; \tag{10.105}$$

aşadar, din (10.104) rezultă:

$$C + \frac{1}{2\pi}V = \sqrt{fMa}. \tag{10.106}$$

Să observăm că C este o *constantă de integrare*, indiferent dacă, în problemă, masa M este considerată ca o constantă sau nu. Aşadar, relaţia (10.106) în care V este

de asemenea o constantă (invariantul adiabatic) ne spune că: „proprietatea de invarianţă adiabatică a integralelor de acţiune, în problema celor două corpuri ale căror mase variază extrem de încet cu timpul, conduce la relaţia: $M \cdot a = \text{const.}$; deci, produsul dintre masa totală şi distanţa relativă a celor două corpuri rămîne constant".

II. Interesant este şi rezultatul care se obţine în cazul cînd cele două corpuri posedă *rotaţii proprii* în jurul axelor trecînd prin centrele lor respective de greutate — pe care le presupunem normale pe planul fix în care se mişcă cele două centre de greutate.

Fie J şi J' momentele de inerţie şi ω, ω' cele două viteze unghiulare; punem $\lambda^2 = \frac{MJ}{mm'}$; $\lambda'^2 = \frac{MJ'}{mm'}$. Energia cinetică este:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}(\lambda^2\omega^2 + \lambda'^2\omega'^2). \tag{10.107}$$

Fie φ şi φ' unghiurile care definesc poziţiile corpurilor relative la axele proprii de rotaţie, măsurate de la dreapta (mobilă) PP', care uneşte centrele de greutate P şi P'. Fie $U = \frac{fM}{r}$ atracţia newtoniană.

Vitezele unghiulare relative fiind $\dot{\varphi}$ şi $\dot{\varphi}'$ vom avea pentru vitezele unghiulare absolute valorile:

$$\omega = \dot{\theta} + \dot{\varphi}; \quad \omega' = \dot{\theta}' + \dot{\varphi}'. \tag{10.108}$$

Observăm că θ, φ şi φ' sînt coordonate ciclice; avem deci trei integrale prime. În primul rînd, după (10.108) şi (10.99) vom avea:

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = r^2\dot{\theta} + \lambda^2\omega + \lambda'^2\omega' = c = \text{const.} \tag{10.109}$$

apoi:

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \lambda^2\omega = \gamma \text{ (const.)} \tag{10.110}$$

$$p_{\varphi'} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}'} = \lambda'^2\omega' = \gamma' \text{ (const.)} \tag{10.111}$$

Rezultă:

$$H = \frac{1}{2}\left\{ p_r^2 + \frac{(c-\gamma-\gamma')^2}{r^2} + \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\gamma'}{\lambda'}\right)^2 \right\} - \frac{fM}{r}. \tag{10.112}$$

Drept parametri adiabatici apar în problemă cîtimile M, λ şi λ'; cîtimile c, γ, γ', constituind constante esenţiale de integrare.

Să punem:

$$E_1 = E - \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\lambda^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\gamma'^2}{\lambda'^2}; \quad c_1 = c - \gamma - \gamma' = \text{const.} \tag{10.113}$$

Ecuaţia primă a energiei este:

$$\frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{c_1^2}{r^2}\right) = \frac{fM}{r} = E_1. \tag{10.114}$$

Expresia explicită a invariantului adiabatic este în cazul de faţă:

$$c_1 + \frac{V}{2\pi} = \frac{fM}{\sqrt{-2E_1}}. \tag{10.115}$$

Considerată ca funcţie de γ şi γ', energia totală E va tinde către o valoare minimă prin acţiunea disipativă a variaţiei masei; aşadar, va trebui să avem:

$$\frac{\partial E}{\partial \gamma} = 0; \qquad \frac{\partial E}{\partial \gamma'} = 0. \tag{10.116}$$

Pe de altă parte, cum: $\frac{V}{2\pi} = \text{const}$, rezultă:

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma} + \frac{\partial V}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial \gamma} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \gamma'} + \frac{\partial V}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial \gamma'} = 0. \tag{10.117}$$

Sau, ţinînd seamă de condiţiile (10.116):

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma} = 0; \qquad \frac{\partial V}{\partial \gamma'} = 0. \tag{10.118}$$

Iar după (10.115), rezultă:

$$\begin{aligned} -fM(-2E_1)^{-\frac{3}{2}}\frac{\gamma}{\lambda^2} + 1 = 0 \\ -fM(-2E_1)^{-\frac{3}{2}}\frac{\gamma'}{\lambda'^2} + 1 = 0 \cdot \end{aligned} \tag{10.119}$$

Din relaţiile (10.117) elimind a deducem „mişcarea medie“:

$$n = \frac{(-2E_1)^{\frac{3}{2}}}{fM}; \tag{10.120}$$

aşadar (10.119) devine:

$$-\frac{\omega}{n} + 1 = 0; \qquad -\frac{\omega'}{n} + 1 = 0;$$

sau încă:

$$\omega = \omega' = n \tag{10.121}$$

ceea ce exprimă *teorema II*: *consecinţa efectului secular* (în sens asimptotic) *a unei acţiuni disipative* (prin variaţia masei totale) *este de a se produce egalarea vitezelor de rotaţie ale ambelor corpuri cu viteza de rotaţie.*

Se observă că, în astronomie, acest efect este în parte împlinit de către sistemul pămînt + lună, — în ceea ce priveşte numai unul din corpuri: luna, a cărei viteză de rotaţie proprie se ştie că este egală cu viteza de rotaţie în jurul pămîntului, — efect care face să putem privi numai „o faţă“ a lunii!

Efectele adiabatice, definite prin cele două teoreme stabilite mai sus, au putut fi utilizate în problema interacţiunii dintre particulele elementare ce contribuie la constituirea nucleului atomic, de I. I. P l ă c i n ţ e a n u [1]).

Capitolul XI

PARANTEZELE LUI LAGRANGE ŞI POISSON

362. **Parantezele lui J. L. Lagrange.** Acestea sînt nişte expresii diferenţiale introduse pentru prima oară de L a g r a n g e în studiul analitic al mişcărilor *perturbate* din Mecanica cerească. Ele sînt comode pentru formu-

[1]) Sur le processus d'association des particules élémentaires; Rend. Acc. Naz. d. Lincei, v., VIII p. 587; 1950).

larea unor proprietăți analitice ale sistemelor de ecuații diferențiale de tipul ecuațiilor lui H a m i l t o n (v. § 315). Parantezele pot fi construite avînd în vedere o transformare oarecare, în spațiul fazelor cu $2n$ dimensiuni al variabilelor (q, p), respectiv (Q, P). Pentru generalitate, făcînd abstracție de caracterul contravariant sau covariant al coordonatelor, caracter neesențial pentru operația algebrică a transformării, să considerăm pentru generalitate, o transformare:

$$\xi_k = \xi_k(x_i, y_i); \quad \eta_k = \eta_k(x_i, y_i) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n) \qquad (11.1)$$

funcțiile ξ și η fiind continue și admițînd derivate de primele două ordine, iar determinantul funcțional fiind diferit de zero, așa încît să putem inversa transformarea precedentă. Transformarea (10.1) este independentă de t.

Se numesc paranteze ale lui L a g r a n g e expresiile (notate cu paranteze drepte):

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial y_i}{\partial \xi_r} - \frac{\partial x_i}{\partial \xi_r}\frac{\partial y_i}{\partial \xi_k}\right] \equiv [\xi_k, \xi_r]$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial x_i}{\partial \eta_k}\frac{\partial y_i}{\partial \eta_r} - \frac{\partial x_i}{\partial \eta_r}\frac{\partial y_i}{\partial \eta_k}\right] \equiv [\eta_k, \eta_r] \qquad (11.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial y_i}{\partial \eta_r} - \frac{\partial x_i}{\partial \eta_r}\frac{\partial y_i}{\partial \xi_k}\right] \equiv [\xi_k, \eta_r].$$

Expresiile de mai sus sînt, evident, anticomutative:

$$[\xi_k, \eta_r] = -[\eta_r, \xi_k] \text{ etc.}$$

363. **Teoremă.** Condiția necesară și suficientă pentru ca transformarea oarecare (11.1) să fie complet canonică este:

$$[\xi_k, \xi_r] = 0; \; [\eta_k, \eta_r] = 0; \; [\xi_k, \eta_r] = \delta_{kr}, \qquad (k, r = 1, 2, \ldots n) \qquad (11.3)$$

unde δ_{kr} este simbolul lui K r o n e c k e r. Avem, în total, un număr de $n(2n-1)$ relații (11.3) de condiție.

a) *Condiția este necesară.* Transformarea (11.1) este complet canonică și, prin urmare, o transformare de contact (§ 324), dacă satisface identic relația (9.17) § 324:

$$y_i\, dx_i - \eta_k\, d\xi_k = d\varphi(\xi_k, \eta_k) \qquad (11.4)$$

unde φ este o funcție continuă, admițînd derivate de primul ordin în raport cu variabilele care figurează în argument.

Din (11.4) rezultă:

$$y_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = \eta_k + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k}; \quad y_i \frac{\partial x_i}{\partial \eta_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_k}. \qquad (11.4')$$

Derivînd prima ecuație în raport cu ξ_r și η_k, iar ultima ecuație în raport cu η_r și ξ_k, rezultă, printr-un calcul elementar, relațiile de condiție (11.3).

b) *Condiția este suficientă.* Din (11.3), (11.2) și (11.4′) putem scrie:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_r}\left(y_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} - \eta_k\right) - \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(y_i \frac{\partial x_i}{\partial \eta_k} - \eta_r\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_r}\left(y_i \frac{\partial x_i}{\partial \eta_k}\right) - \frac{\partial}{\partial \eta_k}\left(y_i \frac{\partial x_i}{\partial \eta_r}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_r}\left(y_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} - \eta_k\right) - \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(y_i \frac{\partial x_i}{\partial \eta_r}\right) = 0.$$

Aceste relații exprimă condiția analitică pentru existența unei funcții $\varphi(x, y)$, definită prin ecuațiile:

$$y_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} - \eta_k = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k}; \quad y_i \frac{\partial x_i}{\partial \eta_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_k}. \tag{11.5}$$

Să formăm diferențiala totală a funcției $\varphi(x, y)$. Avem:

$$d\varphi(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k} d\xi_k + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_k} d\eta_k$$

unde, înlocuind derivatele parțiale ale lui φ prin valorile exprimate cu ajutorul relațiilor (11.5) se obțin fără dificultate relațiile de condiție (11.4).

Observație. Condițiile (11.3) ne spun că determinanții funcționali ai transformării (11.1) trebuie să fie egali cu unitatea. Aceasta înseamnă, geometric, *păstrarea ariilor* prin transformarea canonică considerată, în spațiul fazelor.

364. **Parantezele lui S. D. Poisson.** Fie două funcții:

$$\varphi = \varphi(x_i, y_i; t); \qquad \psi = \psi(x_i, y_i; t)$$

continue și derivabile în raport cu variabilele x_i, y_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ și, eventual, de t. Se numește *paranteză a lui Poisson* expresia (notată cu paranteze rotunde):

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial y_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x_i, y_i)}. \tag{11.6}$$

Putem reprezenta operația diferențială (11.6) simbolic, sub formă de „operator". Pentru aceasta, să considerăm funcția $\varphi(x, y)$ drept o funcție dată, iar pe $\psi(x, y)$ drept o funcție oarecare, arbitrară. Atunci relația (11.6) definește un operator legat de φ și aplicat funcției arbitrare $\psi(x, y)$, precum urmează:

$$\sum\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\psi = P_\varphi \psi \tag{11.7}$$

definind astfel opertorul diferențial P_φ, relativ la funcția dată φ.

Scanned with OKEN Scanner

365. **Proprietăţile parantezelor lui Poisson**

a) Prin definiţie, avem:

$$(\varphi, \psi) + (\psi, \varphi) = 0; \quad (\varphi, \varphi) = 0; \ (\varphi, \text{const.}) = 0; \tag{11.8}$$

$$(\varphi_1 + \varphi_2, \psi) = (\varphi_1, \psi) + (\varphi_2, \psi); \tag{11.9}$$

$$(\varphi_1 \cdot \varphi_2, \psi) = \varphi_1 (\varphi_2, \psi) + \varphi_2 (\varphi_1, \psi); \tag{11.10}$$

$$(\Phi (f_1, f_2, \ldots, f_m), \varphi) = \sum_1^m (f_s, \varphi) \frac{\partial \Phi}{\partial f_s} \tag{11.11}$$

unde f_s sînt funcţii continue şi derivabile de x şi y.

b) Dacă Φ şi Ψ sînt funcţii de $2n$ funcţii f care, la rîndul lor, sînt funcţii de x şi y, se verifică uşor că:

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{r,\, s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial f_r} \frac{\partial \Psi}{\partial f_s} - \frac{\partial \Psi}{\partial f_s} \frac{\partial \Phi}{\partial f_r} \right) (f_r, f_s). \tag{11.12}$$

c) *Identitatea lui J a c o b i.* Fie φ, ψ, χ funcţii de x şi y. Următoarea relaţie are loc, identic:

$$(\varphi, (\psi, \chi)) + (\psi, (\chi, \varphi)) + (\chi, (\varphi, \psi)) = 0. \tag{11.13}$$

În adevăr, din definiţia (11.7), rezultă:

$$(P_\varphi P_\psi - P_\psi P_\varphi) \chi = (\varphi, (\psi, \chi)) - (\psi, (\varphi, \chi)).$$

Membrul al doilea este un operator diferenţial conţinînd numai derivate de ordinul întîi, căci derivatele de ordinul al doilea care apar se distrug reciproc, — ceea ce, de altfel, se verifică uşor. Acest operator este egal cu $-P_\chi (\varphi, \psi)$; relaţia (11.13) fiind prin aceasta demonstrată.

366. **Relaţia dintre parantezele lui Lagrange şi parantezele lui Poisson.** Să considerăm $2n$ funcţii $f_1, f_2, \ldots, f_{2n}$ de variabilele x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ cu determinantul funcţional diferit de zero şi să formăm produsul:

$$\sum_{r=1}^{2n} (f_r, f_s) \, [f_r, f_k]. \tag{11.14}$$

Exprimînd parantezele care figurează în (11.14) prin valorile date de relaţiile (11.6) şi (11.2) şi observînd că:

$$\sum_r \frac{\partial f_r}{\partial y_i} \frac{\partial y_j}{\partial f_r} = \delta_{ij}; \quad \sum_r \frac{\partial f_r}{\partial x_i} \frac{\partial x_j}{\partial f_r} = \delta_{ij};$$

$$\sum_r \frac{\partial f_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_j}{\partial f_r} = 0; \quad \sum_r \frac{\partial f_r}{\partial y_i} \frac{\partial x_j}{\partial f_r} = 0;$$

obţinem:

$$\sum_{r=1}^{2n} (f_r, f_s) \, [f_r, f_k] = \delta_{sk}. \tag{11.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Această relație exprimă legătura dintre parantezele lui Poisson și Lagrange. Relația (11.15) formulează condiția ca determinanții:

$$|(f_r, f_s)|; \quad |[f_r, f_k]|$$

să fie reciproci.

Consecințe. 1. Condițiile necesare și suficiente pentru ca transformarea (11.1) să fie canonică (deci, de contact) este:

$$(\xi_k, \xi_r) = 0, \ (\eta_k, \eta_r) = 0; \ (\xi_k, \eta_r) = \delta_{kr}. \tag{11.16}$$

Obținem astfel două sisteme de variabile canonice: $\{\xi_r, \eta_k\}$ și $\{x_r, y_k\}$; condițiile (11.16) exprimînd proprietatea: variabilele ξ_r și η_k sînt, între ele, *canonic conjugate* (v. § 323); ca și, de altfel perechea $\{x_r, y_k\}$.
În adevăr, din relațiile (11.15) și (11.12) rezultă că, pentru o transformare canonică, determinantul:

$$D = |[f_r, f_k]|$$

unde înlocuim pe f cu ξ și cu η, este egal cu unitatea, astfel încît minorii termenilor corespunzători unui $[f_r, f_k]$ anumit, sînt sau nuli sau egali cu unitatea. Or, raportul dintre acești minori și determinantul D ne dau exact expresiile (11.16).

2. Fie $\Phi = \Phi(\xi,\eta)$; $\Psi = \Psi(\xi,\eta)$ și fie $\varphi = \varphi(x,y)$; $\psi = \psi(x,y)$ ceea ce devin primele două funcții dacă înlocuim pe ξ și η în funcție de x și y după (11.1). Aplicînd relației (11.12) formulele (11.16), găsim imediat:

$$(\Phi, \Psi) = (\varphi, \psi). \tag{11.17}$$

Deci, parantezele lui Poisson sînt invariante la o transformare canonică.

367. **Parantezele lui Poisson pentru sistemele hamiltoniene.** Considerăm sistemul hamiltonian:

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k} \tag{11.18}$$

unde $H = H(p, q; t)$ este funcția hamiltoniană.

Avînd în vedere modul de formare a parantezelor lui Poisson, ecuațiile canonice (11.18) mai pot fi scrise și sub forma:

$$\dot{q}^k = (q^k, H); \quad \dot{p}_k = (p_k, H). \tag{11.18'}$$

Fie:

$$F(p_k, q^k; \ t) = \text{const.}, \tag{11.19}$$

o integrală primă a sistemului canonic. Ea reprezintă în R_{2n+1} o multiplicitate M_{2n} uniparametrică, pe care se vor găsi curbele integrale ale sistemului (11.18). Funcția F trebuie să satisfacă ecuația diferențială liniară:

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = 0. \tag{11.20}$$

Scanned with OKEN Scanner

După (11.18) și (11.16), ecuația (11.20) poate să fie scrisă sub forma

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} - (F, H) = 0. \tag{11.21}$$

În cazul unei funcții *oarecare*, care nu depinde explicit de timp $F = F\ (p_k, q^k)$, urmează pentru definiția derivatei totale:

$$\dot{F} = (H, F); \tag{11.22}$$

expresie deosebit de însemnată, prin întrebuințarea ce o găsește în mecanica cuantică modernă (§ 390). Dacă funcția F nu depinde explicit de timp și avem:

$$(H, F) = 0, \tag{11.23}$$

urmează că $F = \text{const.}$ este o integrală primă a sistemului (11.18) și reciproc. Așadar, relația (11.23) exprimă condiția necesară și suficientă ca o funcție $F(p, q)$, care nu depinde explicit de timp, să fie o integrală primă a sistemului canonic care posedă energia $H = H\ (p_k, q^k; t)$.

Pentru $F = H\ (p_k, q^k)$, relația (11.22) ne dă integrala primă a energiei:

$$\dot{H} = (H, H) = 0$$

deci:

$$H\ (p_k, q^k) = \text{const.}, \tag{11.24}$$

expresie care constituie un invariant al sistemului (11.18).

Pentru $F = t$ (timpul) obținem un alt invariant important:

$$(H, t) = 1; \tag{11.25}$$

care exprimă proprietatea interesantă: energia și timpul alcătuiesc o pereche de variabile canonic conjugate, după relațiile (11.16).

În cazul unei funcții oarecare $F = F\ (p_k, q^k; t)$ avem:

$$\frac{\partial F}{\partial p_k} = +(F, q^k); \quad \frac{\partial F}{\partial q^k} = -(F, p_k); \tag{11.26}$$

drept definiție a derivatelor parțiale în raport cu variabilele spațiale.

Cu aceste notații, ecuațiile canonice (11.18) se scriu:

$$\dot{q}^k = (H, q^k)\ ;\ \dot{p}_k = (H, p_k). \tag{11.27}$$

Este clar că, reciproc, ecuațiile canonice sînt invariante pentru transformarea canonică. Pentru a stabili această proprietate să considerăm, pentru moment, o funcție $F = F\ (H, t)$ de perechea canonic conjugată H și t, după (11.25), știind că H este un invariant (11.24).

În aceste condiții, avem:

$$F = \frac{\partial F}{\partial t} \equiv \frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial H} - \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial H}{\partial t} = (H, F). \tag{11.28}$$

Fie acum o nouă pereche de variabile canonice $Q\ (H, t)$, $P\ (H, t)$ deci, satisfăcînd relațiilor $(P, Q) = 1$, ceea ce înseamnă că pot fi rezolvate în raport cu H și se poate găsi invariantul energiei $H\ (P, Q)$ în noul sistem

Scanned with OKEN Scanner

de variabile. Aplicînd operaţia (11.28) funcţiilor P şi Q obţinem sistemul canonic:

$$\dot{Q} = (H, Q); \quad \dot{P} = (H, P)$$

sub forma (11.27). Prin aceasta, proprietatea enunţată este demonstrată.

368. **Teorema lui** P o i s s o n. Dacă:

$$F_1 (q^k, p_k; t) = c_1 \text{ şi } F_2 (q^k, p_k; t) = c_2 \tag{11.29}$$

sînt două integrale prime distincte ale ecuaţiilor hamiltoniene, atunci şi:

$$(F_1, F_2) = \text{const.} \tag{11.30}$$

va fi o nouă integrală primă.

În adevăr, din (11.29) deducem, după (11.28), relaţiile:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + (H, F_1) = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} + (H, F_2) = 0. \tag{11.31}$$

Să aplicăm celei de a doua relaţii (11.31) operatorul P_{F_1} şi celei dintîi, operatorul P_{F_2} şi să le scădem; obţinem,

$$0 = (F_1, (F_2, H)) + (F_2, (H, F_1)) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial t}, F_1\right) + \left(F_2, \frac{\partial F_1}{\partial t}\right). \tag{11.32}$$

Avînd în vedere că:

$$\frac{\partial}{\partial t}(F_1, F_2) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{D(F_1, F_2)}{D(p, q)} = \left(F_2 \frac{\partial F_1}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial t}, F_1\right),$$

relaţia (11.32) se poate scrie:

$$(F_1, (F_2, H)) + (F_2, (H, F_1)) - \frac{\partial}{\partial t}(F_1, F_2) = 0. \tag{11.33}$$

Pe de altă parte, din identitatea lui J a c o b i (11.13) rezultă:

$$(F_1, (F_2, H)) + (F_2, (H, F_1)) + (H, (F_1, F_2)) = 0.$$

Prin comparaţie cu (11.33) deducem, aşadar:

$$\frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial t} - ((F_1, F_2), H) = 0;$$

ceea ce demonstrează teorema enunţată.

Aşadar, din două integrale cunoscute putem deduce, prin simple operaţii de diferenţiere, o a treia integrală primă. Combinînd, în acelaşi mod, această nouă integrală cu celelalte două, putem deduce alte două integrale noi şi aşa mai departe, pînă cînd expresiile noi găsite sînt simple funcţii de integralele anterioare.

Prin acest procedeu se poate întîmpla să fi găsit toate cele $2n$ integrale prime necesare formării integralei generale. Este de asemenea posibil ca şirul să se întrerupă mai curînd, după cum se vede în exemplul următor.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm cele două integrale prime date de teorema ariilor față de două plane rectangulare. Prin teorema lui P o i s s o n putem deduce o a treia integrală, care constituie teorema ariilor față de planul care formează cu primele un triedru tridreptunghic. În adevăr:

$$A = \sum_i m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) \; ; \; B = \sum_i m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i).$$

După teorema lui P o i s s o n avem o nouă integrală, anume:

$$C = (A, B) = \sum (0 z_i + 0 \dot{z}_i + \dot{z}_i 0 - m_i z_i 0 + \\ + \dot{y}_i m_i x_i - m_i y_i \dot{x}_i) = \sum m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i),$$

ceea ce constituie a treia integrală cunoscută din teorema ariilor. Cu această ultimă integrală ciclul s-a închis. Aceeași observație se aplică tuturor teoremelor clasice: teorema energiei etc.

Este de remarcat că în cazul cînd combinația (F_1, F_2) nu furnizează o integrală nouă, distinctă de primele două, teorema nu aduce nici o contribuție în rezolvarea problemei de integrare a sistemului diferențial.

Consecință. Să admitem că, pentru sistemul hamiltonian, cu H nedepinzînd explicit de timp, în afară de integrala primă a energiei se poate găsi, întîmplător, o a doua integrală primă.

Fie deci:

$$F(q^r, p_r; t) = c$$

o a doua integrală primă. După teorema lui P o i s s o n:

$$(H, F) = c_1$$

va fi o nouă integrală primă. Dar, ecuația (11.21) ne dă:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (F, H) = 0.$$

Rezultă că vom avea:

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial t} = c_1;$$

ceea ce arată că F_1 este o altă integrală. Continuînd raționamentul deducem teorema: dacă pentru un sistem hamiltonian a cărui energie nu depinde explicit de timp, am putea scrie o integrală primă $F = c$, distinctă de integrala energiei, vom putea scrie un șir succesiv de integrale prime:

$$F_1 = \frac{\partial F}{dt} = c_1; \quad F_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c_2 \text{ etc.}$$

pînă cînd problema este integrată sau pînă cînd șirul se întrerupe.

369. **Sisteme în „involuție“.** Dacă F_1 și F_2 sînt două integrale prime și:

$$(F_1, F_2) = \text{funcție de } F_1 \text{ și } F_2$$

cele două integrale se numesc *conjugate*.

Dacă însă funcțiile F_1 și F_2 satisfac *identic* relației:

$$(F_1, F_2) = 0$$

ele se zic că sînt în *involuție*.

Scanned with OKEN Scanner

S. Lie numește *grup funcțional* ansamblul funcțiilor:

$$F_1(q, p; t), F_2, \ldots, F_m$$

care satisface condiției: paranteza lui Poisson formată cu două oarecare din funcțiile grupului se poate exprima ca o nouă funcție de funcțiile grupului:

$$(F_s, F_h) = f_{sh}(F_1, \ldots, F_m).$$

Dacă cele m funcții ale grupului sînt independente, m exprimă numărul *termenilor* grupului. Totalitatea celor $2n$ integrale prime distincte ale sistemului canonic:

$$F_i(q^r, p_r; t) = c_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots 2n)$$

formează un grup cu $2n$ termeni.

Din considerațiile de mai sus se constată că proprietățile involutive sînt de mare însemnătate pentru problema integrării sistemelor canonice.

370. **Aplicații ale parantezelor lui Poisson în mecanica cuantică.** Într-o lucrare fundamentală pentru întreaga dezvoltare a fizicii moderne, fizicianul W. Heisenberg[1]) supune unei critici amănunțite metoda de calcul și noțiunile esențiale care domină structura *teoriei cuantice clasice*, cum a fost fost formulată și dezvoltată, pînă la 1925, de Max Planck, A. Sommerfeld și N. Bohr. Se știe că această teorie proceda pentru studiul fenomenelor cuantice în modul următor: sistemele atomice erau concepute ca sisteme mecanice de oscilatori a căror mișcare era descrisă prin mecanica clasică, respectiv ecuațiile lui Hamilton. După ce, pe această cale, se deduceau anumite mărimi de însemnătate fizică (valori medii de energii, frecvențe etc.), se renunța la reprezentarea mecanică clasică, spre a se interpreta rezultatele găsite, în sens cuantic, cu ajutorul dicționarului ingenios și rodnic al *principiului corespondenței*.

Cum nu dezvoltăm aici o teorie a cuantelor, ne mărginim numai la redarea raționamentelor principale, esențiale în descoperirea mecanicilor cuantice. W. Heisenberg face observația următoare: cunoștințele noastre asupra lumii atomice își au izvorul, în mare parte, în măsurarea radiației (amplitudini, frecvențe etc.) emise de atomi. După mecanica clasică și teoriile electromagnetice de structură clasică, ar trebui ca frecvențele luminii emise (respectiv absorbite) să fie exact frecvențele mecanice ale sistemului atomic mecanic. Se constată însă *experimental* că liniile spectrale ale emisiilor (respectiv absorbției) atomice, în spectru, nu se dispun după formulele clasice, ci după transcrierea lor cuantică. Atunci, spune Heisenberg, ne aflăm în alternativa: 1) renunțăm la identitatea dintre mărimile (frecvențele) luminoase și cele mecanice; așa a făcut N. Bohr în teoria cuantică clasică a structurii materiei, — cu numeroase rezultate în cercetarea fizicii atomice, — dar care ajunsese, în 1925, la un impas inextricabil în interpretarea unor noi rezultate experimentale, cu apariția *jumătăților* de numere cuantice!; 2) renunțăm la mecanica clasică pentru descrierea mișcărilor intraatomice (cum a făcut Einstein în problema relativității).

---

[1]) W. *Heisenberg*, „Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen, Z. f. Phys. 33, 879, 1925.

Scanned with OKEN Scanner

Dar atunci, este necesar să se dezvolte o ncuă mecanică cuantică, adecvată studiului direct al evoluției mărimilor cuantice care descriu o stare atomică; metodă adoptată de W. Heisenberg în 1925. Pentru justificarea acestei preferințe, Heisenberg se sprijină pe următorul *principiu euristic*: o teorie trebuie să conțină numai relații între mărimi care pot fi direct și *principial observabile*: deci, ea trebuie să introducă numai noțiuni care admit o imediată interpretare experimentală. O astfel de regulă are sens numai cînd e vorba de o teorie în formație. Îndată ce un sistem teoretic este gata, închis, nu mai există nici o deosebire principială între mărimi observabile și neobservabile; fiecare măsurare va fi complet inteligibilă prin interpretare teoretică. De îndată însă ce un sistem de noțiuni teoretice, corespunzător unui complex experimental, nu este complet cunoscut și determinat, există deosebire între noțiuni: sînt unele care apar necesare pentru a se putea exprima rezultatul experiențelor, altele care se introduc numai în discuțiile relațiilor posibile. La prima clasă de noțiuni corespund ceea ce am numit *mărimi direct observabile*; pe acestea trebuie să le păstrăm cît mai mult; celelalte pot fi ușor sacrificate. Pe baza acestor considerații, W. Heisenberg găsește că mărimile cuantice cu care trebuie să opereze o mecanică cuantică consecventă au caracter de *matrici hermitice*, de forma $\mathbf{a} = (a\,(m, n))$ cu proprietățile:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a\,(m, n) + b\,(m, n));$$

$$\mathbf{ab} = \sum_k a\,(m, k)\; b\,(k, n);\quad \mathbf{ba} = \sum_k b\,(m, k)\; a\,(k, n);\quad \mathbf{ab} - \mathbf{ba} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0.$$

$$(\mathbf{ab})\,\mathbf{c} = \mathbf{a}\,(\mathbf{bc});\quad (\mathbf{a}+\mathbf{b})\;\mathbf{c} = \mathbf{ac}+\mathbf{bc};\quad \mathbf{c}\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{ca}+\mathbf{cb};$$

$1 = (\delta\, mn)$; $1\mathbf{a} = \mathbf{a}1 = \mathbf{a}$; $\mathbf{a}^+ = (\mathbf{a}\;(n,m)^*)$; unde $(^*)$ = imaginar conjugat, iar $\mathbf{a}^+$ se deduce din $\mathbf{a}$ prin oglindire față de diagonală ($m = n$) și trecere la imaginar conjugata; așa încît $\mathbf{a}^+ = \mathbf{a}$ exprimă *condiția de hermiticitate*.

Apoi: $$(\mathbf{ab})^+ = \mathbf{b}^+\,\mathbf{a}^+;\quad (\mathbf{a}+\mathbf{b})^+ = \mathbf{a}^+ + \mathbf{b}^+.$$

Postulatul fundamental al mecanicii cuantice constă în relația de corespondență, introdusă de P. A. M. Dirac, dintre mărimile cuantice $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ și cele clasice a, b sub forma:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \to \frac{h}{2\pi i}\,(a, b),$$

unde h este constanta lui Planck; $i = \sqrt{-1}$; iar $(a, b) = ab - ba$, sînt paranteze Poisson normale, iar $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ sînt parantezele Poisson cuantice.

După această concepție, un sistem atomic este caracterizat prin mărimi cuantice q^r, p_r, analoge coordonatelor lagrangeiene și care satisfac, ținînd seama de corespondența fundamentală (11.36), următoarelor *relații de comutativitate* (care înlocuiesc, în noile Mecanici, condițiile cuantice clasice ale lui Bohr-Sommerfeld):

$$(p_r, p_s) = 0;\quad (q^r, q^s) = 0;$$

$$(p_r\, q^s - q^s\, p_r) \equiv (p_r, q^s) = \frac{h}{2\pi i}\,\delta_{r,\,s}\cdot 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ca o consecință a acestor relații de comutativitate se poate stabili teorema care definește *derivarea cuantică spațială*, și anume:

Dacă $F(p, q)$ este o funcție de p_k și q_k, atunci avem:

$$(q^k, F) = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial F}{\partial p_k}\,;\quad (p_k, F) = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial F}{\partial q^k}. \tag{11.34}$$

Evoluția fizică a unui sistem atomic posedînd energia $H(p, q)$ este urmărită în această mecanică cuantică prin ecuațiile de stare construite prin analogie cu ecuațiile clasice hamiltoniene:

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{2\pi i}{h}(H, q^k); \tag{11.35}$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k} = \frac{2\pi i}{h}(H, p_k). \tag{11.36}$$

Prin generalizarea relațiilor precedente se postulează *derivarea cuantică temporală*:

$$\dot{a} = \frac{2\pi i}{h}(H, a) \tag{11.37}$$

prin analogie cu relația clasică, în ipoteza că mărimea a nu conține explicit timpul.

Această mecanică algebrică conduce, însă, la calcule inextricabile cînd se procedează la calcularea efectivă a unei probleme atomice, chiar în cazurile cele mai simple.

În dezvoltarea rapidă a cercetărilor din perioada din preajma anului 1925, s-a reușit a se formula ideile dezvoltate de Heisenberg conexate cu rezultatele lui Louis de Broglie, în două alte sisteme cuantice importante; *mecanica ondulatorie* a lui E. Schrödinger și *mecanica operatorie* a lui P. A. M. Dirac. Nu putem dezvolta aici aceste teorii. Vom reda numai, ca exemplu de calcul cu parantezele lui Poisson, mișcarea unui punct material, fără cîmp exterior (punct liber nesupus nici unei forțe exterioare), în Mecanica lui Dirac. Acest autor introduce în locul mărimilor clasice și în locul matricelor lui Heisenberg, niște *mărimi operatorii*, numite „*numere* — q", supuse acelorași reguli de comutativitate și acelorași legi. Dirac propune pentru ecuația relativistă a punctului material de masă m, expresia:

$$\frac{W}{c} = \sum_1^3 \alpha_k p_k + \alpha_4 mc; \tag{11.38}$$

care se obține prin liniarizarea formei pătratice relativiste a energiei:

$$\frac{W^2}{c^2} = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2c^2. \tag{11.39}$$

Cîtimile care apar în expresia (11.38) posedă calitatea de *operatori* similari corespunzătoarelor mărimi clasice; anume:

W este operatorul „energiei"; punîndu-se și $W \equiv p_0$;

$p_k = \dfrac{m_0 v_k}{\sqrt{1-\beta^2}}$, (cu $k = 1, 2, 3$) sînt operatorii „impuls";

c = viteza luminii; $\beta = \dfrac{v}{c}$

α_k ($k = 1, 2, 3$) sînt definiţi ca operatori „viteză"; anume:

$$v_k = \frac{dx_k}{dt} = c\alpha_k; \quad \alpha_4 = \sqrt{1-\beta^2}.$$

Relaţiile de comutativitate între operatorii p şi α sînt:

$$\begin{gathered} \alpha_r p_k - p_k \alpha_r = 0; \quad \alpha_r \alpha_k + \alpha_k \alpha_r = 2\delta_{rk}; \\ p_r x_k - x_k p_r = \frac{h}{2\pi i} \delta_{rk}; \end{gathered} \tag{11.40}$$

deduse din condiţia ca din relaţia (11.38) să obţinem relaţia (11.39) prin ridicare la pătrat.

În Mecanica clasică mişcarea unui punct material liber, fără forţe exterioare, se efectuează, precum ştim, rectiliniu şi uniform. În Mecanica lui Dirac se prezintă iniţial, în această problemă, următorul paradox: după relaţiile (11.38) operatorii $c\alpha_4$ sînt susceptibili numai de valorile proprii $\pm c$: punctul se mişcă totdeauna cu viteza luminii, — concluzie inadmisibilă! Acest paradox se lămureşte prin observaţia că operatorii α_k nu sînt constanţi, ci, după regulile de derivare cuantică (11.37) avînd în vedere şi relaţiile (11.35), (11.36), se obţine:

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{d\alpha_k}{dt} = (W, \alpha_k) = 2 (W\alpha_k - cp_k) \neq 0. \tag{11.41}$$

Punînd:

$$\eta_k = c\alpha_k - c^2 W^{-1} p_k, \tag{11.42}$$

şi integrînd ecuaţia (11.42) se obţine:

$$X_k = a_k + c^2 W^{-1} p_k t - \frac{h}{4\pi i} \eta_k^0 W^{-1} e^{-\frac{4\pi i}{h} Wt} \tag{11.43}$$

unde a_k şi η_k^0 sînt operatori de natura unor constante de integrare. Se observă apoi că impulsurile p_k comută cu energia W, după (11.37); aşadar sînt invarianţi ai mişcării, deci constanţi. Apare deci distincţia între noţiunile de „viteză" şi de „impuls".

Rezultatul precedent este remarcabil; primul termen din membrul al doilea al ecuaţiei (11.43) exprimă o mişcare progresivă în t crescător, avînd viteza constantă ce corespunde impulsului constant p_k, deci ca şi în cazul mişcării clasice, la care se poate trece prin operaţia:

$$c^2 W^{-1} p_k \to c^2 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{mc^2} \frac{mv_k}{\sqrt{1-\beta^2}} = v_k. \tag{11.44}$$

Acestei mişcări, însă, după (11.44), i se suprapune fenomenul *periodic*, numit *trepidaţia lui Schrödinger*, definit prin termenul al treilea din membrul al doilea al relaţiei (11.43). Frecvenţa trepidaţiei este $\frac{2\pi i}{h} 2W$, iar amplitudinea $\frac{h}{4\pi i} \eta_k^0 W^{-1}$, avînd ordinul de mărime a lungimii de undă a lui Compton, anume $\lambda = \frac{h}{m_0 c} \approx 10^{-11}$ cm. S-ar părea că acest efect, joc

de calcul abstract între „operatorii“ lui D i r a c, nu are o reprezentare fizică, în realitate. Totuşi I. I. P l ă c i n ţ e a n u[1]) a încercat o concretizare a fenomenului de trepidaţie S c h r ö d i n g e r în problema masei variabile.

Capitolul XII

ECUAŢIA CU DERIVATE PARŢIALE HAMILTON-JACOBI METODE DE INTEGRARE ŞI CAZURI SPECIALE DE INTEGRABILITATE

371. **Ecuaţia cu derivate parţiale a dinamicii.** În cursul dezvoltării am constatat că prin cunoaşterea funcţiei de acţiune V ca soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale:

$$H\left(q^k, \frac{\partial V}{\partial q^k}; t\right) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{12.1}$$

hesseianul lui H fiind diferit de zero, problema de integrare a sistemului de ecuaţii diferenţiale al Dinamicii este rezolvată. De asemenea, la § 347 şi următoarele, am găsit că funcţia V este generatoarea unei transformări de contact şi prin urmare a unei transformări canonice. Este, aşadar, de aşteptat ca ecuaţia (12.1), numită *ecuaţia diferenţială cu derivate a lui* H a m i l t o n şi J a c o b i, să joace un rol important în studiul proprietăţilor analitice ale sistemelor dinamice. În adevăr, teoria analitică a ecuaţiilor cu derivate parţiale stabileşte o strînsă legătură între sistemele canonice şi ecuaţia lui H a m i l t o n - J a c o b i. Pentru a dezvolta această proprietate şi a-i folosi aplicaţiile curente în vederea integrării problemelor mecanice, vom reaminti mai întîi o teoremă fundamentală cunoscută din teoria ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale.

372. **Sistemul diferenţial al caracteristicilor unei ecuaţii cu derivate parţiale.** Să considerăm, în general, următoarea ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întîi:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; z; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \tag{12.2}$$

unde F este o funcţie continuă şi finită de argument, admiţînd derivate de ordinul întîi în raport cu variabilele; x_i sînt n variabile independente; z este o variabilă dependentă, funcţie de x_i:

$$z = W(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{12.3}$$

care urmează a fi determinată în anumite condiţii pe care le precizăm mai jos, iar:

$$y_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \tag{12.4}$$

reprezintă derivata parţială a funcţiei z în raport cu variabila x_i.

---

[1]) Bulletin Mathématique de la Soc. Roum. des Sc. T. 35, 1933, Bucarest; Zf. f. Phys. 84, p. 370; 1933.

Scanned with OKEN Scanner

Funcția z este o *soluție* a ecuației (12.2). Determinarea unei astfel de funcții rezolvă problema integrării ecuației diferențiale. Din teoria ecuațiilor cu derivate parțiale se știe că soluția $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ este o integrală generală a ecuației (12.2) dacă satisface *condițiilor lui* C a u c h y: pentru $x_1 = x_1^0, \ldots, x_m = x_m^0$, unde $m \leqslant n$; $z = z^0(x^0, \ldots, x_m^0; x_{m+1}, \ldots, x_n)$ cînd z este o funcție dată anterior[1]). De asemenea, se numește integrală completă soluția:

$$z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n; c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

unde c_r sînt n constante arbitrare *esențiale* [2]).

În spațiul $R_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n; z)$ ecuația (12.3) reprezintă o suprafață. Într-un punct dat $P_0(x^0, z^0)$ al suprafeței (12.3) vectorul unitar al normalei are componentele $(y_i^0, -1)$. Să considerăm un *element* al varietății R_{n+1} (v. § 318). Mulțimea valorilor $P(x_i; z; y_i)$, care satisfac ecuației (12.2) constituie un șir simplu infinit de elemente, numit o *curbă caracteristică*. Vom arăta mai jos că o curbă caracteristică se bucură de proprietatea fundamentală: două suprafețe integrale sînt tangente de-a lungul curbei caracteristice. Ne propunem acum să găsim ecuațiile diferențiale care definesc caracteristicile ecuației cu derivate parțiale.

Fie, în spațiul R_n (al variabilelor x), o curbă (C):

$$x_i = x_i(t). \tag{12.5}$$

Să derivăm ecuația (12.2) în raport cu o variabilă x_j; obținem:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \tag{12.6}$$

Facem în (12.3) și (12.4) substituția (12.5) și derivăm aceste ecuații în raport cu t; se obține:

$$\dot{z} = \frac{\partial W}{\partial x_j}\dot{x}_j; \quad \dot{y}_j = \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_i}\dot{x}_i. \tag{12.7}$$

Adunînd la ecuația (12.6) a doua ecuație (12.7) rezultă:

$$\dot{y}_j + \frac{\partial F}{\partial y_j} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial x_j} = \sum \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_i}\left(\dot{x}_i - \frac{\partial F}{\partial y_i}\right). \tag{12.8}$$

Vom alege din mulțimea curbelor (C) numai pe acelea care satisfac relației:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{12.9}$$

știind că în F am făcut substituțiile (12.3) și (12.4), anume:

$$F = F\left[x_i, W(x_j), \frac{\partial W(x)}{\partial x_i}\right].$$

---

[1]) În ipoteza că toate derivatele parțiale $\partial F/\partial y_i$, pentru $i = 1, 2, \ldots m$, sînt diferite de zero.

[2]) Ceea ce înseamnă, constante pentru care $D(y)/D(c) \neq 0$, deci hesseianul lui z este diferit de zero.

Scanned with OKEN Scanner

În aceste condiții, ecuația (12.8) ne dă:

$$\dot{y}_j = -\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial x_j}, \tag{12.10}$$

bineînțeles, făcînd de asemenea substituțiile (12.5), (12.3) și (12.4) așa încît membrul al doilea poate să fie considerat ca o funcție de t.

Introducînd în prima ecuație (12.7) substituția (12.9), obținem:

$$\dot{z} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial y_j}, \tag{12.11}$$

membrul al doilea fiind de asemenea o funcție de t.

Ecuațiile (12.9), (12.10) și (12.11) alcătuiesc un sistem de $2n + 1$ ecuații diferențiale ordinare care determină $2n + 1$ funcții de t:

$$x_i = x_i(t) \tag{12.12}$$

cu condiția $x_i^0 = x_i(t_0)$; și:

$$y_i^0(t) = \frac{\partial W[x^0(t)]}{\partial x_i}; \quad z^0(t) = W\left[x_j^0(t)\right]. \tag{12.12'}$$

După cele spuse mai sus, grupul de valori (12.12) și (12.12'), pentru un t dat, definește un „element" $(x_i^0, y_i^0; z^0)$ în varietatea R_{n+1}. Ansamblul acestor elemente definește o curbă așezată pe suprafața (12.3). Variația în timp a punctului figurativ, pe această curbă, se face în conformitate cu ecuațiile (12.9), (12.10) și (12.11). Am numit o astfel de curbă, *caracteristica* ecuației diferențiale (12.2). Prin urmare, ecuațiile (12.9), (12.10) și (12.11) sînt ecuațiile diferențiale ale caracteristicilor ecuației diferențiale cu derivate parțiale (12.2).

373. **Teoremă.** *Două suprafețe integrale sînt tangente de-a lungul curbei caracteristice.*

În adevăr, două suprafețe integrale:

$$z = W_1(x_i); \quad z = W_2(x_i) \tag{12.13}$$

trebuie să aibă un element comun, anume elementul inițial x_i^0, y_i^0, z_i^0, t_0. Dar atunci, ele vor conține toate elementele caracteristicii generate de elementul inițial, anume:

$$\begin{gathered} x_i = f_i(t; x_j^0; z^0; y_j^0); \quad y_i = \varphi_i(t; x_j^0; z^0; y_j^0); \\ z = \psi(t; x_j^0; z^0; y_j^0). \end{gathered} \tag{12.14}$$

Așadar, cele două suprafețe (12.13) se vor atinge de-a lungul curbei caracteristice (12.14).

Aceste curbe caracteristice depind, precum se vede, numai de alegerea condițiilor inițiale, condiții arbitrare, pînă la obligația de a satisface identic ecuația diferențială (12.2):

$$F(x_j^0; z^0; y_j^0) = 0$$

și relația de definiție (12.4).

Scanned with OKEN Scanner

374. **Ecuația cu derivate parțiale a mecanicii.** Această ecuație, cunoscută sub numele de ecuația lui H a m i l t o n-J a c o b i, se scrie, după (12.1), (12.2) și (12.3):

$$F(q^k, p_k; t) \equiv H\left(q^k; \frac{\partial z}{\partial q^k}; t\right) + \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \qquad (12.15)$$

Forma acestei ecuații este diferită de forma generală (12.2) fiindcă: 1) nu cuprinde explicit pe z; aceasta face ca din ecuația (12.10), care dă pe $\dot{y}$, să dispară al doilea termen; 2) conține încă o variabilă independentă t, explicit; ceea ce nu modifică cu nimic concluziile generale de la § 371 și 372; 3) am făcut notația:

$$p_k = \frac{\partial z}{\partial q^k}; \quad p_0 = \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Sistemul diferențial al caracteristicilor, după (12.9), (12.10) și (12.11), se scrie:

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k}; \quad \dot{t} = 1; \quad \dot{p}_0 = -\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Primele două serii de cîte n ecuații formează sistemul hamiltonian; a treia ecuație este o identitate; a patra ecuație, observînd că după (12.15), prin definiție:

$$p_0 = \frac{\partial z}{\partial t} = -H$$

se scrie:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

ecuație care nu este independentă de primele $2n$ ecuații canonice și conduce, cînd t nu figurează explicit în H, la ecuația energiei.

Rezultă: *sistemul diferențial al ecuațiilor canonice este sistemul ecuațiilor caracteristicilor ecuației diferențiale cu derivate parțiale a lui* H a m i l t o n-J a c o b i.

Această proprietate reduce studiul integrării sistemelor hamiltoniene la studiul integrării ecuației diferențiale cu derivate parțiale, ceea ce s-ar părea că în loc să ușureze problema, o îngreuiază. Totuși anumite proprietăți ale acestei ecuații diferențiale dau rezultate interesante pentru integrarea ecuațiilor canonice.

Metode de integrare și cazuri speciale de integrabilitate

375. **Transformarea problemei dinamice în problemă statică.** Să căutăm o transformare canonică a cărei funcție generatoare, pe care s-o notăm cu V, să transforme sistemul canonic inițial într-un sistem canonic de forma simplificată:

$$\dot{Q}^k = 0; \quad \dot{P}_k = 0; \qquad (12.16)$$

Scanned with OKEN Scanner

sistem pentru care funcţia hamiltoniană transformată, K, să fie nulă. Or, după ecuaţia (12.1):

$$H\left(q^1, q^2, \ldots, q^n; \frac{\partial V}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q^n}; t\right) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \tag{12.17}$$

luînd funcţia transformatoare de determinant $V = V(q^k, Q^k; t)$.

Din ecuaţiile (12.16) rezultă că toţi Q^k sînt constanţi; îi egalăm cu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, aşa încît:

$$V = V(q^1, q^2, \ldots, q^n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; t) \tag{12.18}$$

este o integrală completă a ecuaţiei (12.17). Cunoscînd integrala completă (12.18), transformarea canonică (9.21) § 327 ne dă integralele intermediare:

$$p_k = \frac{\partial V}{\partial q^k}; \quad \beta_k = -\frac{\partial V}{\partial \alpha_k}; \quad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{12.19}$$

astfel încît sistemul (12.16) se integrează prin:

$$Q^k = \alpha_k; \quad P_k = \beta_k$$

β_k fiind şi ele constante ale mişcării.

Sistemul (12.19) defineşte q^k şi p_k în funcţie de cele $2n$ constante α_k şi β_k, care sînt, după § 331, constante esenţiale (independente), căci hesseianul lui V este diferit de zero:

$$q^k = f_1(\alpha, \beta; t); \quad p_k = f_2(\alpha, \beta; t). \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

Aceste relaţii servesc şi la determinarea constantelor α şi β cînd cunoaştem valorile iniţiale q_0^k şi p_k^0 în momentul iniţial $t = t_0$:

$$q_0^k = f_1(\alpha, \beta; t_0); \quad p_k^0 = f_2(\alpha, \beta; t_0). \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

Rezolvarea sistemului precedent este posibilă, hesseianul fiind diferit de zero.

În felul acesta, problema integrării sistemului canonic se reduce la problema găsirii unei integrale complete a ecuaţiei cu derivate parţiale (12.17), ceea ce din punct de vedere teoretic nu constituie un avantaj, această din urmă problemă prezentînd dificultăţi analitice mai mari, în general, decît prima. Există însă anumite cazuri particulare remarcabile de integrabilitate.

376. **Ecuaţia cu derivate parţiale a lui Hamilton-Jacobi cînd H nu conţine explicit timpul.** Punînd:

$$V = S(q^k, Q^k) - Et,$$

unde E este constanta energiei totale, ecuaţia (12.17) devine:

$$H\left(q^1, q^2, \ldots, q^n; \frac{\partial S}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q^n}\right) = E. \tag{12.20}$$

O integrală completă:

$$S = S(q^k; \alpha_2, \ldots, \alpha_n; E),$$

rezolvă problema, căci:

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q^k}; \quad \beta_r = \frac{\partial S}{\partial \alpha_r}; \quad t - t_0 = \frac{\partial S}{\partial E}. \qquad \begin{matrix}(k = 1, 2, \ldots n)\\ (r = 2, 3, \ldots n)\end{matrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

După § 337, funcția $S(q, Q)$ trebuie să satisfacă la condiția ca determinantul lui Hesse să fie diferit de zero:

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial q^r \partial Q^h} \right| \neq 0.$$

377. **Variabile ciclice.** În § 289 am definit coordonatele ciclice și am arătat importanța existenței acestui fel de coordonate; ceea ce revine a spune, existența unei funcții lagrangeiene în care lipsesc un număr de m din cele n coordonate $q^1, q^2, \ldots, q^n$.

Și în cazul sistemelor canonice existența unor coordonate ciclice conduce la rezultate interesante pentru rezolvarea problemei dinamice. Să admitem că ar exista m astfel de coordonate $Q^1, Q^2, \ldots, Q^m$ $(m \leqslant n)$. Atunci, hamiltoniana corespunzătoare K va fi o funcție numai de celelalte coordonate $Q^{m+1}, \ldots, Q^n$ și de coordonatele conjugate $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Grupul de ecuații canonice, relative la aceste coordonate, devine:

$$\dot{P}_r = -\frac{\partial K(Q^{m+1}, \ldots, Q^n; P_1, \ldots, P_n)}{\partial Q^r}\,; \quad \dot{Q}^r = \frac{\partial K}{\partial P_r}. \quad (r = 1, 2, \ldots m) \quad (12.21)$$

Prima serie de ecuații (12.21) ne dă valorile $P_r = \beta_r$, $(r = 1, 2, \ldots m)$. Interesant este cazul cînd toate n variabilele Q^r sînt ciclice, deci nu figurează în K. Atunci, K devine o funcție numai de P_r, respectiv, de β_r (n constante de integrare, *esențiale*):

$$K = K(P_1, P_2, \ldots, P_n)\,; \quad \text{unde } P_r = \beta_r \quad (r = 1, 2, \ldots n) \quad (12.22)$$

A doua serie de ecuații (12.21) integrate, ne dau $(m=n)$:

$$\dot{Q}^r = \omega_r = \text{const.}, \quad \text{deci } Q^r = \omega_r^0 t + \omega_r^0, \quad (r = 1, 2, \ldots n) \quad (12.23)$$

și problema este complet rezolvată. Forma unghiulară a valorilor (12.23) unde Q^r variază circular, justifică denumirea de „ciclice" atribuită acestor coordonate.

Problema care ni se pune este: să se găsească o transformare complet canonică, astfel încît funcția hamiltoniană inițială $H(q^r, p_r)$ să devină o nouă funcție hamiltoniană $K(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ independentă de variabilele de poziție Q^r.

După relația (9.20′) § 326 pentru o transformare complet canonică, și observînd (12.22), trebuie ca să avem:

$$H(q^r, p_r) \to K(\beta_r) \quad (12.24)$$

pentru transformarea căutată. Problema se reduce la căutarea unei funcții $S(q^r, \beta_r)$ generatoare a transformării complet canonice:

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial q^r}\,; \quad \alpha_r = \frac{\partial S}{\partial \beta_r}. \quad (12.25)$$

După (12.24) și (12.25), funcția generatoare căutată $S(q, \beta)$ trebuie să fie o integrală completă a ecuației cu derivate parțiale $H - J$:

$$H\left(q^1, q^2, \ldots, q^n; \frac{\partial S}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q^n}\right) = K(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n), \quad (12.26)$$

Scanned with OKEN Scanner

membrul al doilea fiind constant (o constantă care nu este independentă de cele n constante esențiale). Prin însăși natura lui H, se alege constanta din membrul al doilea egală cu constanta energiei E, drept constantă esențială (exemplu $E = \beta_1$); astfel încît celelalte constante independente sînt $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$. Ecuația (12.26) se scrie:

$$H\left(q^k, \frac{\partial S}{\partial q^k}\right) = E\,(\text{const.}), \tag{12.26'}$$

și se caută o funcție $S(q^1, \ldots, q^n;\ E, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, integrală completă a ecuației (12.26').

378. **Teoremă.** Integrala de acțiune:

$$S = \int_{M_1}^{M_2} \sum_k p_k\, dq^k \tag{12.27}$$

este o soluție a ecuației (12.26').

În adevăr, dacă $S(q, \beta, E)$ este o integrală completă a ecuației (12.26), rezultă:

$$dS(q^k, \alpha, E) = \sum_k \frac{\partial S}{\partial q^k}\, dq^k = \sum_k p_k dq^k.$$

Integrînd de-a lungul unei traiectorii în R_n, între două puncte M_1 și M_2, considerînd M_1 drept un punct fix determinat prin condiții inițiale și pe M_2 drept un punct oarecare, obținem integrala de acțiune (12.27).

379. **Cazul separării variabilelor.** Acesta prezintă un deosebit interes în Mecanica cerească și Fizica teoretică. Am văzut (§ 293) cum se rezolvă problema lui L i o u v i l l e . Vom stabili în paragraful următor teorema mai generală a lui P. S t ä c k e l (1891), care rezolvă într-un caz destul de cuprinzător problema: cînd este ecuația lui H a m i l t o n - J a c o b i integrabilă prin separarea variabilelor?

a) În forma hamiltoniană a ecuațiilor dinamice variabilele sînt „efectiv separabile“ dacă:

$$H = \sum_{r=1}^{n} H_r(q^r, p_r) \quad \text{și} \quad S = \sum_{r=1}^{n} S_r(q^r; E, \beta_2, \ldots, \beta_n) \tag{12.28}$$

unde fiecare funcție H_r și S_r este în parte funcție exclusiv de perechea de variabile q^r și p_r și este independentă de celelalte variabile $q^1, \ldots, q^{r-1}, q^{r+1}, \ldots, q^n$ și $p_1, \ldots, p_{r-1}, p_{r+1}, \ldots, p_n$. Este evident că această definiție se acoperă cu definiția dată la § 351. În felul acesta ecuația cu derivate parțiale (12.26) se desparte în n ecuații distincte:

$$H\left(q^r, \frac{\partial S}{\partial q^r}\right) = K(\beta_r) \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \tag{12.29}$$

însemnînd cu $K(\beta_r)$ o funcție constantă depinzînd numai de β_r (energia totală), căci din (12.24) și (12.28), rezultă (12.29).

Scanned with OKEN Scanner

Problema dinamică a unui număr de n variabile, deci, n grade de libertate se reduce la problema mai simplă a n ecuații (12.29) de cîte o singură variabilă, independente. Este de observat că, după § 378:

$$S_r = \int_{M_1}^{M_2} p_r dq^r, \text{ (fără sumare pe } r\text{)}, \tag{12.30}$$

este o soluție a ecuației (12.29). Așadar, după § 345, integrala de-a lungul unei curbe *închise*:

$$J_r = \oint p_r dq^r \tag{12.31}$$

este un invariant al mișcării și al transformării canonice.

b) Se poate prezenta cazul cînd H nu se descompune în sumă de funcții H_r de cîte o singură variabilă; în schimb această condiție să fie satisfăcută de funcția:

$$S = \sum_{r=1}^{n} S_r(q_r, \beta_r) \tag{12.32}$$

unde ($\beta_1 = E$). Atunci, pentru ca ecuația (12.26′) să admită pe S ca integrală completă, funcția H trebuie să satisfacă la *condițiile lui Levi-Civita*: să derivăm ecuația (12.26′) în raport cu o anumită variabilă, de exemplu q^r. Obținem:

$$\frac{dH}{dq^r} = \frac{\partial H}{\partial q^r} + \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial q^r} = 0. \tag{12.33}$$

Observăm că din:

$$p_h = \frac{\partial S}{\partial q^h} = \frac{\partial S_h(q^h, \beta)}{\partial q^h}$$

rezultă că p_k este o funcție exclusiv de coordonata conjugată q^k. Așadar, $\frac{\partial p_k}{\partial q^r}$ este diferită de zero numai pentru $r = k$. Atunci, (12.33) devine:

$$\frac{\partial H}{\partial q^r} + \frac{\partial H}{\partial p_r}\frac{\partial p_r}{\partial q^r} = 0. \tag{12.34}$$

Presupunem că $\frac{\partial H}{\partial p_r} \neq 0$; căci în caz contrar, din (12.34) ar rezulta și $\frac{\partial H}{\partial q^r} = 0$, deci q^r ar fi ciclice, ceea ce nu este în conformitate cu ipoteza actuală. Deducem atunci, din (12.34):

$$\frac{\partial p_r}{\partial p^r} = -\frac{\partial H}{\partial q^r}\Big/\frac{\partial H}{\partial p_r}; \quad \frac{\partial p_k}{\partial q^r} = 0. \qquad (k \neq r) \tag{12.35}$$

Relațiile (12.35) exprimă condițiile ca funcția (12.32) să fie integrală completă a ecuației cu derivate parțiale (12.26′). Aceste condiții nu sînt independente, ele trebuind să satisfacă și relațiile de integrabilitate:

$$\frac{d}{dq^s}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q^r}\right) = \frac{d}{dq^r}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q^s}\right);$$

Scanned with OKEN Scanner

Problema dinamică a unui număr de n variabile, deci, n grade de libertate se reduce la problema mai simplă a n ecuații (12.29) de cîte o singură variabilă, independente. Este de observat că, după § 378:

$$S_r = \int_{M_1}^{M_2} p_r dq^r, \text{ (fără sumare pe } r), \tag{12.30}$$

este o soluție a ecuației (12.29). Așadar, după § 345, integrala de-a lungul unei curbe *închise*:

$$J_r = \oint p_r dq^r \tag{12.31}$$

este un invariant al mișcării și al transformării canonice.

b) Se poate prezenta cazul cînd H nu se descompune în sumă de funcții H_r de cîte o singură variabilă; în schimb această condiție să fie satisfăcută de funcția:

$$S = \sum_{r=1}^{n} S_r(q_r, \beta_r) \tag{12.32}$$

unde ($\beta_1 = E$). Atunci, pentru ca ecuația (12.26′) să admită pe S ca integrală completă, funcția H trebuie să satisfacă la *condițiile lui Levi-Civita*: să derivăm ecuația (12.26′) în raport cu o anumită variabilă, de exemplu q^r. Obținem:

$$\frac{dH}{dq^r} = \frac{\partial H}{\partial q^r} + \frac{\partial H}{\partial p_h}\frac{\partial p_h}{\partial q^r} = 0. \tag{12.33}$$

Observăm că din:

$$p_h = \frac{\partial S}{\partial q^h} = \frac{\partial S_h(q^h, \beta)}{\partial q^h}$$

rezultă că p_h este o funcție exclusiv de coordonata conjugată q^h. Așadar, $\frac{\partial p_h}{\partial q^r}$ este diferită de zero numai pentru $r = k$. Atunci, (12.33) devine:

$$\frac{\partial H}{\partial q^r} + \frac{\partial H}{\partial p_r}\frac{\partial p_r}{\partial q^r} = 0. \tag{12.34}$$

Presupunem că $\frac{\partial H}{\partial p_r} \neq 0$; căci în caz contrar, din (12.34) ar rezulta și $\frac{\partial H}{\partial q^r} = 0$, deci q^r ar fi ciclice, ceea ce nu este în conformitate cu ipoteza actuală. Deducem atunci, din (12.34):

$$\frac{\partial p_r}{\partial p^r} = -\frac{\partial H}{\partial q^r}\Big/\frac{\partial H}{\partial p_r}; \quad \frac{\partial p_h}{\partial q^r} = 0. \qquad (k \neq r) \tag{12.35}$$

Relațiile (12.35) exprimă condițiile ca funcția (12.32) să fie integrală completă a ecuației cu derivate parțiale (12.26′). Aceste condiții nu sînt independente, ele trebuind să satisfacă și relațiile de integrabilitate:

$$\frac{d}{dq^s}\left(\frac{\partial p_h}{\partial q^r}\right) = \frac{d}{dq^r}\left(\frac{\partial p_h}{\partial q^s}\right);$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce, după (12.35), devine: $(k = r \neq s)$:

$$\frac{d}{dq^s}\left(\frac{\partial H}{\partial q^r} \Big/ \frac{\partial H}{\partial p_r}\right) = 0. \tag{12.36}$$

Avem în total $\frac{1}{2} n(n-1)$ relaţii, numite condiţiile lui T. Levi-Civita. Dezvoltînd expresiile (12.36) se obţine[1]):

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^s \partial p_r}\frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial^2 H}{\partial q^s \partial p_r}\frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q^r} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q^r}\frac{\partial H}{\partial q^s}\frac{\partial H}{\partial p_r} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_r}\frac{\partial H}{\partial q^s}\frac{\partial H}{\partial q^r} = 0. \qquad (r \neq s = 1, 2, \ldots n) \tag{12.37}$$

Problema determinării funcţiilor H care satisfac condiţiilor lui Levi-Civita nu este rezolvată decît pentru două şi trei grade de libertate. Dacă se găseşte însă o astfel de funcţie hamiltoniană, mişcările dinamice corespunzătoare fiecărui grad de libertate nu mai sînt independente, ca în cazul (a) al separării efective.

380. **Teorema lui P. Stäckel.** Fie un sistem dinamic, olonom, cu n grade de libertate. Presupunem că se pot găsi n^2 funcţii $\varphi_{kr}(q^k)$ de cîte o singură variabilă (de exemplu, q^k) şi n funcţii $\psi_k(q^k)$ de cîte o singură variabilă (resp. q^k), astfel încît energia cinetică a sistemului să fie de forma:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{k1}} p_k^2 \tag{12.38}$$

unde p_k sînt variabilele conjugate coordonatelor q^k, iar energia potenţială să fie de forma:

$$U = -\sum_{k=1}^{n} \psi_k(q^k)\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{k1}}, \tag{12.39}$$

notînd cu Δ determinantul funcţiilor φ_{kr}:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(q^1) & \cdots & \varphi_{n1}(q^n) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \varphi_{1n}(q^1) & \cdots & \varphi_{nn}(q^n) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{12.40}$$

funcţiile φ_{kr} şi ψ_k fiind continue şi finite.

În acest caz, problema dinamică se integrează prin cuadraturi. În adevăr, ecuaţia cu derivate parţiale a lui Hamilton-Jacobi se scrie, după (12.38) şi (12.39):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{k1}}\left(\frac{\partial S}{\partial q^k}\right)^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \psi_k(q^k)\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{k1}} - 2\alpha_1 = 0 \tag{12.41}$$

---

[1]) Am derivat în (12.36) astfel: $\frac{\partial}{\partial q^s} + \frac{\partial}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial q^s}$, hesseianul lui H fiind diferit de zero.

însemnînd cu $\alpha_1 = E$ una din constantele de integrare. Cazul de integrabilitate rezolvat de S t ä c k e l este, aşadar, cazul cînd în ecuaţia H-J apare $\frac{\partial S}{\partial q}$ numai sub formă de *sumă de pătrate*.

O integrală completă a ecuaţiei (12.41) poate fi scrisă sub forma:

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} \int \left(2\psi_k (q^k) + \sum_{s=1}^{n} 2\alpha_s \varphi_{ks} (q^k) \right)^{\frac{1}{2}} dq^k. \qquad (12.42)$$

În adevăr, substituind (12.42) în membrul întîi al ecuaţiei (12.41), obţinem:

$$\frac{1}{\Delta} \sum \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{k1}} \left(\sum_{s} 2\alpha_s \varphi_{ks} - 2\alpha_1 \varphi_{k1} \right) \equiv 0$$

căci, după (12.40):

$$\frac{1}{\Delta} \sum \varphi_{ks} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{k1}} = \delta_{s1}.$$

Odată funcţia de acţiune S determinată prin soluţia (12.42), integrarea sistemului hamiltonian se termină prin cuadraturi. Să punem, pentru prescurtare:

$$\Phi_k (q^k) = 2\psi_k (q^k) + \sum_{s=1}^{n} 2\alpha_s \varphi_{ks} (q^k). \qquad (12.43)$$

După § 376, vom avea:

$$\beta_r = \sum_{k=1}^{n} \int \frac{\varphi_{kr} dq^k}{\sqrt{\Phi_k (q^k)}} \qquad (r = 2, 3, \ldots n)$$

$$t + \beta_1 = \sum_{k=1}^{n} \int \frac{\varphi_{k1} dq^k}{\sqrt{\Phi_k (q^k)}}; \qquad (\text{am pus } \beta_1 = -t_0) \qquad (12.44)$$

şi, prin aceasta, problema este integrată.

Teoremă reciprocă. Dacă în ecuaţia cu derivate parţiale se separă variabilele, putîndu-se pune sub forma:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} u_k (q^k) \left(\frac{\partial S}{\partial q^k} \right)^2 + U = \alpha_1, \qquad (12.45)$$

putem deduce n^2 funcţii $\varphi_{kr} (q^k)$ şi n funcţii $\psi_k (q^k)$ care, prin (12.44), integrează problema.

În adevăr, ecuaţia (12.45) se scrie:

$$\sum_{k} u_k p_k^2 = 2 (-U + \alpha_1), \qquad (12.45')$$

ecuație care trebuie să fie satisfăcută pentru orice sistem de valori constante $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Să diferențiem relația (12.45') în raport cu parametrii α. Obținem sistemul:

$$u_k(q^k)\,\varphi_{k1}(q^k) = 1\,; \quad u_k\,\varphi_{ks}(q^k) = 0 \qquad (s = 2, 3, \ldots n) \tag{12.46}$$

unde am făcut notația:

$$\varphi_{ks}(q^k) = \frac{1}{2}\frac{\partial p_k^2}{\partial \alpha_s}\,. \qquad (k,s = 1, 2, \ldots n) \tag{12.47}$$

Se poate arăta ușor că determinantul funcțiilor φ_{ks} este diferit de zero. În adevăr, după § 376, determinantul lui H e s s e este diferit de zero:

$$\Delta_0 = \left|\frac{\partial^2 S}{\partial q^k \partial \alpha_r}\right| \neq 0.$$

Apoi:

$$\frac{\partial p_k^2}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial}{\partial \alpha_s}\left(\frac{\partial S}{\partial q^k}\right)^2 = 2\frac{\partial S}{\partial q^k}\,\frac{\partial^2 S}{\partial q^k \partial \alpha_s} = 2p_k\,\frac{\partial^2 S}{\partial q^k \partial \alpha_s}\,.$$

Rezultă:

$$\Delta = \prod_{s=1}^{n} p_s\,\Delta_0$$

unde:

$$\Delta = |\varphi_{ks}(q^k)|\,.$$

Așadar, cu $\Delta_0 \neq 0$, rezultă $\Delta \neq 0$.

Putem, în acest caz, rezolva sistemul de ecuații (12.46). Găsim:

$$u_k(q^k) = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{k1}}\,. \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{12.48}$$

Substituind valorile (12.48) în (12.45) obținem:

$$U = \alpha_1 - \frac{1}{2}\sum \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{k1}}\,p_k^2$$

sau, ținînd seamă de identitatea:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{k1}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{k1}}$$

putem scrie:

$$U = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{k1}}\left(\frac{1}{2}\,p_k^2 - \alpha_1\,\varphi_{k1}\right).$$

Comparînd această expresie cu (12.39), sîntem conduși să luăm:

$$\psi_k(q^k) = \frac{1}{2}\,p_k^2(q^k) - \alpha_1\,\varphi_{k1}(q^k). \tag{12.49}$$

Scanned with OKEN Scanner

Valorile (12.47) și (12.49) determină, prin urmare, funcțiile lui S t ă c k e l, cunoscînd forma ecuației lui H a m i l t o n - J a c o b i ; iar relațiile (12.44) rezolvă, în acest caz, complet problema.

381. **Exemplu. Problema celor două centre.** Această problemă a fost integrată prin metoda lui L i o u v i l l e (§ 294). Se poate arăta că ea poate fi integrată și prin metoda lui S t ă c k e l . În adevăr, putem ușor construi funcțiile lui S t ă c k e l pentru această problemă. Să punem în § 294 (scriind, pentru ușurință, indicii jos):

$$\lambda = q_1; \quad \mu = q_2;$$

și să observăm că ecuația lui H a m i l t o n - J a c o b i are forma:

$$\frac{1}{q_1^2 - q_2^2}\left[\frac{1}{2}(q_1^2 - c^2)\left(\frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{2}(c^2 - q_2^2)\left(\frac{\partial S_2}{\partial q_2}\right)^2 - (C + C')\,q_1 + \right.$$

$$\left. + (C - C')\,q_2\right] = \alpha_1.$$

Putem, așadar, să separăm variabilele. Punem:

$$\frac{1}{2}(q_1^2 - c^2)\left(\frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)^2 - (C + C')\,q_1 - \alpha_1 q_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(q_2^2 - c^2)\left(\frac{\partial S_2}{\partial q_2}\right)^2 - (C - C')\,q_2 - \alpha_1 q_2^2.$$

Membrul întîi fiind o funcție numai de q_1, iar membrul al doilea o funcție numai de q_2, egalitatea precedentă este posibilă dacă ambele expresii sînt egale cu o constantă pe care s-o însemnăm cu $\alpha_2 > 0$; așa încît obținem următoarele ecuații diferențiale:

$$\frac{1}{2}(q_1^2 - c^2)\left(\frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)^2 - (C + C')\,q_1 - \alpha_1 q_1^2 = \alpha_2,$$

$$\frac{1}{2}(q_2^2 - c^2)\left(\frac{\partial S_2}{\partial q_2}\right)^2 - (C - C')\,q_2 - \alpha_1 q_2^2 = \alpha_2.$$

Deducem:

$$\frac{1}{2}p_1^2 = \frac{(C + C')\,q_1 + \alpha_1 q_1^2 + \alpha_2}{q_1^2 - c^2},$$

$$\frac{1}{2}p_2^2 = \frac{(C - C')\,q_2 + \alpha_1 q_2^2 + \alpha_2}{q_2^2 - c^2};$$

iar, după (12.47):

$$\varphi_{11} = \frac{q_1^2}{q_1^2 - c^2}; \quad \varphi_{21} = \frac{q_2^2}{q_2^2 - c^2}$$

$$\varphi_{12} = \frac{1}{q_1^2 - c^2}; \quad \varphi_{22} = \frac{1}{q_2^2 - c^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Este clar că determinantul:

$$\Delta = \frac{q_1^2 - q_2^2}{(q_1^2 - c^2)(q_2^2 - c^2)}$$

este diferit de zero, în general.

După (12.49):

$$\psi_1 = \frac{1}{2} p_1^2 - \alpha_1 \varphi_{11} = \frac{(C + C') q_1 + \alpha_2}{q_1^2 - c^2},$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2} p_2^2 - \alpha_1 \varphi_{21} = \frac{(C - C') q_2 + \alpha_2}{q_2^2 - c^2}.$$

Funcțiile (12.43) vor fi așadar:

$$\Phi_1 = \frac{2}{q_1^2 - c^2} [(C + C') q_1 + \alpha_1 q_1^2 + \alpha_2]$$

$$\Phi_2 = \frac{2}{q_2^2 - c^2} [(C - C') q_2 + \alpha_1 q_2^2 + \alpha_2].$$

Integralele (12.44) devin, prin aceasta:

$$\beta_2 = \int \frac{dq_1}{\sqrt{\Phi_1'(q_1)}} + \int \frac{dq_2}{\sqrt{\Phi_2'(q_2)}},$$

$$t + \beta_1 = \int \frac{q_1^2 dq_1}{\sqrt{\Phi_1'(q_1)}} + \int \frac{q_2^2 dq_2}{\sqrt{\Phi_2'(q_2)}},$$

unde am pus:

$$\Phi_1' = 2(q_1^2 - c^2)[\alpha_1 q_1^2 + (C + C') q_1 + \alpha]$$

$$\Phi_2' = 2(q_2^2 - c^2)[\alpha_1 q_2^2 + (C - C') q_2 + \alpha]$$

identice expresiilor găsite prin teorema lui L i o u v i l l e .

Observație. Faptul că problema celor două centre, care se integrează cu ajutorul teoremei lui L i o u v i l l e , se integrează și cu ajutorul teoremei lui S t ä c k e l nu este o întîmplare. În adevăr, se poate demonstra că o problemă integrabilă prin teorema lui L i o u v i l l e se integrează și prin teorema lui S t ä c k e l; reciproca nu este stabilită decît în cazul a *două* grade de libertate[1]).

382. **Exemplu. Problema celor două corpuri.** Mișcarea pămîntului în jurul soarelui ca și mișcarea electronului în atomul de hidrogen sînt probleme fizice cuprinse sub denumirea de „problema celor două corpuri".

Să aplicăm acestei probleme metoda ce decurge din proprietățile ecuației lui H a m i l t o n - J a c o b i .

---

[1]) (v. *S. Vrkljan*, Z'sch. f. Physik. B. 59, p. 718; B. 65, p. 280; 1930.

Să considerăm un corp de masă M care solicită un alt corp de masă $m<M$, fie după legea newtoniană, fie după legea coulombiană. Să alegem ca pol de referință, O, centrul de greutate al sistemului format din aceste două corpuri, care se găsesc la distanțele r_1 și r_2 de O, astfel încît $r_1 + r_2 = r$ este distanța reciprocă a celor două corpuri. Avem, după definiția centrului de greutate:

$$M\bar{r}_1 = m\bar{r}_2.$$

Energia cinetică a sistemului format din cele două corpuri este:

$$T = \frac{M}{2}\left(\dot{r}_1^2 + r_1^2\,\dot{\theta}^2 + r_1^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) + \frac{m}{2}\left(\dot{r}_2^2 + r_2^2\,\dot{\theta}^2 + r_2^2\,\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) \qquad (12.50)$$

deoarece centrul de greutate se găsește mereu pe dreapta ce unește cele două corpuri.

Introducînd *masa redusă*: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + \frac{1}{m}$, valoarea lui T din (12.50) devine:

$$T = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\,\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right),$$

mișcarea sistemului $M + m$ se efectuează ca și cum ar exista un singur corp așezat în centrul de greutate care solicită (după legea newtoniană sau coulombiană) un corp de masă μ aflat la distanța r. Fie, în general, $U(r)$ energia potențială. Funcția hamiltoniană este, în acest caz:

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\,p_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,p_\varphi^2\right) + U(r), \qquad (12.51)$$

unde p sînt cele trei momente cinetice conjugate coordonatelor generalizate $q^1 = r$, $q^2 = \theta$, $q^3 = \varphi$.

În adevăr, din definiția impulsurilor generalizate (momente cinetice), rezultă:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r},$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2\,\dot{\theta}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}.$$

Ecuația cu derivate parțiale a lui H a m i l t o n - J a c o b i este, după (12.51):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + 2\mu\,[U(r) - E] = 0. \qquad (12.52)$$

Este clar că ecuația (12.52) este integrabilă prin separarea variabilelor:

$$S = S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\varphi(\varphi).$$

Scanned with OKEN Scanner

Se obţin, aşadar, trei ecuaţii diferenţiale:

$$\frac{dS_\varphi}{d\varphi} = \alpha \ldots\ldots\ldots; \quad \text{deci, } p_\varphi = \frac{dS_\varphi}{d\varphi} = \alpha;$$

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{\sin^2\theta} = \beta^2 \ldots; \quad \text{„} \quad p_\theta = \frac{dS_\theta}{d\theta} = \sqrt{\beta^2 - \frac{\alpha^2}{\sin^2\theta}}; \tag{12.53}$$

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \frac{\beta^2}{r^2} + 2\mu(U-E) = 0; \quad \text{„} \quad p_r = \frac{dS_r}{dr} = \sqrt{2\mu(E-U) - \frac{\beta^2}{r^2}};$$

α, β şi E fiind trei constante arbitrare. Se poate verifica uşor că 1) E reprezintă energia totală, constantă, a sistemului; 2) $\alpha = p_\varphi = \mu r^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi} = \mu(\bar{r}\times\dot{\bar{r}})\bar{k}$ (unde $\bar{k}$ este vectorul unitar al axei z); $\beta = \mu|\bar{r}\times\dot{\bar{r}}|$, valoarea absolută a momentului cinetic. Prima ecuaţie (12.53) este o consecinţă a faptului că φ este coordonată ciclică.

Integrarea ecuaţiei efectuîndu-se complet prin teorema lui S t ä c k e l, discuţia rezultatelor conduce la concluziile pe care le-am găsit în studiul problemei celor două corpuri în Mecanica vectorială. Pentru discuţia amănunţită, prin metoda precedentă se va consulta C. C h a r l i e r, vol. I, p. 167 şi următoarele.

Este interesant de observat că pentru problema atomului de hidrogen, este necesar să se calculeze invarianţii:

$$J_\varphi = \oint \alpha d\varphi = 2\pi\alpha; \quad J_\theta = \oint \sqrt{\beta^2 - \frac{\alpha^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta;$$
$$J_r = \oint \sqrt{2\mu[E + U(r)] - \frac{\beta^2}{r^2}}\, dr. \tag{12.54}$$

O metodă elegantă de integrare a ultimelor două integrale a fost imaginată de A. S o m m e r f e l d [1]), folosind integrarea pe contur imaginar.

Pentru atomul de hidrogen, metoda precedentă duce la rezultatul găsit la § 84. Pentru studiul complet al acestei chestiuni, care iese din cadrul expunerii de faţă, se va consulta M a x B o r n [2]).

Capitolul XIII

NOŢIUNI DE CALCULUL PERTURBAŢIILOR

383. **Formularea problemei.** Una din marile şi celebrele probleme puse de natură Mecanicii, adusă pe primul plan al preocupărilor savanţilor analişti, în deosebi de renumita descoperire a planetei *Neptun* prin calcul, de U. J. J. L e v e r r i e r şi asupra căreia s-au scris, începînd din anul 1750, peste 800 de Memorii, este *problema celor trei corpuri*: trei particule

[1]) *A. Sommerfeld*, [26]
[2]) *Max Born*, [21]

materiale care se solicită reciproc după legea lui Newton se mişcă liber în spaţiu; să se determine mişcarea.

Această problemă constituie una din preocupările esenţiale ale *Mecanicii cereşti*, fiind, în acelaşi timp, de mare însemnătate şi pentru *Mecanica atomică*.

Dacă s-ar ţine seama de realitate, care pune în prezenţă, sub acţiunea newtoniană, un număr mai mare de corpuri, problema devine *problema a n corpuri*.

Pînă în prezent nu s-a găsit o soluţie în termeni finiţi a problemei celor trei corpuri. Metoda imaginată pentru rezolvarea unei astfel de probleme este *metoda calculului aproximativ* dezvoltat în *teoria perturbaţiilor*, a cărei idee fundamentală a fost formulată de Euler şi prelucrată analitic de Lagrange, Laplace, Poisson, Hamilton, Jacobi şi Poincaré (vezi memoriul lui K. Sundman)[1]).

Influenţa unuia sau mai multor corpuri asupra mişcării a *două* corpuri, după legea newtoniană, se consideră ca o „perturbare" a *mişcării iniţiale* din cauze *secundare*, cauze care posedă un ordin de mărime suficient de *mic* prin comparaţie cu acţiunea principală care determină mişcarea iniţială. Această influenţă secundară se introduce în calcul sub forma unei *funcţii perturbatoare* a mişcării iniţiale. Metodele analitice de integrare a problemei sînt, prin aceasta, metode de calcul cu aproximaţii sau de variaţii a unei mişcări iniţiale.

Aceste metode sînt folosite şi în Mecanica atomică. Dificultatea suplimentară în acest domeniu de fenomene constă în faptul că acţiunile reciproce dintre particulele atomice dau naştere la forţe de acelaşi ordin de mărime, aşa încît o mişcare a trei corpuri nu mai poate fi considerată ca o mişcare perturbată a două corpuri, prin prezenţa celui de al treilea, a cărui influenţă nu mai este destul de mică prin comparaţie cu acţiunea reciprocă a primelor două corpuri. Totuşi, în cîmpuri *periodice*, perturbatoare, mişcarea unui sistem material de atomi poate fi tratată prin metodele de calcul al perturbaţiilor.

Problema teoriei perturbaţiilor se formulează astfel:

1. Avem un sistem dinamic definit prin hamiltoniana H_0 al cărei determinant hesseian este diferit de zero. Mişcarea iniţială a sistemului este dată de ecuaţiile:

$$\dot{q}^r = \frac{\partial H_0}{\partial p_r} \; ; \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H_0}{\partial q^r} . \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \quad (13.1)$$

2. Se cunoaşte această mişcare iniţială, neperturbată, prin integrarea sistemului (13.1):

$$q^r = q^r(t; c_1, c_2, \ldots, c_{2n}); \quad p_r = p_r(t; c_1, c_2, \ldots, c_{2n}). \quad (r = 1, 2 \ldots n) \quad (13.2)$$

3. Influenţele secundare exterioare se manifestă sub forma unei acţiuni perturbatoare a mişcării iniţiale (13.2). Analitic, acest fapt se introduce în calcul admiţînd că funcţiei potenţiale a mişcării neperturbate i se adaugă o funcţie de poziţie şi timp care reproduce efectul influenţei secundare, exterioare, numită *funcţie perturbatoare*. Hamiltoniana va primi forma:

$$H = H_0(q^1, q^2, \ldots, q^n; p_1, p_2, \ldots, p_n; t) + H'(q^1, \ldots, q^n; p_1, \ldots, p_n; t)$$

[1]) „Mémoire sur le problème des trois corps". Acta Math. 1913. p. 105.

Scanned with OKEN Scanner

unde H' este funcția perturbatoare. Ea poate să fie dezvoltată în serie uniformă după puterile unui parametru $\lambda \ll 1$:

$$H = H_0 + \lambda H_1 + \lambda^2 H_2 + \cdots \tag{13.3}$$

astfel încît pentru $\lambda = 0$, obținem mișcarea inițială, neperturbată. Problema analitică este: să se rezolve sistemul dinamic al mișcării perturbate:

$$\dot{q}^r = \frac{\partial H}{\partial p_r}; \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q^r} \qquad (r = 1,2,\ldots n) \tag{13.4}$$

dacă se cunoaște soluția (13.2) a mișcării neperturbate.

Pentru rezolvarea acestei probleme s-au dezvoltat două metode, pe care le vom schița în cele ce urmează.

384. **Metoda variației constantelor** (J. L. Lagrange și S. D. Poisson). Influența acțiunii perturbatoare este introdusă în calcul prin conceperea celor $2n$ constante esențiale care apar în (13.2) ca fiind *variabile* cu timpul (și anume, *încet* variabile). Problema care se pune este: să se integreze sistemul (13.4) considerînd cîtimile c_i drept variabile cu t; această metodă este numită „metoda variației constantelor arbitrare".

Derivînd mărimile (13.2) în raport cu t și avînd în vedere ecuațiile (13.4), obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_r} &= \dot{q}^r = \frac{\partial q^r}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial q^r}{\partial c_i} \dot{c}_i , \\ -\frac{\partial H}{\partial q^r} &= \dot{p}_r = \frac{\partial p_r}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial p_r}{\partial c_i} \dot{c}_i . \end{aligned} \qquad (r = 1,2,\ldots n) \tag{13.5}$$

Determinantul funcțional:

$$\frac{D(q^r, p_r)}{D(c_i)} \neq 0$$

este diferit de zero căci am presupus constantele c_i independente (esențiale). Putem atunci să calculăm din (13.5) cele $2n$ cîtimi $\dot{c}_i$ și să obținem sistemul de ecuații diferențiale pentru c_i. Sistemul (13.5) poate fi scris, după (13.4), sub forma:

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial q^r}{\partial c_i} \dot{c}_i = \frac{\partial H'}{\partial p_r}; \quad \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial p_r}{\partial c_i} \dot{c}_i = -\frac{\partial H'}{\partial q^r} \qquad (r = 1,2,\ldots n) \tag{13.6}$$

căci în sistemul (13.1) cîtimile c_i sînt considerate constante; așadar, de fapt, acest sistem este:

$$\frac{\partial q^r}{\partial t} = \frac{\partial H_0}{\partial p_r}; \quad \frac{\partial p_r}{\partial t} = -\frac{\partial H_0}{\partial q^r} \tag{13.1'}$$

Scanned with OKEN Scanner

de care am ţinut seamă pentru a deduce sistemul (13.6). Dacă înmulţim prima ecuaţie (13.6) cu $\frac{\partial p_r}{\partial c_j}$ şi a doua cu $\frac{\partial q^r}{\partial c_j}$, le scădem şi sumăm pe toţi r, obţinem sistemul numit *ecuaţiile lui* L a g r a n g e *pentru mişcarea perturbată*:

$$\sum_{i=1}^{2n} [c_i,\ c_j]\ \dot{c}_i = \frac{\partial H'}{\partial c_j}, \quad (j = 1, 2,\ldots 2n) \qquad (13.7)$$

unde în membrul întîi apar parantezele L a g r a n g e (§ 362), care, după cum a arătat L a g r a n g e prin calcul direct, sînt funcţii de c_i şi *nu* conţin explicit timpul, cum s-ar părea că este de aşteptat. Sistemul (13.7) cu $2n$ ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi ne va da cele $2n$ necunoscute c_i.

S. D. P o i s s o n a dat ecuaţiilor (13.7) o altă formă, anume le-a rezolvat în raport cu $\dot{c}_i$, prin introducerea parantezelor rotunde (§ 364). În acest scop, P o i s s o n consideră un sistem de $2n$ integrale prime ale sistemului (13.1) iniţial:

$$\varphi_i\ (q^1,\ q^2,\ldots,q^n;\ p_1,\ p_2,\ldots,p_n;\ t) = c_i. \quad (i = 1, 2,\ldots 2n) \qquad (13.8)$$

Derivînd expresiile (13.8) şi procedînd ca şi în calculul precedent, se obţine sistemul *ecuaţiilor lui* P o i s s o n *pentru mişcarea perturbată*:

$$\dot{c}_i = \sum_{j=1}^{2n} (c_i,\ c_j)\ \frac{\partial H'}{\partial c_j} \qquad (i = 1, 2,\ldots 2n) \qquad (13.9)$$

ceea ce de altfel se poate căpăta direct, aplicînd relaţia fundamentală (11.15) § 366. În membrul al doilea apar parantezele P o i s s o n.

Deosebit interes prezintă cazul cînd c_i sînt *constante canonice*. Aceasta înseamnă că le putem despărţi în două grupe: $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_n;\ \beta_1,\ \beta_2,\ldots,\ \beta_n$, astfel încît să existe o funcţie transformatoare $V\ (t; q^1,\ q^2,\ldots,q^n;\ \beta_1,\ \beta_2,\ldots,\beta_n)$, aşa fel încît (v. § 330):

$$\alpha_i = \frac{\partial V}{\partial \beta_i};\quad p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}; \qquad (i = 1,\ 2\ldots n) \qquad (13.10)$$

Să considerăm, pentru a fixa ideile, parantezele lui L a g r a n g e pentru substituirea variabilelor conjugate α_i, β_i în locul variabilelor q^r, p_r.

Prin definiţie, vom avea:

$$[\alpha_r,\ \beta_k] = \frac{\partial}{\partial \beta_k}\left(p_i \frac{\partial q^i}{\partial \alpha_r}\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_r}\left(p_i \frac{\partial q^i}{\partial \beta_k}\right).$$

Ţinînd seamă de (13.10), relaţiile precedente devin:

$$[\alpha_r,\ \beta_k] = \frac{\partial}{\partial \beta_k}\left(\frac{\partial V}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial \alpha_r}\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_r}\left(\frac{\partial V}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial \beta_k}\right).$$

Dar:

$$\frac{\partial V}{\partial \beta_k} = \left(\frac{\partial V}{\partial \beta_k}\right)_{q\,=\,\text{const}} + \frac{\partial V}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial \beta_k}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial V}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial \alpha_r}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde facem substituțiile date de relațiile (13.10). Rezultă:

$$[\alpha_r, \beta_k] = \frac{\partial \alpha_r}{\partial \alpha_k} = \delta_{rk} \tag{13.11}$$

unde δ_{rk} este simbolul lui K r o n e c k e r. În mod analog se obține

$$[\alpha_r, \alpha_k] = 0; \quad [\beta_r, \beta_k] = 0. \tag{13.12}$$

Relațiile (13.11) și (13.12) definesc, după § 363, cîtimile α_r și β_k drept canonice. Ele se scriu explicit sub forma sistemului diferențial canonic:

$$\dot{\alpha}_r = \frac{\partial H'}{\partial \beta_r}; \quad \dot{\beta}_r = -\frac{\partial H'}{\partial \alpha_r}. \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \tag{13.13}$$

Putem enunța, așadar, teorema fundamentală: ecuația lui H a m i l t o n-J a c o b i:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H_0 = 0$$

pentru mișcarea neperturbată permite să se determine o funcție transformatoare V, cu ajutorul căreia să se facă transformarea canonică (13.10) care introduce noi variabile canonice conjugate α_i, β_i în locul variabilelor (13.2), soluții ale sistemului (13.1), astfel încît ecuațiile de mișcare devin ecuațiile (13.13) unde:

$$H' = H - H_0$$

este funcția perturbatoare cunoscută.

385. **Metoda aproximațiilor succesive.** Se presupune cunoscută mișcarea neperturbată:

$$\dot{q}_0^r = \frac{\partial H_0}{\partial p_r^0}; \quad \dot{p}_r^0 = -\frac{\partial H_0}{\partial q_0^r} \tag{13.14}$$

unde $H_0 = H_0\,(q_0, p^0, t)$. Pentru mișcarea perturbată, funcția hamiltoniană va fi:

$$H(q,p,t) = H_0 + \lambda H_1 + \lambda^2 H_2 + \ldots$$

considerînd funcția perturbatoare H' dezvoltată în serie uniform convergentă după puterile parametrului foarte mic λ, astfel încît pentru $\lambda = 0$ obținem mișcarea inițială. Ecuațiile mișcării perturbate vor fi date de sistemul (13.4). Cum cîtimile q_0, p^0 sînt coordonate canonice pentru mișcarea inițială, iar q,p sînt coordonate canonice pentru mișcarea perturbată, putem considera coordonatele q,p ca provenind din q_0,p^0 printr-o transformare canonică, a cărei funcție generatoare (§ 330):

$$V\,(q_0^1, q_0^2, \ldots, q_0^n;\ p_1,\ p_2, \ldots, p_n; t) \tag{13.15}$$

trebuie determinată astfel încît transformarea să fie dată de relațiile (9.28) § 330:

$$q^r = \frac{\partial V}{\partial p^r}; \quad p_r^0 = \frac{\partial V}{\partial q_0^r}. \tag{13.16}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru integrare, să punem condiția ca noua funcție hamiltoniană dedusă prin transformarea (13.16) să depindă numai de coordonatele conjugate p_r; deci, mișcarea să admită coordonatele q^r drept coordonate ciclice (§ 377). După relația (9.20) § 326, va trebui ca:

$$H(q_0, p^0; t) + \frac{\partial V}{\partial t} = K(p; t). \tag{13.17}$$

Să admitem că este posibil ca funcțiile V și K să fie dezvoltate în serii uniforme după puterile parametrului λ, ca și H. Avem:

$$\begin{aligned} V &= V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 + \dots, \\ K &= K_0 + \lambda K_1 + \lambda^2 K_2 + \dots. \end{aligned} \tag{13.18}$$

Observăm, în primul rînd, că funcția V_0 este prin definiție generatoare a transformării *identice*: $q_r^0 = q^r$; $p_r^0 = p_r$; ceea ce înseamnă că: $V_0 = \sum_r q_0^r p_r$ este independentă de t.

Pe de altă parte, cum pentru $\lambda = 0$, mișcarea perturbată se reduce la mișcarea neperturbată și V_0 nu depinde de t, din (13.17) rezultă, pentru $\lambda = 0$, că $H_0(q_0, p_0) = K_0(p)$; ceea ce înseamnă, că funcția $H_0 = H_0(q_0)$ nu depinde de p_0. Așadar, după (13.16):

$$H_0\left(\frac{\partial V_0}{\partial p_r}\right) = K_0(p_r) \tag{13.19}$$

unde, pentru simplificarea scrisului nu am mai figurat explicit pe t. Relația (13.19) exprimă *teorema*: în aproximația de ordinul zero ($\lambda = 0$) funcția hamiltoniană a mișcării este identică funcției hamiltoniene inițiale, în care înlocuim coordonatele conjugate p_r^0 prin p_r. În cazul cînd nu figurează explicit timpul, aceste mărimi reprezintă energia totală a sistemului.

Să construim ecuația diferențială a mișcării perturbate, în aproximația de ordinul întîi. Vom identifica în ecuația (13.17) coeficienții lui λ (la puterea întîia). Observăm, în prealabil, că au loc dezvoltările:

$$H_0\left[\frac{\partial}{\partial q^0}(V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 + \dots)\right] = H_0\left(\frac{\partial V_0}{\partial q_0}\right) + \lambda \sum_r \frac{\partial H_0}{\partial p_r}\frac{\partial V_1}{\partial q_0^r} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\lambda^2 \sum_{k,s} \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_k\, \partial p_s}\, \frac{\partial V_1}{\partial q_0^k}\frac{\partial V_1}{\partial q_0^s} + \dots$$

și în mod analog pentru ceilalți termeni $H_1, H_2, \dots$

Identificînd, atunci, coeficienții lui λ din cei doi membri ai ecuației (13.17), obținem ecuația de mișcare în *primă aproximație*:

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial H_0}{\partial p_k}\frac{\partial V_1}{\partial q_0^k} + H_1(q^k, p_k) = K_1(p_k). \tag{13.20}$$

În mod analog, pentru *aproximația de ordinul al doilea* (coeficienții lui λ^2), se obține:

$$\frac{\partial V_2}{\partial t}+\sum_k \frac{\partial H_0}{\partial p_k}\frac{\partial V_2}{\partial q_0^k}+\frac{1}{2!}\sum_{k,s}\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_k\,\partial p_s}\frac{\partial V_1}{\partial q_0^k}\frac{\partial V_1}{\partial q_0^s}+$$

$$+\sum_k \frac{\partial H_1}{\partial p_k}\frac{\partial V_1}{\partial q_0^k}=K_2(p_k). \tag{13.21}$$

În general, pentru *aproximația de ordin m*, obținem ecuația:

$$\frac{\partial V_m}{\partial t}+\sum_k \frac{\partial H_0}{\partial p_k}\frac{\partial V_m}{\partial q_0^k}+\frac{1}{2!}\sum_{k,s}\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_k\,\partial p_s}\sum_{a+b=m}\frac{\partial V_a}{\partial q_0^k}\frac{\partial V_b}{\partial q_0^s}+\dots$$

$$+\frac{1}{m!}\sum_{k_1+\dots+k_m=m}\frac{\partial^m H_0}{\partial p_{k_1}\dots\partial p_{k_m}}\frac{\partial V_1}{\partial q_0^{k_1}}\dots\frac{\partial V_1}{\partial q^{k_m}}+ \tag{13.22}$$

$$+\sum_k \frac{\partial H_1}{\partial p_k}\frac{\partial V_{m-1}}{\partial q_0^k}+\dots+\frac{1}{(m-1)!}\sum\frac{\partial^{m-1}H_0}{\partial p_{k_1}\dots\partial p_{km-1}}\frac{\partial V_1}{\partial q_0^{k_1}}\dots\frac{\partial V_1}{\partial q_0^{k_{m-1}}}+\dots$$

$$+\sum_k \frac{\partial H^{m-1}}{\partial p_k}\frac{\partial S_1}{\partial q_0^k}+H_m=K_m(p_k).$$

Ecuațiile aproximațiilor (13.20...13.22) se prezintă sub forma generală:

$$\frac{\partial V_m}{\partial t}+\sum_k \frac{\partial H_0}{\partial p_k}\frac{\partial V_m}{\partial q_0^k}=K_m(p_k)-\varphi(q_0^k,p_k)$$

unde membrul al doilea este complet cunoscut, dacă sînt integrate ecuațiile anterioare și făcute substituțiile respective.

386. **Observație.** Este necesar să ne întrebăm dacă dezvoltările precedente pot fi folosite analitic. În adevăr, nu se poate constata *convergența* acestor serii. H. Burns a stabilit *teorema*: pozițiile de convergență și cele de divergență formează, în tot domeniul frecvențelor reale, mulțimi dense. H. Poincaré completează acest rezultat, prin *teorema*: în afară de excepții, nu este posibil să reprezentăm mișcarea prin serii Fourier convergente, oricît de mică ar fi funcția perturbatoare. Cu toate acestea, H. Poincaré a precizat că șirurile precedente posedă *un fel de semiconvergență*: dacă le întrerupem în loc potrivit, ele pot reprezenta mișcarea perturbată, cu destul de bună aproximație; nu însă pentru timpuri oricît de mari, ci pentru timpuri care, practic, sînt suficient de lungi.

Metoda de mai sus a fost întrebuințată de I. I. Plăcinţeanu[1]) pentru calcularea efectivă a mărimilor energetice menite să exprime cantitativ relațiile de interacțiune între un cîmp exterior de forțe periodice și

[1]) „Über die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Quadrupolatomen"; Zeitschrift fur Physik, B. 39, p. 276; 1926. (Dizertația pentru obținerea titlului de „doctor", ; Universitatea „Georg Augusta", Göttingen, 1926).

Scanned with OKEN Scanner

un sistem dinamic de particule materiale de modelul unor cuadrupoli, în concepţia Mecanicii cuantelor clasică.

Capitolul XIV

MIŞCĂRI PERIODICE ŞI CONDIŢIONAT-PERIODICE

Atît mişcările planetare cît şi fenomenele atomice posedă în întinsă măsură un caracter de periodicitate. De aceea, studiul mişcărilor *periodice* este de mare însemnătate în Mecanica cerească; iar ulterior s-a dovedit a fi tot aşa de important pentru Mecanica atomică. Un mare număr de mişcări naturale se prezintă însă numai în anumite condiţii sub forma de mişcare periodică; printre acestea sînt şi aşa-numitele mişcări *condiţionat-periodice*, sau cvasiperiodice, pe care le vom defini mai jos, ele constituind un caz mai complicat de mişcare periodică.

Dăm pe scurt o expunere a acestor mişcări, din cauza interesului ce-l prezintă atît pentru problemele de *Mecanică cerească*[1]) cît şi pentru că în structura *teoriei cuantice clasice*, aceste mişcări au jucat un rol capital[2]).

387. **Caracterizarea mişcărilor periodice.** Să considerăm, pentru moment, cazul cînd sistemul dinamic are numai un singur grad de libertate. Mişcarea va fi determinată prin aflarea variabilei de poziţie q, din ecuaţiile diferenţiale ale Dinamicii. Să presupunem că putem face o transformare canonică $(q, p) \to (w, \alpha)$ aşa fel încît sistemul canonic să se reducă la sistemul $\alpha = \text{const.}$, $w =$ funcţie circulară de timp. Mişcarea astfel definită va fi o mişcare *periodică*; ea poate lua două aspecte:

a) Dacă găsim o cîtime w, astfel încît:

$$q(w + \omega) = q(w) \tag{14.1}$$

coordonata q va oscila între două poziţii limită, reprezentînd un fenomen de *libraţie*. Exemplu pentru o astfel de mişcare este pendulul oscilant.

b) Este posibil ca, după o anumită creştere a lui q, care se efectuează repetat în acelaşi interval de timp (de pildă, creşterea 2π) sistemul material să revină în aceeaşi poziţie:

$$q(w + \omega) = q(w) + 2\pi. \tag{14.2}$$

Mişcarea este atunci o *rotaţie*. Exemplu: pendulul care se dă peste cap.

În cazul mai multor grade de libertate, mişcarea este definită prin coordonatele care vor fi funcţii *multi-periodice*.

Reamintim cîteva proprietăţi fundamentale ale acestor funcţii.

1. *Definiţie.* O funcţie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variabile independente, este de n-ori periodică, dacă admite o perioadă pe care o putem reprezenta

---

[1]) v. *Charlier*, [14].

[2]) v. *N. Bohr*, „Über die Quantentheorie der Linienspektra", *M. Born*, „Atommechanik" [18] şi *A. Sommerfeld*, „Atombau und Spektrallinien" [22].

printr-un vector $\bar{\omega}$ ale cărui componente sînt ω_1, $\omega_2,\ldots,\omega_n$, pentru fiecare grad de libertate, satisfăcînd relaţiile (14.1) sau (14.2).

2. *Teoremă fundamentală*[1]). Pentru fiecare funcţie n-periodică $f(x_1,\ldots x_n)$ există un sistem primitiv de perioade ($m \leqslant n$): $\bar{\omega}^1$, $\bar{\omega}^2,\ldots,$ $\bar{\omega}^m$ care posedă proprietatea că orice perioadă $\bar{\omega}$ (care nu este infinit mică) a lui f se exprimă sub forma:

$$\bar{\omega} = \sum_k \tau_k \bar{\omega}^k \tag{14.3}$$

unde τ_k sînt numere întregi (scalare) pozitive sau negative.

3. *Proprietate.* Toate sistemele primitive de perioade ale unei funcţii depind între ele printr-o transformare de determinant ± 1.

388. **Mişcări periodice liniare**[2]). Dacă avem un singur grad de libertate, ecuaţiile canonice devin:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}; \tag{14.4}$$

unde hamiltoniana este:

$$H = \frac{1}{2} a(q)\, p^2 - U(q)$$

dacă însemnăm cu $U(q)$ funcţia forţelor. Ecuaţia lui Hamilton-Jacobi este:

$$a(q)\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = 2(U + \alpha) \tag{14.5}$$

unde α este constanta energiei. Prin integrarea ecuaţiei (14.5) se obţine:

$$S = \int \sqrt{\frac{2(U+\alpha)}{a(q)}}\, dq$$

şi deci:

$$t - t_0 = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int \frac{dq}{\sqrt{2(U+\alpha)\, a(q)}}. \tag{14.6}$$

Studiul mişcării revine la studiul ecuaţiei (14.6) pentru diferitele forme ale funcţiei de sub radical. Să presupunem că pentru problemele mecanice exprimate prin ecuaţia (14.6) q este o funcţie reală regulată şi finită de timp.

Lemă. Dacă există o rădăcină reală a ecuaţiei algebrice:

$$2(U + \alpha)\, a(q) \equiv f(q) = 0, \tag{14.7}$$

anume, $q = q_0$; variabila q nu poate depăşi această valoare.

Fie m gradul de multiplicitate a rădăcinii q_0. Avem:

$$f(q) = (q - q_0)^m \varphi(q)$$

---

[1]) Pentru demonstrarea acestor teoreme se va consulta *M. Born* [21].

[2]) Vezi *C. Charlier* [17] pentru dezvoltările aplicate la Mecanica cerească şi *M. Born* [21] pentru Mecanica atomică.

Scanned with OKEN Scanner

unde $\varphi(q)$ este o funcție finită și diferită de zero pentru și în vecinătatea lui q_0. Fie $\overline{\varphi}(q_0)$ valoarea medie, finită, a lui φ în vecinătatea lui q_0. Teorema mediilor ne dă, după (14.6):

$$t - t_0 = \overline{\varphi} \int \frac{dq}{(q-q_0)^{\frac{m}{2}}}, \tag{14.8}$$

valoare care pentru $m \geqslant 2$ devine infinită în $q = q_0$. Așadar, această valoare q_0 va fi atinsă asimptotic de q; ea nu poate fi, deci, depășită de q. Pentru $m = 1$, urmează din (14.8):

$$t - t_0 = \overline{\varphi} \sqrt{q - q_0}; \tag{14.9}$$

așadar, $t = t_0$ (timp finit), pentru $q = q_0$. Valoarea q_0 va fi ajunsă în timp finit, dar nu poate fi depășită. În adevăr, din (14.9) rezultă că, ori $q > q_0$ (dacă $\overline{\varphi} > 0$), ori $q < q_0$ (dacă $\overline{\varphi} < 0$), fără a schimba semnul lui q_0.

În problemele curente ale mișcărilor cerești și atomice, variabilele de poziție q sînt obligate să oscileze între *două* valori limită. Pentru acest motiv este necesar să analizăm cazul cînd există două rădăcini q_1 și $q_2 > q_1$, vecine, ale ecuației $f(q) = 0$. Așadar, pentru (14.6) vom avea, m și l fiind ordinul de multiplicitate al rădăcinilor:

$$\dot{q}^2 = (q - q_1)^m \, (q_2 - q)^l \, \varphi(q) \tag{14.10}$$

unde $\varphi(q)$ nu mai are nici o rădăcină în vecinătatea lui q_1 și q_2.

După lema precedentă, variabila reală q poate varia între q_1 și q_2 sau rămîne în afara acestui domeniu, după cum în momentul inițial valoarea lui q se găsea sau nu în acest domeniu.

Analizarea mișcării reprezentată prin ecuația diferențială (14.10) se face în mod mai convenabil dacă se introduce o variabilă independentă nouă w, în locul lui t, prin relația:

$$\frac{dw}{dt} = + \frac{1}{\nu} \sqrt{\varphi(q)} \tag{14.11}$$

unde $\nu > 0$ este o constantă nedeterminată. Semnul $(+)$ a fost ales spre a arăta că w variază în același sens cu t, luînd $\varphi > 0$, căci φ nu poate schimba de semn în intervalul considerat, fiind o funcție continuă și finită de q în domeniul (q_1, q_2). În aceste condiții, membrul al doilea al ecuației (14.11) este o funcție de q *bornată* în domeniul considerat. Ecuația diferențială (14.11) arată că și noua variabilă w va fi mărginită între două valori finite corespunzătoare unui t dat. Variind pe t de la $-\infty$ la $+\infty$, pentru studiul mișcării, vom fi conduși să analizăm mișcarea definită prin ecuația:

$$\frac{dq}{dw} = \nu \, (q - q_1)^{\frac{m}{2}} \, (q_2 - q)^{\frac{l}{2}} \tag{14.12}$$

dedusă din (14.9) și (14.11), făcînd pe w să varieze între $-\infty$ și $+\infty$.

Să considerăm, mai întîi, cazul particular $m = l = 1$. Integrala ecuației (14.12) este:

$$q = q_1 \cos^2 \frac{\nu}{2} w + q_2 \sin^2 \frac{\nu}{2} w. \tag{14.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că q este o funcție periodică de w, cu perioada $2\pi/\nu$. Constanta nedeterminată ν ne stă la dispoziție: o determinăm cu condiția ca q să fie periodică în timp, cu perioada T. Așadar, din (14.11) rezultă:

$$T = \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} \frac{\nu\, dw}{\sqrt{\varphi(q)}} = \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{(q-q_1)(q_2-q)\,\varphi(q)}} \tag{14.14}$$

unde q are valoarea (14.13). Perioada T este constantă, q este funcție periodică, pară, de t. Limitele q_1 și q_2 sînt atinse de q. Avem o *librație pură*.

În cazul cînd m și l sînt diferite de 1, problema se studiază la fel. Acest caz se deosebește de precedentul prin faptul că, după ecuația (14.12), dq/dw nu schimbă nici odată sensul, q se apropie *asimptotic* de una din frontiere, fără să o ajungă în timp finit. Avem o mișcare periodică de *librație îngrădită*, similară unei mișcări Lissajous.

389. **Mișcări condiționat-periodice.** Să presupunem că sistemul dinamic posedă un număr $n>1$ grade de libertate astfel încît:

$$\dot{q}^r = \frac{\partial H}{\partial p_r}\,;\quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q^r} \tag{14.15}$$

unde H să aibă o formă generalizată similară formei care ne-a permis, în cazul unui singur grad de libertate, să scriem ecuația H-J, § 371. Această cerință revine a spune că ecuația corespunzătoare a lui Hamilton-Jacobi să admită separarea variabilelor, problema integrîndu-se prin metoda lui Stäckel (§ 380). Expresiile (12.44) de la § 380 constituie integralele problemei. Să analizăm variațiile coordonatelor de poziție q^r, presupuse reale, continue și finite.

Fie q_1^k și q_2^k două rădăcini consecutive, izolate, de multiplicitate m_k respectiv l_k, ale ecuației (12.43) § 380:

$$\Phi_k(q^k) = 0$$

astfel încît valorile *inițiale* q_0^k să satisfacă relațiilor:

$$q_1^k < q_0^k < q_2^k\,. \qquad (k=1,\,2,\ldots n) \tag{14.16}$$

Vom avea:

$$\Phi_k(q^k) = (q^k - q_1^k)^{m_k}\,(q_2^k - q^k)^{l_k}\,f_k(q^k) \tag{14.17}$$

f_k nemai posedînd nici o rădăcină în acest interval, ea fiind o funcție pozitivă.

Facem substituțiile:

$$F_{ks}(q^k) = \frac{\varphi_{ks}(q^k)}{\sqrt{f_k(q^k)}} \qquad (k=1,\,2,\ldots n) \tag{14.18}$$

și:

$$\frac{dq^k}{(q^k - q_1^k)^{\frac{m_k}{2}}\,(q_2^k - q^k)^{\frac{l_k}{2}}} = du_k\,. \qquad (k=1,\,2,\ldots n) \tag{14.19}$$

Ținînd seamă de (14.18) și (14.19), relațiile (12.14) § 380 devin:

$$dt = F_{ks}(q^k)\,du_k\,;\quad 0 = F_{ks}(q^k)\,du_k\,. \qquad (k=2,\,3,\ldots n) \tag{14.20}$$

Scanned with OKEN Scanner

Acest sistem (14.20) poate fi rezolvat. Se obține:

$$\frac{dt}{\Delta(F)} = \frac{du_1}{\frac{\partial \Delta(F)}{\partial F_{11}}} = \ldots = \frac{du_n}{\frac{\partial \Delta(F)}{\partial F_{n1}}}; \tag{14.21}$$

însemnînd cu:

$$\Delta(F) = |F_{ks}| \tag{14.22}$$

determinantul funcțiilor (14.18) F_{ks}, determinant diferit de zero. Această proprietate rezultă din relația ușor de stabilit după (14.18):

$$\Delta(\varphi) = \sqrt{f_1 f_2 \ldots f_n}\ \Delta(F)$$

unde $\Delta(\varphi)$ este determinantul funcțiilor φ_{ks}, (12.40) § 380. În § 381 am demonstrat că acest determinant este diferit de zero. Deci, după (14.22), și $\Delta(F)$ este diferit de zero. Din proprietățile determinanților rezultă că și minorii respectivi sînt diferiți de zero. Soluția (14.21) este deci posibilă; ea este asemănătoare ecuațiilor (14.11).

Ne putem aranja astfel încît, la o variație a lui t de la $-\infty$ la $+\infty$, noile variabile u_k să fie funcții reale crescătoare. În conformitate cu lema precedentă, q^k vor rămîne în intervalul (q_1^k, q_2^k). Mișcarea va fi o *librație*. Să analizăm această mișcare în cazul mai simplu, $m_k = l_k = 1$, caz important pentru Astronomie și Mecanică atomică. În acest caz, *toate variabilele* q^k posedă o variație de *librație*.

Integrarea ecuațiilor (14.19) ne dă pentru q^k expresii periodice de forma (14.13) § 388:

$$q^k = q_1^k \cos^2 \frac{1}{2} u_k + q_2^k \sin^2 \frac{1}{2} u_k. \tag{14.23}$$

Substituind valorile (14.23) în (14.20) și integrînd, se obține:

$$t + \beta_1 = \chi_{k1}(u_k); \quad \beta_s = \chi_{ks}(u_k) \qquad (s = 2, 3, \ldots n) \tag{14.24}$$

unde β_k sînt constante de integrare, iar:

$$\chi_{kr} = \int F_{kr}(q^k)\, du_k.$$

Fie $2\omega_{kr}$ cîtimea cu care crește constanta β_r dacă u_k a crescut cu 2π. Avem:

$$2\omega_{kr} = \chi_{ks}(u_k + 2\pi) - \chi_{ks}(u_k).$$

Cum q^k este periodică în u_k, rezultă că ω_{kr} este o constantă:

$$\omega_{kr} = \int_0^{\pi} F_{kr}(q^k)\, du_k = \int_{q_1}^{q_2} \frac{\varphi_{kr}(q^k)\, dq^k}{\sqrt{(q^k - q_1^k)(q_2^k - q^k) f_k(q^k)}}. \tag{14.25}$$

Inversînd sistemul (14.24) vom obține mărimile u_k drept funcții uniforme de constantele β_r, așa fel încît, pentru o creștere ω_{kr} a constantelor β_r va corespunde o creștere 2π pentru u_k.

Ecuațiile (14.23) ne vor da, atunci, pe toți q^k drept funcții periodice de cele n variabile $t + \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$:

$$q^k = q^k(t + \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n). \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{14.26}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să introducem variabile noi w_s, cu ajutorul relațiilor:

$$t + \beta_1 = \omega_{s1} w_s, \quad \beta_r = \omega_{sr} w_s, \ (r = 2, 3, \ldots n) \tag{14.27}$$

admițînd că determinantul coeficienților este diferit de zero,

$$\omega = | \omega_{sr} | \neq 0.$$

Valorile (14.26) devin:

$$q^k = q^k (w_1, w_2, \ldots, w_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{14.26'}$$

și sînt funcții periodice de w_s. Să alegem pentru w_s perioada *unu*. Sistemul (14.27) poate fi scris:

$$\frac{dt}{\omega} = \frac{w_1}{\frac{\partial \omega}{\partial \omega_{11}}} = \ldots = \frac{w_n}{\frac{\partial \omega}{\partial \omega_{n1}}}. \tag{14.28}$$

Facem notațiile:

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \omega_{s1}} = \nu_s.$$

Integrarea sistemului (14.28) ne dă:

$$w_s = \nu_s t + \delta_s. \qquad (s = 1, 2, \ldots n) \tag{14.29}$$

Am introdus astfel, în locul perioadelor ω_{s1}, frecvențele ν_s, cu ajutorul cărora mișcarea poate fi reprezentată mai ușor. δ_s sînt noi constante de integrare.

Coorodonatele q^k se exprimă, din (14.26'), prin serii Fourier:

$$q^k = \sum_{\tau} C_{\tau}^k e^{2\pi i (\tau_k w_k)} \tag{14.30}$$

unde C sînt constante, $i = \sqrt{-1}$, iar $\tau_k w_k = \sum_{s=1}^{n} \tau_s w_s$, τ_k, fiind numere întregi pozitive sau negative, reprezintă o frecvență anumită, cu ajutorul unui sistem fundamental de frecvențe ν_k (§ 387):

$$\tau_k \nu_k = \sum_{s=1}^{n} \tau_s \nu_s$$

așa încît (14.30) ia forma:

$$q^k = \sum_{\tau} C_{\tau}^k e^{2\pi i [(\tau_k \nu_k) t + (\tau_k \delta_k)]}. \tag{14.31}$$

Pentru ca toți q^k să fie *periodici în timp*, este necesar și suficient ca toți ν_k să fie comensurabili, adică să admită un multiplu comun ν. În adevăr, dacă

$$\frac{\nu_1}{\tau'_1} = \frac{\nu_2}{\tau'_2} = \ldots = \frac{\nu_n}{\tau'_n} = \nu \tag{14.32}$$

atunci mișcarea va fi periodică în t cu perioada $1/\nu$. Dar expresia (14.32) arată că este necesar să avem $n-1$ relații liniare și omogene între frecvențele ν_s:

$$\sum_{s=1}^{n} \tau_{rs} \nu_s = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots n-1) \quad (14.33)$$

Condiția (14.33) este suficientă. În adevăr, ea permite să exprimăm pe toți $\nu_s = \nu\tau'_s$, unde τ'_s este minorul corespunzător în determinantul $|\tau_{sr}|$.

În cazul cînd mișcarea nu este periodică în timp, deci cînd frecvențele ν_s *nu sînt comensurabile*, mișcarea este similară unei mișcări L i s s a j o u s. Aceste mișcări se bucură de proprietatea fundamentală că traiectoria în R_n (spațiul coordonatelor q^h) trece oricît de aproape de fiecare punct din R_n; ea satisface la ipoteza *cuasiergodică*: *traiectoria umple dens întregul domeniu al coordonatelor*. Mișcările care împlinesc condițiile de mai sus au fost numite *condiționat-periodice* sau *cuasiperiodice*. În această categorie intră un mare număr de mișcări naturale: problema celor două corpuri; a celor două centre; modelele de atomi, pendulul sferic etc.; de aceea aceste mișcări au fost de mare însemnătate și în dezvoltarea analitică a teoriei cuantelor clasică [1]).

390. **Introducerea variabilelor de acțiune și a variabilelor unghiulare.** Cum ecuația lui H a m i l t o n-J a c o b i a mișcării condiționat-periodice (§ 379) admite separarea de variabile, vom putea determina funcția transformatoare:

$$S = \sum_r S_r (q^r, J_r), \qquad (14.34)$$

cu ajutorul căreia să efectuăm transformarea de coordonate canonice:

$$\{ q^r, p_r \} \to \{ w_r, J_r \}$$

astfel încît noua hamiltoniană să fie funcție numai de J_r (asimilăm aceste cîtimi J_r cu cîtimile α_r de la § 380). Introducem astfel coordonatele canonice $\{w_r, J_r\}$ care se bucură de proprietăți remarcabile. În primul rînd, se constată că J_r sînt *constante* în timp; ceea ce era de așteptat, w_r fiind ciclice. În adevăr, transformarea

$$p_r = \frac{\partial S_r}{\partial q^r} \; ; \; w_r = \frac{\partial S_r}{\partial J_r}, \qquad (14.35)$$

ne arată că:

$$J_r = \oint p_r \, dq^r . \qquad (14.36)$$

Cîtimile J_r se numesc *variabile de acțiune* și sînt canonic conjugate cu *variabilele unghiulare* w_r.

În adevăr, a doua ecuație (14.35) ne dă, variind pe w_r:

$$\frac{\partial w_r}{dq^r} = \frac{\partial}{\partial J_r} \left(\frac{\partial S}{\partial q^r} \right)$$

[1]) *N. Bohr*, „Über die Quantentheorie der Linienspektra", 1923.

și integrînd pe o perioadă a lui w_r (pe care am luat-o egală cu unitatea), obținem:

$$1 = \oint dw_r = \frac{\partial}{\partial J_r} \oint \frac{\partial S_r}{dq^r} dq^r = \frac{\partial}{\partial J_r} \oint p_r dq^r ;$$

de unde rezultă (14.36).

Făcînd transformarea (14.35), noua funcție hamiltoniană va depinde numai de J_r, iar ecuațiile (14.15) se integrează imediat. Se obține pentru variabilele unghiulare:

$$w_r = \nu_r t + \delta_r ; \text{ unde: } \nu_r = \frac{\partial H(J_r)}{\partial J_r} ; \quad (r = 1, 2, \ldots n)$$

de unde rezultă însemnătatea noilor constante ν_r introduse în calcul.

Se verifică, fără dificultate, că variabilele de acțiune și variabilele unghiulare sînt canonic conjugate, — adică satisfac relațiile:

$$(w_r, J_k) = \delta_{rk} .$$

Capitolul XV

MIȘCĂRI VIBRATORII

Un mare număr de probleme tehnice, precum și unele soluții ale sistemelor de mișcare pentru fenomene cerești și atomice, se studiază și se rezolvă în cadrul mișcărilor reduse la oscilații mici în jurul unei configurații de echilibru. Mișcările de această natură, cu caracter mecanic, presupun că sistemul dinamic posedă *un număr finit de grade de libertate*. În paragraful 57 ș.u. am dat o indicație sumară asupra acestei probleme. Mișcările vibratorii într-un mediu cu un număr *infinit* de grade de libertate face obiectul fundamental al studiului oscilațiilor *acustice* [1]). Ne vom mărgini, în cele ce urmează, la vibrații cu un număr *finit* de grade de libertate.

391. **Oscilații în jurul unei poziții de echilibru stabil.** Să considerăm un sistem material reprezentat analitic printr-un sistem dinamic olonom cu un număr n finit de grade de libertate $q^1, q^2, \ldots, q^n$, (coordonate neciclice) care se bucură de proprietatea următoare: există o stare a sistemului material pentru care:

$$q_0^k = \alpha_k ; \quad \dot{q}_0^k = 0 ; \quad \ddot{q}_0^k = 0 ; \quad (k = 1, 2, \ldots n) \qquad (15.1)$$

unde α_k sînt constante. Numim starea (15.1) o *configurație de echilibru stabil*.

Una din metodele de integrare aproximativă a problemei celor trei corpuri este „integrarea prin serii", unde joacă un mare rol soluțiile periodice care prezintă variații finite față de o soluție reprezentînd o confi-

---

[1]) v. *Lord Rayleigh*, „Analitical Theory of Sound".

Scanned with OKEN Scanner

guraţie de echilibru stabil. Această metodă este caracteristică problemei celor trei corpuri şi face obiectul cu totul special în studiul, deosebit de complicat, al numitei probleme din *Mecanica cerească*.

În capitolul de faţă ne vom mărgini la cazul problemelor mecanice pentru care variaţiile coordonatelor sistemului dinamic, faţă de o poziţie de echilibru stabil, sînt foarte mici:

$$| q^h - q_0^h | \ll 1. \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

Această relaţie reprezintă condiţia ca mişcarea să fie *stabilă*.

Generalitatea nu este dăunată dacă admitem că toţi q_0^k sînt nuli. Prin ipoteză, valorile relative la poziţia de echilibru ale coordonatelor sînt foarte mici.

Pentru ca această ipoteză să fie posibilă, trebuie să admitem că forţele exterioare sînt şi ele foarte mici. În acest caz, funcţia forţelor şi deci energia potenţială, funcţie numai de coordonatele de poziţie, nu va conţine termeni de gradul zero şi unu în q^h. În adevăr, termenii de gradul zero nu influenţează mişcarea, iar termenii de gradul întîi în q^h, prin derivare (spre a calcula forţa), trebuind să fie nuli în poziţia de echilibru, rămîn mereu nuli. Aşadar, ipoteza fundamentală a vibraţiilor mici echivalează, în primul rînd, cu alegerea unei expresii analitice pătratice în q^h pentru energia potenţială:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^{n} b_{ks}\, q^k\, q^s; \qquad (15.2)$$

formă *pozitiv definită*; b_{ks} fiind constante.

Energia cinetică T va fi, prin natura ei însăşi, o funcţie pozitiv definită şi pătratică în $\dot{q}^h$, timpul nefigurînd explicit în T. În adevăr, sistemul fiind reprezentat prin coordonatele q^h, independent de timp, acesta nu va figura în T. Coeficienţii termenilor pătratici în $\dot{q}^h$ fiind funcţii de q^h, îi putem dezvolta în serii după puterile variabilelor mici q^h şi opri dezvoltarea la primii termeni constanţi. Aşadar:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^{n} a_{ks}\, \dot{q}^k\, \dot{q}^s \qquad (15.3)$$

a_{ks} fiind constante.

Problema de rezolvat este, prin urmare, studierea mişcării unui sistem dinamic avînd hamiltoniana independentă de t, dată de expresiile (15.2) şi (15.3).

392. **Reducerea la axele principale.** Formele pătratice pozitiv definite (15.2) şi (15.3) se reduc la formele *normale*:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \dot{q}^{k2}; \quad U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, q^{k2}, \qquad (15.4)$$

unde λ_k sînt cele n rădăcini reale ale ecuaţiei seculare de gradul n în λ:

$$| a_{ks}\, \lambda - b_{ks} | = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Teorema lui J. J. Silvester, cunoscută din Algebră, stabilește existența a n rădăcini reale și pozitive[1]), care pot să nu fie toate distincte. Există atunci o transformare liniară cu coeficienți reali care duce formele (15.2) și (15.3) în formele (15.4). Transformarea poartă numele de „reducere la axele principale"[2]).

393. **Ecuațiile de mișcare.** Coordonatele independente $q^1, q^2, \ldots, q^n$ pentru care energia cinetică și potențială iau formele canonice (15.4) se numesc *coordonate normale*. Ecuațiile mișcării, fără frecare, se scriu în coordonate normale, mai simplu, pornind de la ecuațiile lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^r} = -\frac{\partial U}{\partial q^r}. \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \quad (15.5)$$

Deducem, pentru fiecare grad de libertate, ecuațiile:

$$\ddot{q}^r + \lambda_r q^r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \quad (15.6)$$

unde λ_r sînt rădăcinile ecuației (15.5). Integrala acestei ecuații se poate prezenta sub formă de:

1. *vibrație pură*: $q^r = \alpha_r \cos\left(\sqrt{\lambda_r}\, t + \beta_r\right)$; dacă λ_r sînt *pozitive*;
2. mișcare rectilinie uniformă: $q^r = \alpha_r\, t + \beta_r$ dacă λ_r sînt nuli;
3. mișcare aperiodică: $q^r = \alpha_r\, e^{i\sqrt{\lambda_r}\, t} + \beta_r e^{-i\sqrt{\lambda_r}\, t}$; dacă λ_r sînt negativi.

Cum, prin ipoteză, am considerat cazul mișcărilor *stabile* care sînt *pur oscilatorii*, trebuie să luăm în considerație *prima* soluție. În acest caz, ipoteza introdusă la început după care U trebuie să fie o formă pătratică pozitiv definită, ipoteză care echivalează cu existența rădăcinilor λ_r *pozitive*, ale ecuației (15.5), este complet justificată.

Ecuațiile (15.6) arată că mișcarea fără frecare a unui sistem olonom cu n grade de libertate în jurul unei configurații de echilibru stabil se reduce la n oscilații armonice, *independente* pentru fiecare coordonată normală q^r. Independența oscilațiilor normale rezultă din faptul că, dacă o coordonată *anumită* q^r este diferită de zero, pe cînd celelalte $q^1, \ldots, q^{r-1}, q^{r+1}, \ldots, q^n$ sînt toate nule în momentul inițial, această stare se păstrează tot timpul. Oscilația armonică normală q^r nu depinde de celelalte coordonate.

Cele n vibrații normale mai poartă numele de *vibrații principale*. Dacă raportăm mișcarea sistemului la alte coordonate legate de coordonatele normale prin relații liniare, este evident că starea de mișcare a sistemului dinamic se poate exprima ca o funcție liniară de cele n vibrații principale. Această proprietate a fost numită de Daniel Bernoulli „principiul suprapunerii vibrațiilor": *orice fenomen vibratoriu permanent se poate analiza cu ajutorul mișcărilor armonice independente.*

Fie:

$$2\pi\nu_k = \omega_k = \sqrt{\lambda_k},$$

---

[1]) Pozitive, fiindcă s-a luat, prin ipoteză, U pozitiv definită. Această ipoteză se justifică, mai jos, prin condiția ca mișcarea să fie pur oscilatorie, deci stabilă.

[2]) v. *D. Hilbert* und *R. Courant*, [27].

frecvența vibrației principale; în Acustică ea poartă numele de *notă fundamentală*, celelalte frecvențe, în ordine crescîndă, se numesc *armonica primă*, *secundă*, *terță* etc.[1]). Vibrațiile mici fiind date în coordonate normale prin:

$$q^r = \alpha_r \cos(\omega_r t + \beta_r) \tag{15.7}$$

ele vor avea drept ecuație în alt sistem de coordonate:

$$Q^r = Q_0^r + \sum_{s=1}^{n} \gamma_{rs} \alpha_s \cos(\omega_s t + \beta_s) \tag{15.7'}$$

unde Q_0^r și γ_{rs} sînt constante bine determinate de natura sistemului vibrant, α și β fiind constante de integrare.

394. **Vibrațiile sistemelor supuse la legături.** Să presupunem că sistemul dinamic olonom cu n grade de libertate $q^1, q^2, \ldots, q^n$, definit prin energia cinetică T și energia potențială U:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \dot{q}^{r^2}; \quad U = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \omega_r^2 q^{r^2}, \tag{15.8}$$

este supus unor legături exprimate prin relația:

$$f(q^1, q^2, \ldots, q^n) = 0. \tag{15.9}$$

Cum, prin ipoteză, coordonatele de poziție q^r variază foarte puțin față de valorile unei configurații de echilibru stabil, dezvoltarea în serie a funcției (15.9) permite să ne oprim în dezvoltare la termenii de gradul întîi; ceea ce înseamnă că (15.9) va avea forma:

$$a_1 q^1 + a_2 q^2 + \ldots + a_n q^n = 0 \tag{15.10}$$

a_r fiind constante cunoscute.

Ecuațiile lui L a g r a n g e pentru mișcarea sistemului (15.8), supus la legătura (15.10), sînt date de expresiile (15.16) § 305. În cazul de față, se obține sistemul:

$$\ddot{q}^r + \omega_r^2 q^r + \lambda a_r = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \tag{15.11}$$

unde ω_r sînt frecvențele proprii[2]) ale sistemului inițial și λ este un parametru nedeterminat. Cele n ecuații (15.11), împreună cu ecuația de condiție (15.10), rezolvă problema, permițînd determinarea celor n coordonate q^r și a parametrului λ.

Mișcarea rezultantă se obține, căutînd o soluție particulară a sistemului (15.11). Fie:

$$q^r = \alpha_r \cos \omega t; \quad \lambda = \mu \cos \omega t; \tag{15.12}$$

---

[1]) v. A k u s t i k, Handbuch der Physik, vol. VIII.

[2]) Numim „vibrație proprie" o mișcare în care toate punctele sistemului oscilează pur armonic cu aceeași fecvență și aceeași fază ; numai amplitudinile vibrațiilor diferitelor puncte ale sistemului pot diferi în valoare și semn.

o astfel de soluție. Substituind-o în (15.10) și (15.11), obținem:

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_r a_r = 0 \tag{15.13}$$

și:

$$\alpha_r \left(\omega_r^2 - \omega^2 \right) + \mu a_r = 0;$$

de unde, înlocuind valorile lui α_r, deducem ecuația algebrică pentru ω^2:

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{a_r^2}{\omega_r^2 - \omega^2} = 0.$$

Această ecuație posedă $n-1$ rădăcini pentru ω^2, care sînt intercalate în intervalele $\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_n^2$, așezate în ordinea mărimii. Această proprietate exprimă *teorema lui R a y l e i g h*: într-un sistem material olonom cu n grade de libertate, supus la mișcări de oscilații în jurul unei poziții de echilibru stabil, intervenția a m legături olonome nu poate coborî nota fundamentală și nici nu o poate ridica peste valoarea frecvenței armonicii de ordin $m+1$. Un exemplu de suprapunere de mișcări oscilatorii am întîlnit în § 61.

395. **Vibrații întreținute** (v. § 66). Dacă asupra sistemului vibrant acționează o forță exterioară, periodică, a cărei componentă F_k o scriem sub formă de serie F o u r i e r:

$$F_k = \sum_s a_k^s \cos \left(\omega^s t + b^s \right). \tag{15.14}$$

ecuațiile de mișcare devin:

$$\ddot{q}^k + \omega_k^2 q^k = \sum_s a_k^s \cos \left(\omega^s t + b^s \right). \quad (k=1, 2, \ldots n) \tag{15.15}$$

Soluția sistemului (15.15) se scrie:

$$q^k = \alpha_k \cos \left(\omega_k t + \beta_k \right) + \sum_s \frac{a_k^s}{\omega_k^2 - \omega^{s^2}} \cos \left(\omega^s t + b^s \right)$$

unde α_k și β_k sînt constante de integrare.

Dacă una din frecvențele forței exterioare perturbatoare, ω^s, care solicită sistemul, coincide cu una din oscilațiile proprii ω_k ale sistemului, ia naștere cunoscutul fenomen de *rezonanță* (§ 67). Concluziile pe care le-am stabilit în cazul unui singur grad de libertate se extind și în cazul *sistemelor* materiale oscilante care reprezintă mișcări reale.

396. **Vibrații în jurul unei mișcări staționare.** Se numește „mișcare staționară" o mișcare reprezentată printr-un sistem dinamic posedînd un anumit număr de coordonate ciclice și satisfăcînd condițiile: 1. coordonatele neciclice rămîn constante; 2. vitezele corespunzătoare coordonatelor ciclice rămîn de asemenea constante; ceea ce înseamnă că variabilele ciclice vor avea un caracter unghiular (fiind periodice).

Scanned with OKEN Scanner

Fie un sistem cu $n + m$ grade de libertate $q^1, q^2, \ldots, q^{n+m}$. Din aceste coordonate, un număr de m să fie ciclice; pentru distincție, să le notăm cu $Q^1 = q^{n+1}$, $Q^2 = q^{n+2}, \ldots, Q^m = q^{n+m}$; rămîn drept coordonate necicilice celelalte $q^1, q^2, \ldots, q^n$, în număr de n, distincte.

Integralele corespunzătoare celor m variabile ciclice sînt:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}^r} = \beta_r \text{ (const)} \qquad (r = 1, 2, \ldots m) \qquad (15.16)$$

Expresia energiei cinetice se scrie, deosebind cele două feluri de variabile:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^{n} a_{ks} \dot{q}^k \dot{q}^s + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} b_{ks} \dot{q}^k \dot{Q}^s + \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^{m} c_{ks} \dot{Q}^k \dot{Q}^s. \qquad (15.17)$$

Calculînd expresia (15.16) cu valorea (15.17) a lui T, obținem:

$$\sum_k b_{ks} \dot{q}^k + c_{ks} \dot{Q}^k = \beta_s. \qquad (s = 1, 2, \ldots m) \qquad (15.18)$$

Aceste m ecuații algebrice permit calcularea celor m variabile $\dot{Q}^k$ în funcție de β_s și $\dot{q}^k$. Aceste valori introduse în (15.17) vor da pentru T o expresie pătratică în $\dot{q}^k$, conținînd însă și termeni liniari în $\dot{q}^k$. Formăm apoi funcția lui Routh (§ 290):

$$R = \mathfrak{L} - \sum_{r=1}^{m} \dot{Q}^k \beta_r \qquad (15.19)$$

unde $\mathfrak{L} = T - U$, iar U este o formă pătratică în coordonatele q^k. Condițiile (1) și (2) de staționaritate, enunțate la începutul paragrafului, cer ca:

$$\frac{\partial R}{\partial q^k} = 0 \qquad (15.20)$$

R avînd, în general, forma:

$$R = A_{ks} \dot{q}^k \dot{q}^s + B_{ks} q^k \dot{q}^s + C_{ks} q^k q^s \qquad (15.21)$$

A, B, C fiind funcții de coordonate. Să observăm însă că, pentru mișcarea *nevariată*, valorile coordonatelor q^k sînt constante. Mișcarea *variată*, presupusă *stabilă*, este reprezentată de coordonate q^k foarte puțin diferite de valorile staționare; așadar, foarte mici. Dar atunci, în aproximația adoptată, coeficienții lui R în (15.21) pot fi considerați constanți. Înlocuind în R pe toți q^k prin valori puțin variate de la valoarea corespunzătoare mișcării staționare și oprindu-ne la termenii pătratici obținem, în general, o expresie tot de forma (15.21) cu coeficienți constanți, pentru mișcarea variată.

Caracteristica mișcării de față: *în jurul unei mișcări staționare*, prin comparație cu mișcarea în jurul unei *poziții de echilibru*, este determinată prin apariția termenului *giroscopic* $q^k \dot{q}^k$ în T.

Condiția ca mișcarea perturbată să fie *stabilă* este, după § 393, ca expresia energiei potențiale în (15.21) să fie o formă pătratică *pozitiv definită*.

Scanned with OKEN Scanner

Integrarea ecuațiilor de mișcare deduse din (15.21) a fost efectuată de K. Weierstrass[1]). Pentru dezvoltarea acestei metode trimitem la E. Whittaker p. 195 [5].

397. **Exemple.**

1. O particulă de masă unu descrie cercul $r = a$, $z = b$, într-un cîmp de forțe $U(r, z)$, unde $r^2 = x^2 + y^2$, astfel încît $\frac{\partial U}{\partial z}$ să fie nul pentru $r=a$, $z=b$. Să se găsească condiția de stabilitate (Whittaker).

Energia cinetică este, în coordonate cilindrice:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2).$$

Observăm că θ este coordonată ciclică. Integrala primă corespunzătoare (15.16) este $\beta = r^2\dot{\theta}$. Funcția lui Routh, după (15.19), se scrie:

$$R = T - U(r, z) - \beta\dot{\theta}$$

sau:

$$R = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{\beta^2}{2r^2} - U(r, z). \qquad (15.22)$$

Condițiile (15.2) pentru coordonatele neciclice r și z ne dau:

$$\beta^2 = a^3\frac{\partial U}{\partial a}.$$

Înlocuind în (15.22) pe β^2 și făcînd $r = a + \rho$; $z = b + \zeta$, și neglijînd termenii diferiți de cei pătratici, se obține pentru (15.22):

$$R = \frac{1}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\dot{\zeta}^2 - \frac{1}{2}\rho^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} + \frac{3}{a}\frac{\partial U}{\partial a}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial a\partial b}\rho\zeta - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial b^2}\zeta^2 \qquad (15.23)$$

deci, de o formă mai restrînsă decît (15.21); lipsesc, anume, tocmai termenii *giroscopici*. Atunci mișcarea este similară oscilației în jurul unei poziții de *echilibru stabil*. Condiția de stabilitate cere ca expresia energiei potențiale, în (15.23), să fie o formă pătratică pozitiv definită. Pentru aceasta trebuie ca:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial b^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} + \frac{3}{a}\frac{\partial U}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial a\partial b}\right)^2 > 0\ ;\quad \frac{\partial^2 U}{\partial b^2} > 0.$$

2. *Regulatorul lui James Watt* (fig. 80) este un dispozitiv menit să anihileze perturbațiile unei mișcări de rotație uniformă, cum este, de pildă, cunoscutul dispozitiv adaptat la mașinile cu vapori. El este format dintr-un ax vertical fix, pe care se angrenează în punctul O un sistem plan format din două bare rigide OA, OB fără masă, de lungime l, terminate prin două mase egale m. Planul AOB efectuează o mișcare de oscilație determinată de unghiul θ făcut de poziția planului în momentul t cu o poziție inițială dată. Cele două bare se sprijină în punctul C pe axul fix, acest punct putînd aluneca pe direcția axului, astfel încît unghiul φ făcut de ax cu fiecare bară să fie variabil.

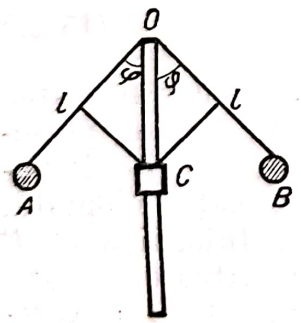

Fig. 80

Adaptat pe o mașină cu vapori, dispozitivul lui Watt are rolul să regleze accesul vaporilor în caseta de distribuție, prin variația unghiului φ, care depinde, așadar, de iregularitățile mișcării.

Fie $2ml^2$ momentul de inerție al maselor m în raport cu O cînd variază φ; fie C momentul principal de inerție al sistemului vibrant în jurul axului vertical (prin variația lui θ); momentul maselor m în raport cu axul este $2ml^2\sin^2\varphi$. Avem:

$$J_\theta = C + 2ml^2\sin^2\varphi;\quad J_\varphi = 2ml^2.$$

[1]) Berlin. Monatsberichte, 1879.

Energia cinetică a sistemului este:

$$T = \left(\frac{1}{2} C + ml^2 \sin^2 \varphi\right) \dot{\theta} + ml^2 \dot{\varphi}. \tag{15.24}$$

Una din forţele exterioare care solicită sistemul este greutatea, derivînd din potenţialul:

$$U = 2ml \cos \varphi. \tag{15.25}$$

O altă acţiune este datorită momentului de rotaţie în jurul axului Q_0, datorit variaţiei afluxului de vapori în caseta de distribuţie a motorului. Acest aflux depinde de variaţia lui φ faţă de valoarea φ_0 (constantă), pe care o are în „regim" stabil, şi anume, cu cît φ creşte cu atît afluxul scade. Q_θ va fi, aşadar, o funcţie Q_θ $(\varphi - \varphi_0)$, considerată ca o perturbaţie foarte mică. Ea poate să fie dezvoltată în serie după puterile diferenţei foarte mici $\varphi - \varphi_0$. În aceste condiţii, putem opri dezvoltarea la termenul liniar:

$$Q_\theta = -\lambda (\varphi - \varphi_0). \tag{15.26}$$

Ecuaţiile lui L a g r a n g e sînt, după (15.24), (15,25) şi (15.26):

$$\frac{d}{dt}(J_\theta \dot{\theta}) = Q_\theta \; ; \quad \frac{d}{dt}(J_\varphi \dot{\varphi}) - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \frac{\partial J_\theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \tag{15.27}$$

Condiţiile iniţiale sînt:

$$\varphi = \varphi_0 \; ; \; \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{g}{l \cos \varphi_0}}.$$

Pentru a studia oscilaţiile mici în jurul regimului stabil, să punem $\varphi = \varphi_0 + \psi$, $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 + \omega$, unde ψ şi ω sînt cantităţi mici. Făcînd această substituţie în (15.27), obţinem ecuaţiile [unde $J_0 = J_\theta(\varphi_0)$]:

$$J_0 \dot{\omega} + ml^2 \dot{\theta}_0 \sin 2\varphi_0 \dot{\psi} + \lambda \psi = 0$$

$$\ddot{\psi} - \dot{\theta}_0 \sin 2\varphi_0 \omega + \left(\frac{g}{l} \cos \varphi_0 - \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi_0\right) \psi = 0.$$

Să încercăm soluţia:

$$\omega = \alpha_1 e^{rt} \; ; \quad \psi = \alpha_2 e^{rt}. \tag{15.28}$$

Ecuaţia caracteristică este:

$$\left(\frac{C}{2ml^2} + \sin^2 \varphi_0\right) r^3 + \dot{\theta}_0^2 \sin^2 \varphi_0 \left(1 + 3 \cos^2 \varphi_0 - \frac{C}{2ml^2}\right) r + \frac{\lambda}{2ml^2} \dot{\theta} \sin^2 \varphi_0 = 0.$$

Această ecuaţie de gradul al treilea în r admite cu siguranţă o rădăcină reală negativă r_1. Dacă şi celelalte două rădăcini r_2 şi r_3 sînt reale, una este pozitivă; dacă sînt imaginare (conjugate), partea lor reală este pozitivă.

În ambele cazuri, soluţia (15.28) este *aperiodică*. Mişcarea este *nestabilă*. Practic, această concluzie teoretică se traduce prin constatarea că regulatorul lui W a t t nu reuşeşte să stabilizeze mişcarea, căci acţionează în mod neregulat asupra supapei de acces al vaporilor (v. T. L e v i - C i v i t a).

3. *Giroscopul adormit* (v. § 221). După § 217 putem scrie expresia energiei cinetice pentru mişcarea unui rigid greu în jurul unui punct fix sub forma:

$$T = \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} A \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2,$$

cu notaţiile de la § 221 şi § 185. Energia potenţială este:

$$U = mgl \cos \theta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Coordonata ciclică este ψ; integrala corespunzătoare se scrie:

$$\beta = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta).$$

Funcţia lui R o u t h devine:

$$R = \frac{1}{2}A\dot{\theta} + \frac{1}{2}A\dot{\psi}^2\sin^2\theta + \beta\dot{\psi}\cos\theta - mgl\cos\theta. \qquad (15.29)$$

Cum, în această problemă, numai θ este variabilă oscilantă, foarte mică, pe cînd ψ este o variabilă cu variaţii finite, se introduc două noi variabile ξ şi η, prin relaţiile:

$$\xi = \sin\theta\cos\psi;\ \eta = \sin\theta\sin\psi.$$

Păstrînd numai termenii pătratici în ξ, η, $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, şi înlocuind în ultimii doi termeni din (15.29) $\cos\theta$ cu $\cos\theta - 1$, căci $\beta\dot{\psi}$ şi mgl dispar din ecuaţiile de mişcare, obţinem:

$$R = \frac{A}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{A}{2}\dot{\eta}^2 - \frac{\beta}{2}(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + \frac{1}{2}mgl(\xi^2 + \eta^2). \qquad (15.30)$$

Scriind ecuaţiile mişcării, cu potenţialul cinetic (15.30), se obţin ecuaţiile

$$A\ddot{\xi} + \beta\dot{\eta} - mgl\xi = 0;\quad A\ddot{\eta} - \beta\dot{\eta} - mgh\eta = 0.$$

Integrăm aceste ecuaţii încercînd substituţia

$$\xi = ae^{i\lambda t}\quad ;\ \eta = be^{i\lambda t}$$

şi eliminînd a şi b. Se obţine pentru λ valoarea

$$\lambda = \pm\frac{1}{2A}\left[\beta \pm (\beta^2 - 4Amgl)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Aşadar, λ este *real* dacă $\beta^2 \geqslant 4Amgl$; mişcarea este stabilă, oscilatorie pură.

Dacă $\beta^2 < 4Amgl$, mişcarea este nestabilă, fiind aperiodică. Regăsim rezultatele de la § 221.

Studiul complet al giroscopului şi vibraţiilor mici, cu aplicaţii tehnice, se găseşte în diverse publicaţii[1]).

---

[1]) De exemplu: *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, „Über die Theorie des Kreisels", Teubner, 1897—1910; *S. Timoshenko*, „Théorie des Vibrations", Béranger, 1939; *J. P. Hartog* „Vibrations et mouvements vibratoires", Dunod, 1936.

Scanned with OKEN Scanner

MECANICA CORPULUI CU MASĂ VARIABILĂ

Scanned with OKEN Scanner

Partea întîi

MASA VARIABILĂ CU TIMPUL

Capitolul I

PUNCTUL CU MASĂ VARIABILĂ

398. **Teorema impulsului.** După cum am arătat la § 34, noţiunea mecanică de „impuls" îşi păstrează valabilitatea şi în cazul masei variabile, fiind definită prin relaţia $\bar{p} = m\bar{v}$ în mecanica newtoniană şi în spaţiul euclidian al fenomenelor fizice. Se ştie că proporţionalitatea dintre vectorul impuls şi vectorul viteză nu mai este valabilă în mecanica lagrangeiană, în care vom defini impulsul generalizat şi în cazul masei variabile prin aceeaşi expresie ca şi în cazul masei constante, $p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}$, unde T este energia cinetică, iar q^k coordonatele lagrangeniene de poziţie.

În cele ce urmează, păstrăm definiţia vectorială a impulsului: masa înmulţită cu viteza. În § 429 şi următoarele generalizăm această noţiune.

Admitem, de asemenea, ca valabile următoarele legi fundamentale din mecanica newtoniană: 1) legea conservării impulsului, — cu consecinţa: variaţia impulsului $m\bar{v}$ este egală cu impulsia tuturor forţelor, care solicită sistemul; 2) legea independenţii acţiunii forţelor, ceea ce revine la aplicarea regulii paralelogramului la compunerea forţelor, considerate ca vectori localizaţi sau alunecători.

Odată aceste ipoteze admise, să presupunem că avem un punct material de masă m variabilă[1]) în timpul mişcării prin captarea sau emisia unei particule foarte mici de masă $\left|\frac{dm}{dt}\right| \ll m$. Fie $\bar{F}$ rezultanta forţelor exterioare, a cărei influenţă asupra particulei emise sau captate să fie neglijabilă.

Teorema clasică a impulsului este dată de ecuaţia:

$$d(m\bar{v}) = \bar{F}dt + dm\,\bar{u} \tag{1.1}$$

dacă însemnăm cu $\bar{u}$ viteza *absolută* (faţă de un sistem fix de coordonate) a particulei emise sau captate în timpul dt.

Trebuie observat că procesele de emisie şi de captare urmează a fi concepute în mod mai complex: putem considera „particula" emisă, sau captată, drept centrul de greutate al unui nor de particule foarte mici, orientate sub un unghi solid dat, definit prin direcţia vitezei absolute $\bar{u}$.

[1]) Se înţelege „masa de repaus", care însă în mecanica newtoniană este tot una cu „masa de mişcare" (în sensul relativist: v. Relativitatea restrînsă).

Din ecuația (1.1) se deduce imediat ecuația lui Mescerski (1897):

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F} + \frac{dm}{dt}\bar{u}, \tag{1.2}$$

care se mai scrie:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{dm}{dt}\bar{w}, \tag{1.2'}$$

unde $\bar{w} = \bar{u} - \bar{v}$ este viteza relativă.

Expresia

$$\frac{dm}{dt}\bar{w} = \bar{\Phi}_r \tag{1.3}$$

poartă numele de *forță reactivă*, datorită scurgerii particulelor. Într-un mare număr de probleme puse de tehnica modernă a vehiculelor cu reacție, *valoarea vitezei relative a particulelor emise trebuie considerată constantă și îndreptată pe tangenta la traiectoria punctului material* de emisie: $\bar{w} = \bar{u} - \bar{v} = -w\bar{t} = -\lambda(t)\cdot\bar{v}$, unde $\bar{t}$ este vectorul unitar al tangentei la traiectorie, în sensul mișcării.

399. **Observații asupra ecuației fundamentale.** a) Să admitem că în timpul mișcării, punctul material emite și captează *simultan* cîte o particulă (centru de greutate) de masă dm_1, respectiv dm_2, cu vitezele absolute $\bar{u}_1$, respectiv $\bar{u}_2$, *procesele de emisie și captare fiind independente între ele*. În acest caz, ecuația (1.2) se extinde sub forma:

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F} + \frac{dm_1}{dt}\bar{u}_1 + \frac{dm_2}{dt}\bar{u}_2, \tag{1.4}$$

asupra căreia vom reveni cu exemple de mișcare.

b) T. Levi-Civita[1]) a pus problema astronomică a captării de meteoriți care cad pe o planetă din toate direcțiile, în mod uniform, și calculează că în această problemă viteza medie pătratică absolută a centrului de greutate a norului de particule este neglijabilă față de viteza momentană a corpului. Aceasta face ca în ecuația (1.2) să se ia $\bar{u} = 0$ și se obține astfel ecuația newtoniană propusă de Levi-Civita pentru cazul *captării*, sub forma:

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F}. \tag{1.5}$$

Este interesant de observat că ecuația (1.5) se obține și în cazul cînd masa de mișcare variază relativist (cu viteza): $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ așa cum va fi dedusă în mecanica relativistă (§ 447).

[1]) *T. Levi-Civita*, „Ancora sul moto di un corpo di massa variabile", Rend. d. R., Acc. Naz. Lincei, 1930, p. 626.

Această situație este ușor de interpretat. În adevăr, variația relativistă a masei este un proces *intern* al electronului (punctul) cu masă variabilă în mișcare cu viteză comparabilă cu viteza luminii, — sistemul total înglobînd numai electronul însuși, deci $\bar{u} = 0$, neexistînd particule emise ori captate, — ceea ce conduce de la ecuația (1.2) la ecuația (1.5) valabilă în relativitatea restrînsă.

c) Tot T. Levi-Civita[1]) consideră și cazul astronomic al emisiei uniforme de particule în toate direcțiile, — ceea ce conduce la a admite că viteza relativă $\bar{u} - \bar{v} = \bar{w}$ a particulelor este nulă. În aceste condiții, deci pentru cazul *emisiei* uniforme a unui nour de particule, ecuația (1.2) devine:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}, \tag{1.6}$$

identică ecuației punctului cu masa constantă.

d) Din ecuația (1.1), prin integrare într-un interval de timp (t_0, t), se obține ecuația impulsului, sub forma:

$$(m\bar{v}) - (m\bar{v}_0) = \int_{t_0}^{t} \bar{F}\, dt + \int_{t_0}^{t} \frac{dm}{dt} \bar{u}\, dt. \tag{1.7}$$

În cazul $\bar{u} = 0$, ecuația revine la cea clasică.

e) Ecuația (1.2), ca și cele care derivă din ea, nu *devine explicită decît după ce se dă legea de variație a masei cu timpul*:

$$m = m_0 f(t); \qquad f(0) = 1, \tag{1.8}$$

unde $f(t)$ este o funcție care devine egală cu unitatea pentru $t = 0$ și m_0 este masa inițială (la începutul procesului de variație a masei[2]). Pentru un număr mare de probleme puse de tehnica modernă, funcțiile $f(t)$ care prezintă importanță sînt: funcția liniară (cînd și forța reactivă este constantă: $\Phi_r = -\frac{dm}{dt} w = \alpha m_0 w$), și funcția exponențială (cînd și accelerația este constantă: $a_r = \frac{1}{m} \Phi_r = \alpha w$; forța reactivă $\Phi_r = -\frac{dm}{dt} w = \alpha m_0 w e^{-\alpha t}$ fiind variabilă)[3]:

$$f(t) = 1 \pm \alpha t; \qquad f(t) = e^{\pm \alpha t}, \tag{1.9}$$

---

[1]) *T. Levi-Civita*, loc. cit.

[2]) Atît m_0 cît și m sînt mase de repaus egale cu masele respective de mișcare; iar notația m_0 pentru m în momentul $t = 0$ nu trebuie confundată cu masa de repaus relativistă.

[3]) Se poate arăta că, reciproc, dacă accelerația a și viteza relativă w sînt constante, legea de variație a masei este exponențială. În adevăr, din ecuația de mișcare: $m\dot{v} = -\alpha m_0 w$, rezultă $ma = -\frac{dm}{dt} w$, deci $m = m_0 e^{-\frac{at}{w}}$. Problema se pune în tehnica *rachetei*.

unde α este o constantă pozitivă, semnul $\pm$ arătînd captare sau emisie. În tehnica navelor cu reacție avem problema emisiei; în acest caz, admițînd variația liniară, avem:

$$\frac{-dm}{dt} = \alpha m_0 = \text{const}$$

care se numește *consumul pe secundă* de combustibil, α fiind *consumul specific*.

În problema generală, $\pm \frac{dm}{dt} = m_0 \dot{f}(t) = \mu$ este masa unei particule captată (+) sau emisă (−), concepută ca „centrul de masă" al unui *nour* de particule.

400. **Teorema momentului cinetic.** În cazul punctului cu masă variabilă, momentul cinetic se definește întocmai ca și pentru dinamica punctului cu masă constantă, drept momentul impulsului față de un pol dat, prin relația:

$$\bar{K} = \bar{r} \times m\bar{v}, \tag{1.10}$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziție al punctului material cu masa variabilă m și cu viteza momentană $\bar{v}$.

Pentru stabilirea ecuației care exprimă teorema momentului cinetic, înmulțim vectorial cu $\bar{r}$ în ecuația (1.2); obținem:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{F} + \frac{dm}{dt}(\bar{r} \times \bar{u}), \tag{1.11}$$

deci: derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al punctului de masă variabilă m, față de un pol oarecare, este egală cu momentul forțelor aplicate, adunat cu momentul forței reactive condiționată de mișcarea absolută.

Pentru $\bar{u} = 0$, regăsim ecuația mecanicii masei constante. Este interesant de examinat cazul cînd rezultanta forțelor aplicate se echilibrează cu forța reactivă:

$$\bar{F} + \frac{dm}{dt}\bar{u} = 0. \tag{1.12}$$

Din relația (1.11) rezultă în acest caz:

$$\bar{r} \times m\bar{v} = \bar{c},$$

unde $\bar{c}$ este un vector constant. Înmulțind în această ecuație scalar cu $\bar{r}$, avem evident $\bar{c}\bar{r} = 0$, ceea ce ne arată că traiectoria este plană.

Observăm însă că, în acest caz particular, nu are loc *teorema ariilor*. În adevăr, însemnînd viteza areolară cu:

$$\dot{\bar{\Omega}} = \frac{1}{2}(\bar{r} \times \bar{v}),$$

din (1.12) rezultă, proiectînd pe direcția lui $\bar{c}$: $2m\dot{\bar{\Omega}}\bar{c} = \bar{c}^2$ (const), deci viteza areolară este variabilă cu timpul.

Scanned with OKEN Scanner

401. **Teorema ariilor**[1]). Această teoremă are loc în trei cazuri particulare:

a) Dacă viteza relativă $\bar{w} = \bar{u} - \bar{v}$ a particulelor este coliniară cu vectorul de poziție $\bar{r}$, forța $\bar{F}$ fiind presupusă centrală. În adevăr, în acest caz ecuația (1.2′) scriindu-se:

$$m\bar{r} \times \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F} + \frac{dm}{dt}(\bar{r} \times \bar{w}) = 0, \tag{1.13}$$

rezultă teorema enunțată.

b) Dacă forța reactivă (1.3) se echilibrează cu rezultanta forțelor exterioare $\bar{F} + \bar{\Phi}_r = 0$, în fiecare moment al mișcării. În adevăr, și în acest caz din (1.11) se deduce (1.13).

c) Dacă rezultanta forței reactive $\bar{\Phi}_r$ și a forței exterioare $\bar{F}$ este o forță coliniară cu vectorul de poziție $\bar{r}$. În adevăr, se obține ecuația (1.13) prin înmulțire vectorială cu $\bar{r}$ în (1.2′).

O problemă interesantă se pune admițînd existența unei forțe centrale cu condiția ca viteza absolută a particulelor emise să fie coliniară cu viteza de antrenare: $\bar{u} = \lambda\bar{v}$.

În acest caz, teorema momentului cinetic ne dă:

$$m\frac{d}{dt}(\bar{r} \times \bar{v}) + \frac{dm}{dt}(1 - \lambda)(\bar{r} \times \bar{v}) = 0,$$

sau, punînd:

$$\bar{r} \times \bar{v} = \bar{v}_s, \text{ se obține: } \frac{d\bar{v}_s}{dt} = \varphi(t)\,\bar{v}_s, \text{ unde: } \varphi(t) = \frac{\lambda - 1}{m}\frac{dm}{dt}.$$

Traiectoria fiind plană, folosim coordonate polare în plan și obținem:

$$r^2\dot{\theta} = Ce^{\int \varphi(t)\,dt} = Ce^{\int (\lambda-1)\frac{dm}{m}},$$

unde C este o constantă de integrare și $\dot{\theta}$ unghiul polar. Teorema ariilor nu se aplică deci nici în acest caz. Această problemă este interesantă prin faptul că este pusă de balistica corpului cu masă variabilă ca o ipoteză simplificatoare: direcția forței reactive coincide cu direcția tangentei la traiectoria în cîmpul forțelor gravitaționale uniform (g = const).

402. **Teorema energiei cinetice.** Ca și în cazul masei constante, energia cinetică T se definește prin relația:

$$T = \frac{m}{2}v^2.$$

Pentru deducerea teoremei energiei cinetice scriem explicit ecuația fundamentală (1.2) și înmulțim scalar cu $\bar{v}\,dt = d\bar{r}$; se obține:

$$d\left(m\frac{v^2}{2}\right) + dm\frac{v^2}{2} = \bar{F}\,d\bar{r} + dm\,(\bar{u}\,\bar{v}), \tag{1.14}$$

[1]) v. și *E. De Caro*, „Espressione generale della velocita areolare nel moto relative di due corpi di masse variabili", Atti Acc. G. Catania, 1953.

care exprimă teorema căutată: diferenţiala energiei cinetice a punctului cu masă variabilă m, adunată cu energia cinetică a particulelor avînd viteza momentană a corpului $\bar{v}$, este egală cu lucrul mecanic elementar al forţelor exterioare adunat cu lucrul mecanic elementar al forţei reactive determinat de mişcarea absolută $(\bar{u})$ a particulelor [adică termenul $dm\,(\bar{u}\bar{v})$]. Ultimul termen dispare dacă viteza absolută $\bar{u}$ este perpendiculară pe $\bar{v}$.

În problemele lui L e v i - C i v i t a, în care avem: $\bar{u} = 0$, respectiv: $\bar{w} = \bar{u} - \bar{v} = 0$, ecuaţia (1.14) devine:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \pm \frac{v^2}{2}\,dm = \bar{F}\,d\bar{r}. \tag{1.15}$$

403. **Prima problemă a lui Ţiolkovski.** Un punct cu masă variabilă se mişcă în vid, fără forţe exterioare. Considerăm cazul emisiei care se efectuează cu viteză relativă $\bar{w}$ presupusă *constantă* în modul şi coliniară cu vectorul viteză momentană $\bar{v}$, dar de sens opus mişcării corpului emiţător. Mişcarea este rectilinie şi are ca ecuaţie:

$$m\frac{dv}{dt} = -\,w\,\frac{dm}{dt},$$

sau:

$$\frac{dv}{w} = -\frac{dm}{m}. \tag{1.16}$$

Fie $m = m_0 f(t)$ legea de variaţie a masei, astfel încît $f(0) = 1$. Integrînd ecuaţia (1.16) deducem $v = -\,w \ln f + C$. Luînd drept condiţii iniţiale $t = 0$, $v = v_0$, rezultă $C = v_0$ şi prin urmare:

$$v = v_0 + w \ln \frac{m_0}{m}, \tag{1.17}$$

formulă datorată lui Ţ i o l k o v s k i.

Fie m_s valoarea masei la sfîrşitul procesului de emisie (combustie), fie μ masa emisă a particulelor de combustibil. Atunci la sfîrşitul arderii, luînd $v_0 = 0$, corpul are viteza:

$$v_1 = w \ln \frac{m_s + \mu}{m_s} = 2{,}3\,w \log\left(1 + \frac{\mu}{m_s}\right), \tag{1.18}$$

unde raportul $\mu/m_s = Z$ poartă numele de *numărul lui Ţ i o l k o v s k i.*

În construcţiile moderne de rachete se ia $w = 2\,000$ m/s. Pe formula (1.18) se citesc cîteva concluzii importante în practică: 1) viteza punctului de masă variabilă la sfîrşitul *segmentului activ* (sfîrşitul procesului de combustie) v_1 este cu atît mai mare cu cît este mai mare viteza relativă w de emisie; 2) viteza v_1 creşte logaritmic cu raportul Z; 3) viteza la punctul final v_1 nu depinde de regimul motorului.

Consecinţă tehnică: Pentru a obţine viteze mari ale punctului de masă variabilă este mai avantajos să mărim viteza relativă w de cît să mărim pe Z; în acest scop, este necesar să se perfecţioneze motorul şi să se aleagă în mod convenabil combustibilul folosit, mărindu-se rezerva de combustibil, — ceea ce necesită uşurarea corpului rachetei şi micşorarea sarcinii sale.

Scanned with OKEN Scanner

Problema inversă. Ecuația (1.18) permite calcularea masei necesare pentru ca punctul cu masă variabilă care pornește cu viteza inițială $v_0 = 0$ să atingă o anumită viteză dată v_1, — urmînd ca apoi prin inversare cu 180° a sensului vitezei de emisie (frînare reactivă) viteza v_1 să fie anihilată în vederea aterizării.

În spațiul cosmic, unde forțele exterioare sînt neglijabile, pierderea vitezei este posibilă numai din cauza forței reactive, adică a consumului suplimentar al rezervei existente de masă.

Fie m_1 masa în momentul cînd punctul a atins viteza finală v_1; rezerva de masă μ_1 va fi dată de ecuația:

$$v_1 = w \ln \frac{m_0}{m_1} = w \ln \left(1 + \frac{\mu_1}{m_1}\right).$$

Schimbînd semnul lui w, forța reactivă va frîna mișcarea, iar viteza punctului va fi dată de relația:

$$v_2 = v_1 - w \ln \frac{m_1}{m}.$$

Fie m_2 masa punctului cînd $v_2 = 0$. Rezultă:

$$v_1 - w \ln \frac{m_1}{m_2} = v_1 - w \ln \left(1 + \frac{\mu_2}{m_2}\right) = 0,$$

unde μ_2 este rezerva necesară ca punctul să piardă complet viteza atinsă v_1. Din relațiile precedente se deduce:

$$\frac{m_0}{m_2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 = \left(1 + \frac{\mu_2}{m_2}\right)^2 = (1 + Z_1)^2, \tag{1.19}$$

unde $Z_1 = \frac{\mu_1}{m_1}$ definește viteza v_1 de pe *segmentul de antrenare (anvergură)*. Prin urmare: $m_0 = m_2 + \mu_1 + \mu_2 = m_2 + \mu$, unde μ este rezervă totală a masei pentru ca punctul să atingă viteza v_1 și apoi să o piardă complet. Dacă $Z = \frac{\mu}{m_2}$ este numărul care definește rezerva totală a masei, avem după (1.19):

$$1 + Z = (1 + Z_1)^2, \tag{1.20}$$

formulă care ne permite să determinăm numărul Z, dacă se cunoaște viteza v_1 pe care o are punctul pe segmentul de antrenare. În practică, pentru aceste calcule se construiesc tabele speciale.

404. **Problema a doua a lui Țiolkovski**[1]). Admitem că punctul cu masă variabilă se deplasează pe verticală în sus, în cîmpul uniform gravitațional ($g = \text{const}$) cu viteza inițială $\bar{v}_0$. Viteza relativă $\bar{w}$ a particulelor emise este îndreptată pe verticală în jos. Se cere să se deducă altitudinea maximă, avîndu-se dată legea de variație a masei.

[1]) Problema fundamentală a rachetei cu reacție.

Ecuația mișcării (1.2′) devine în acest caz:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \frac{dm}{dt}w,$$

sau:

$$\frac{dv}{dt} = -g - w\frac{d}{dt}\ln f(t). \tag{1.21}$$

După indicațiile tehnicii, viteza relativă trebuie considerată constantă: $w = \text{const}$. Integrînd această ecuație, se obține:

$$v = v_0 - gt - w\ln f(t) \tag{1.22}$$

și printr-o nouă cuadratură avem pentru spațiul parcurs ($z_0 = 0$):

$$z = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 - w\int_0^t \ln f(t)\,dt. \tag{1.23}$$

1. Pentru legea exponențială $f(t) = e^{-\alpha t}$ se obține:

$$z = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{\alpha}{2}wt^2. \tag{1.24}$$

2. În cazul legii liniare $f(t) = 1 - \alpha t$, deducem:

$$z = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{w}{\alpha}[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t) + \alpha t]. \tag{1.25}$$

Înălțimea maximă se obține anulînd expresia vitezei. Se obține în cazul legii exponențiale:

$$v_0 - gt + \alpha wt = 0,$$

deci:

$$t_{max} = \frac{v_0}{g - \alpha w}, \quad \text{cu } \alpha < \frac{g}{w}. \tag{1.26}$$

Pentru interpretarea condiției $\alpha < g/w$ considerăm cazul echilibrului relativ al punctului cu masă variabilă în cîmpul gravitațional. Avem:

$$-mg - w\frac{dm}{dt} = 0,$$

de unde:

$$m = m_0 e^{-\frac{g}{w}t}.$$

Deci, pentru $\alpha > g/w$ forța reactivă este mai mare ca greutatea. Din ecuația (1.24) rezultă că pentru $\alpha w < g$ punctul se deplasează într-un cîmp uniform atractiv cu accelerația $g - \alpha w$. Înălțimea maximă se obține înlocuind valoarea (1.26) în ecuația (1.24). Rezultă:

$$z_{max} = H = \frac{v_0^2}{2(g - \alpha w)}.$$

405. **Mișcarea rectilinie a punctului cu masă variabilă în cazul cînd rezistența mediului variază cu viteza.** Admitem că rezistența mediului este proporțională cu viteza: $\varkappa_1 v$, luînd ca lege de variație a masei expresia: $m = m_0(1 - \alpha t) = m_0 f(t)$.

Ecuația mișcării după (1.2') devine astfel:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}w - \varkappa_1 v,$$

sau, punînd $\varkappa_1/m_0 = \varkappa$, deducem:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\varkappa}{f}v + \frac{f'}{f}w = 0,$$

de unde integrînd, obținem:

$$v = e^{-\int \varkappa \frac{dt}{f}}\left[C - w\int \frac{f'}{f} e^{\int h\frac{dt}{f}}\,dt\right]. \tag{1.27}$$

Deci, cu $f = 1 - \alpha t$:

$$v = Cf^{\frac{\varkappa}{\alpha}} + \frac{\alpha w}{\varkappa},$$

și cu condițiile inițiale: $t = 0$, $v = v_0$, $f = 1$, rezultă $C = v_0 - \frac{\alpha w}{\varkappa}$ și obținem astfel:

$$v = \left(v_0 - \frac{\alpha w}{\varkappa}\right)(1 - \alpha t)^{\frac{\varkappa}{\alpha}} + \frac{\alpha w}{\varkappa}. \tag{1.28}$$

Printr-o nouă integrare, rezultă legea spațiului:

$$s = \frac{\alpha w}{\varkappa}t - \left(v_0 - \frac{\alpha w}{\varkappa}\right)\frac{1}{\varkappa + \alpha}(1 - \alpha t)^{1+\frac{\varkappa}{\alpha}} + C_2,$$

și cu $t = 0, s = 0$, $C_2 = \frac{1}{\varkappa + \alpha}\left(v_0 - \frac{\alpha w}{\varkappa}\right)$, obținem:

$$s = \frac{\alpha w}{\varkappa}t + \left(v_0 - \frac{\alpha w}{\varkappa}\right)\left[1 - (1 - \alpha t)^{1+\frac{\varkappa}{\alpha}}\right]\frac{1}{\varkappa + \alpha}. \tag{1.29}$$

Se poate pune problema importantă a aflării consumului optim de combustibil, α, pentru care segmentul activ este maxim. În acest caz distanța s este:

$$s = \frac{(1 - f_s)w}{\varkappa} + \frac{v_0 - \frac{\alpha w}{\varkappa}}{\varkappa + \alpha}\left(1 - f_s^{1+\frac{\varkappa}{\alpha}}\right),$$

unde, însemnînd prin m_s greutatea învelișului, punem:

$$\frac{m_s}{m_0} = f_s = 1 - \alpha t_1 = \text{const}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcția s crește monoton și s_{max} se obține pentru $\alpha = 0$, ceea ce se verifică ușor formînd derivata $\frac{ds}{d\alpha}$ și anulînd-o; obținem:

$$s_{max} = \frac{(1 - f_s)}{\varkappa} w + \frac{v_0}{\varkappa}. \tag{1.30}$$

406. **Mișcarea rectilinie a rachetei cu reacție.** Presupunem mișcarea redusă la mișcarea centrului său de greutate, în ipoteze plauzibile. Admitem că atît rezistența cît și „portanța" (forța de ascensiune) sînt proporționale cu pătratul vitezei. Ecuația mișcării în proiecție orizontală este:

$$m \frac{dv}{dt} = - Q_x - \frac{dm}{dt} w,$$

în care $Q_x = \varkappa_x v^2$ este rezistența aerului, unde $\varkappa_x$ este proporțional cu densitatea aerului. Dar în mișcarea orizontală trebuie să avem în permanență echilibru între greutate și portanță:

$$mg = P = \varkappa_y v^2,$$

unde $\varkappa_y$ este proporțional cu densitatea aerului; astfel încît punînd $\varkappa = \varkappa_y / \varkappa_x$ obținem „finețea aerodinamică", independentă de densitatea aerului. Ecuația devine:

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{mg}{\varkappa} - \frac{dm}{dt} w.$$

Admitem legea liniară a masei: $m = m_0 (1 - \alpha t)$; rezultă:

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{g}{\varkappa} + \frac{\alpha w}{1 - \alpha t}. \tag{1.31}$$

Luînd pe $w = \text{const}$, ecuația precedentă se integrează dacă vom cunoaște modul cum variază finețea aerodinamică $\varkappa$ în funcție de regimul ales. Considerații tehnice arată utilitatea discutării ecuației (1.31) pentru $\varkappa = \text{const}$. Avem, integrînd o dată cu condițiile $t = 0$, $v = v_0$:

$$v = v_0 - \frac{g}{\varkappa} t - w \ln (1 - \alpha t). \tag{1.32}$$

Printr-o nouă integrare, cu $t = 0$, $s = 0$, rezultă:

$$s = (v_0 + w) t - \frac{g}{2\varkappa} t^2 + \frac{w}{\alpha} (1 - \alpha t) \ln (1 - \alpha t). \tag{1.33}$$

Ecuația (1.33) care ne dă legea de mișcare a rachetei (centrului său de greutate) pe segmentul activ al zborului, ne poate folosi și pentru rezolvarea următoarei probleme de maximum: dîndu-se rezerva relativă a masei: $m_s / m_0 = 1 - \alpha t_1 = \text{const}$, se cere să se determine valoarea consumului relativ pe secundă, α, astfel încît distanța parcursă să fie maximă. Punînd $\tau_1 = \alpha t = 1 - m_s / m_0$, rezultă pentru timpul de parcurgere a segmentului activ de zbor $t_1 = \frac{\tau_1}{\alpha}$. Introducînd în (1.33) această valoare a lui t se obține s_a ca funcție numai de parametrul α; anume:

$$s_a = \frac{A}{\alpha} - \frac{B}{\alpha^2}, \tag{1.34}$$

unde:

$$A = \tau_1 (v_0 + w) + w (1 - \tau_1) \ln (1 - \tau_1); \quad B = \frac{g\tau_1^2}{2\varkappa}. \tag{1.35}$$

Valoarea extremă a lui α se obține din ecuația:

$$\frac{ds_a}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{2B}{\alpha} - A\right) = 0,$$

deci $\alpha = \infty$ (arderea instantanee a rezervei existente de combustibil); așadar, s_a = minimă. Maximul segmentului activ se obține pentru $\alpha = \frac{2B}{A}$, așadar, cu valorile (1.35):

$$\alpha_{opt} = \frac{\tau_1 g}{\varkappa w\left[1 + \frac{v_0}{w} - \left(1 - \frac{1}{\tau_1}\right) \ln (1 - \tau_1)\right]},$$

și cum în majoritatea cazurilor $v_0/w \ll 1$, rezultă:

$$\alpha_{opt} = \frac{\tau_1 g}{\varkappa w \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\tau_1}\right) \ln (1 - \tau_1)\right]}. \tag{1.36}$$

Din (1.36) rezultă următoarea concluzie practică. Fiind dată rezerva masei, pentru ca punctul să depășească segmentul activ este necesar ca consumul specific pe secundă să crească cu micșorarea fineței $\varkappa$ și să descrească cu creșterea vitezei relative de emisie a particulelor, — ceea ce arată importanța acestei viteze relative în problema considerată.

Creșterea lui w duce la îmbunătățirea caracteristicilor de zbor al aparatelor cu reacție. Creșterea fineței $\varkappa$ nu este însă tot așa de utilă.

407. **Mișcarea verticală în sus a punctului cu masă variabilă în cîmpul atracției gravitaționale.** Fie v_0 viteza inițială și $m = m_0 e^{-\alpha t}$ legea exponențială a masei[1]), unica forță exterioară fiind atracția newtoniană spre centrul pămîntului. Ecuația de mișcare pe axa z (verticala în sus) este:

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{k_1 m}{z^2} - \frac{dm}{dt} w. \tag{1.37}$$

Coeficientul k_1 se definește prin condiția ca la suprafața pămîntului ($z = R$) atracția să fie mg_0; așadar, $k_1 = g_0 R^2$. Înlocuind expresia masei, rezultă ($v = dz/dt$):

$$v \frac{dv}{dz} = \alpha w - \frac{g_0 R^2}{z^2},$$

care integrată cu condițiile inițiale $z = R$, $v = v_0$, ne dă:

$$v^2 = v_0^2 + 2 (z - R)\left(\alpha w - g_0 \frac{R}{z}\right). \tag{1.38}$$

[1]) Pentru variația liniară se va vedea § 408.

Ecuația (1.38) ne permite să calculăm viteza v cînd cunoaștem înălțimea. Pentru aceasta, trebuie să mai integrăm o dată, ceea ce se face mai comod pentru înălțimi mici (0,2 R) dacă precizia nu depășește 1%. Punem $z = R(1 + x)$, unde x este o variabilă foarte mică astfel încît să putem neglija în calcule pe x^3 și puterile superioare, față de unitate.

Atunci $z - R = Rz$ și:

$$\frac{R}{z} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - O(x^3),$$

$$2(z-R)\left(\alpha w - g_0 \frac{R}{z}\right) \approx 2g_0 Rx\left(\frac{\alpha w}{g_0} - 1 + x\right) = 2g_0 Rx(K - 1 + x),$$

unde K este termenul datorit forței de reacție (supraîncărcarea).

Ecuația (1.38) devine astfel:

$$v^2 = v_0^2 + 2g_0 Rx(K - 1 + x),$$

sau cum $v = R\,dx/dt$, separînd variabilele, rezultă:

$$\frac{R\,dx}{\sqrt{v_0^2 + 2g_0 Rx(K - 1 + x)}} = dt,$$

sau punînd:

$$a = \frac{v_0^2}{2g_0 R}\ ;\quad 2b = K - 1;\quad \lambda = \sqrt{\frac{2g_0}{R}},$$

avem ecuația:

$$\frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + x^2}} = \lambda\,dt,$$

ceea ce prin integrare cu condițiile inițiale $t = 0$, $x = 0$, și luînd $v_0 = 0$, ne dă:

$$x = \frac{b}{2}\ \frac{(e^{\lambda t} - 1)^2}{e^{\lambda t}}, \tag{1.39}$$

care ne dă legea de mișcare a punctului cu masă variabilă în cîmpul newtonian. Ea permite calcularea altitudinii $H = Rx$ de la suprafața pămîntului:

$$H = \frac{(K-1)R}{2} e^{-\sqrt{\frac{2g_0}{R}}t}\left(e^{\sqrt{\frac{2g_0}{R}}t} - 1\right)^2. \tag{1.40}$$

Introducînd timpul de zbor pe segmentul activ $t_1 = \varkappa/\alpha$, lungimea segmentului activ devine:

$$s_a = \frac{(\alpha w - g)R}{2g_0} e^{-\sqrt{\frac{2g_0}{R}}\frac{\varkappa}{\alpha}}\left(e^{\sqrt{\frac{2g_0}{R}}\frac{\varkappa}{\alpha}} - 1\right)^2. \tag{1.41}$$

Viteza la sfîrșitul segmentului activ se obține din (1.38):

$$v_1^2 = 2s_a\left(\alpha w - g_0\ \frac{R}{R + s_a}\right). \tag{1.42}$$

Scanned with OKEN Scanner

Mișcarea punctului pe segmentul pasiv al traiectoriei este dată de ecuația diferențială:

$$m_s v \frac{dv}{dz} = -\frac{g_0 R^2}{z^2} m_s ,$$

ceea ce prin integrare cu condițiile inițiale (de la sfîrșitul segmentului activ): $z = R + s_a$; $v = v_1$, ne dă:

$$v^2 = v_1^2 + 2g_0 R^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{R+s_a}\right). \tag{1.43}$$

Pentru a afla înălțimea totală presupunem că pentru $v = 0$ avem $z = R + s$ în ecuația (1.43); deducem astfel:

$$s = \frac{1}{\frac{1}{R+s_a} - \frac{v_1^2}{2g_0 R^2}} - R,$$

iar pentru ardere instantanee $s_a = 0$, avem:

$$s = \frac{v_1^2}{2g_0 - \frac{v_1^2}{R}}. \tag{1.44}$$

Pentru $v_1 \ll \sqrt{2g_0 R}$, (1.44) se reduce la formula mecanicii punctului cu masă constantă.

Mișcarea punctului cu masă variabilă pe segmentul activ al traiectoriei se poate studia riguros și fără a presupune pe x foarte mic.

408. **Problema evaziunii din atracția terestră**[1]). Folosirea fuzeelor a permis să se considere posibilă problema evaziunii din cîmpul gravitațional terestru, problemă care prezintă pînă acum serioase dificultăți tehnice din cauza importanței pe care o are rezistența aerului la altitudine joasă pentru viteze mari. Dar după ce a părăsit păturile sensibile ale atmosferei cu viteze relativ mici, vehiculul interplanetar se depărtează în regiunile unde rezistența aerului este neglijabilă. Se pot obține astfel accelerații foarte modeste care permit punerea problemei antrenării oamenilor în astfel de vehicule. Dar atunci, ipoteza balisticienilor — accelerația greutății constante — nu mai este valabilă.

După ce vehiculul a atins punctul de pe traiectorie, pe care o putem presupune rectilinie (cazul lansării verticale), în care ajunge la viteza de evaziune sau de gravitație, corpul poate fi orientat — prin dispozitive de telecomandă radioelectrică — pe direcția tangentei la traiectoria sa orbitală.

Fie v viteza momentană și s (socotită de la centrul pămîntului) abscisa vehiculului în momentul t; fie w viteza de evacuare a gazelor (viteza relativă) presupusă constantă; $g = \frac{K}{s^2}$ accelerația greutății, k constanta atracției newtoniene; m_0 masa totală a vehiculului la plecare, m_1 masa fără

[1]) *Robert Genty*, „Sur les problèmes de l'évasion hors de l'atraction terrestre et de la gravitation autour de la terre", C.R.Ac. Sc. Paris, 226, 1948, pp. 1 510 și 1 717.

fluid propulsiv, m_p masa fluidului propulsiv ($m_0 = m_1 + m_p$) la plecare; fie $s = R$ (raza pământului) pentru $t = 0$ și $s = s$, la $t = t_s$ (sfîrșitul combustiei); fie $\beta = \frac{m_p}{m_0}$. Neglijăm rezistența și luăm legea liniară de variație a masei pusă sub forma:

$$m = m_1 + m_p \left(1 - \frac{t}{t_s}\right).$$

Ecuația diferențială a mișcării se scrie în aceste condiții [după (2′)]:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\frac{m_p}{t_s} w}{m_1 + m_p \left(1 - \frac{t}{t_s}\right)} - g, \tag{1.45}$$

sau:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{s^2} - \frac{\frac{m_p}{t_s} w}{m_1 + m_p \frac{t_s - t}{t_s}} = 0. \tag{1.46}$$

Integrăm mai întîi ecuația (1.45), presupunînd $g = g_0 = \text{const}$ (valoarea lui g la nivelul mării), apoi calculăm termenul suplimentar ținînd seama de variația lui g cu s.

Pentru $g = g_0$, ecuația (1.45) ne dă:

$$v = -w \ln \left(1 - \frac{\beta t}{t_s}\right) - g_0 t,$$

și pentru $t = t_s$, la finele segmentului activ:

$$v_s = w \ln \frac{1}{1 - \beta} - g_0 t_s. \tag{1.47}$$

Această formulă este cunoscută și a servit tehnicienilor la tragerea cu fuzeele V_2, — ceea ce este suficient în domeniul balisticii. Dar pentru problema vehiculului interplanetar este necesară integrarea ecuației (1.46). Cum aceasta nu se poate face prin mijloace comune, ne servim de observația că masa corpului $m = m(t)$ depinzînd de timp, va depinde și de abscisă $m = m(s)$ indirect. Punem deci în (1.46): $m = f(s)$ și obținem:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{s^2} - \frac{\frac{m_p}{t_s} w}{f(s)} = 0. \tag{1.48}$$

sau, integrînd o dată:

$$v_1^2 - \frac{2k}{s} - 2 \frac{m_p}{t_s} w \int_R^s \frac{ds}{f(s)} + C_1 = 0. \tag{1.49}$$

Operînd în mod analog cu ecuația (1.45), se obține:

$$v_1'^2 + 2g_0 s - 2 \frac{m_p}{t_p} w \int_R^s \frac{ds}{f(s)} + C' = 0. \tag{1.50}$$

Scanned with OKEN Scanner

Scăzînd ecuațiile (1.48) și (1.50) rezultă:

$$v_1^2 - v_1'^2 = 2g_0 \frac{(s_1 - s)^2}{s_1}, \tag{1.51}$$

sau încă (1.47):

$$v_1^2 = \left(w \ln \frac{1}{1-\beta} - g_0 t_p\right)^2 + 2g_0 \frac{(s_1 - s_0)^2}{s_1}, \tag{1.52}$$

formulă care ține seama de variația lui g cu altitudinea.

Trebuie observat că în calculul care conduce la (1.49) și (1.50) am admis că aceeași funcție leagă pe s de t, — ceea ce poate fi considerat ca exact numai ca o primă aproximație.

Calculul cu formula (1.52) conduce la următoarele date practice. Luînd $w = 387$ cm/s, valoarea considerată ca un maximum probabil în anul 1948, deducem:

evaziune ..... $t_s = 380^s$, $\beta = 0{,}976$, ... $s_1 - s_0 = 636$ km;
gravitație ..... $t_s = 364^s$, $\beta = 0{,}943$, ... $s_1 - s_0 = 515$ km.

Accelerația γ la sfîrșitul combustiei este dată de relația:

$$\gamma = \frac{w}{t_s} \frac{\beta}{1-\beta} - g_1, \tag{1.53}$$

unde g_1 este accelerația greutății în punctul de abscisă s_1. În cazurile studiate mai sus, se obține:

evaziune ..... $\gamma = 40\,605$ cm/s², adică aproximativ 41 g;
gravitație ..... $\gamma = 16\,750$ cm/s², adică aproximativ 17 g.

Dar aceste valori — de altfel modeste — sînt inaccesibile pentru organismul omenesc care nu poate suporta decît un maximum de 10 g accelerație a greutății.

Pentru $w = 7\,000$ m/s, $\beta = 0{,}921$, obținem fără a ține seama de termenul corectiv în (1.52) $\gamma = 9{,}9\,g < 10\,g$, iar dacă se ține seama de termenul corectiv în (1.52) se obține $\gamma = 10{,}3\,g > 10\,g$ — ceea ce demonstrează necesitatea de a se ține seama de variația lui g cu altitudinea în problema vehiculării interplanetare.

409. **Mișcarea punctului cu masă variabilă în cîmp central**[1]. Se poate arăta ușor că mișcarea este plană, admițînd forța atractivă centrală newtoniană. Ecuațiile de mișcare în planul (x, y), considerînd unul dintre corpuri în originea sistemului de coordonate, se pot scrie sub forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{mx}{r^3} = 0; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{my}{r^3} = 0, \tag{1.54}$$

unde masa m este o funcție cunoscută de timp și $r^2 = x^2 + y^2$.

Studiul cazurilor de integrabilitate a sistemului (1.54) se datorește lui A. S. Lapin[2].

---

[1]) *K. Sawtchenko* „Théorie élémentaire du mouvement de deux corps ayant une masse variable" X AO, 1935, p. 128, și *Gh. Vrănceanu* (v. § 431).

[2]) *A. S. Lapin*, Univ. Leningrad, Edit. st. mat., seria XIII, 1941.

Introducem variabilele ξ,η prin relaţiile:

$$x = m^p\,\xi; \qquad y = m^p\eta; \qquad \frac{d\tau}{dt} = m^q$$

unde p şi q sînt constante arbitrare. Se obţine:

$$\frac{dx}{dt} = pm^{p-1}\frac{dm}{dt}\xi + m^{p+q}\frac{d\xi}{d\tau},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p(p-1)\,m^{p-2}\,\xi\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + pm^{p-1}\frac{d^2m}{dt^2}\xi +$$

$$+ (2p+q)\,m^{p+q-1}\frac{dm}{dt}\frac{d\xi}{d\tau} + m^{p+2q}\frac{d^2\xi}{d\tau^2},$$

şi formule analoge pentru $\frac{dy}{dt}$ şi $\frac{d^2y}{dt^2}$.

Prima ecuaţie (1.54) devine cu noile variabile:

$$m^{p+2q}\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + (2p+q)\,m^{p+q-1}\frac{dm}{dt}\frac{d\xi}{d\tau} + (p-1)\,pm^{p-2}\left(\frac{dm}{dt}\right)^2\xi +$$

$$+ pm^{p-1}\frac{d^2m}{dt^2}\xi + m^{-2p+1}\frac{\xi}{\rho^3} = 0,$$

unde $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$.

Luînd convenabil constantele p şi q, de care dispunem, putem deduce cîteva cazuri particulare de probleme mai simple.

Fie $2p+q=0$; $p+2q=-2p+1$; $p=-1$; $q=2$.

Cu aceste valori, ecuaţiile (1.54) devin:

$$\left(\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\xi}{\rho^3}\right)m^3 + \frac{\xi}{m}\left[\frac{2\left(\frac{dm}{dt}\right)^2}{m^2} - \frac{\frac{d^2m}{dt^2}}{m}\right] = 0, \tag{1.55}$$

$$\left(\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{\eta}{\rho^3}\right)m^3 + \frac{\eta}{m}\left[\frac{2\left(\frac{dm}{dt}\right)^2}{m^2} - \frac{\frac{d^2m}{dt^2}}{m}\right] = 0. \tag{1.55'}$$

Dispunem acum de posibilitatea alegerii legii de variaţie a masei spre a putea simplifica ecuaţia precedentă. Să luăm:

$$\frac{2}{m^2}\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 - \frac{1}{m}\frac{d^2m}{dt^2} = 0. \tag{1.56}$$

În acest caz, ecuaţiile (1.55) devin:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\xi}{\rho^3} = 0; \quad \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{\eta}{\rho^3} = 0. \tag{1.57}$$

Scanned with OKEN Scanner

Legea de variație a masei se află integrînd ecuația (1.56). Se obține legea lui M e s c e r s k i:

$$m = (at + b)^{-1},$$

unde a și b sînt constante de integrare.

Un alt caz interesant se obține, punînd condiția:

$$\frac{2}{m^2}\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 - \frac{1}{m}\frac{d^2m}{dt^2} = km^4 \tag{1.58}$$

unde k este o constantă; ceea ce ne dă ecuațiile:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\xi}{\rho^3} + k\xi = 0; \quad \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{\eta}{\rho^3} + k\eta = 0. \tag{1.59}$$

Integrarea acestor ecuații este făcută de M a c M i l l a n [1]).

Integrarea ecuației (1.58) ne dă legea de variație a masei. Observînd că putem scrie:

$$\frac{2}{m^2}\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 - \frac{1}{m}\frac{d^2m}{dt} = m\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{m}\right),$$

se obține ecuația:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{m}\right) = km^3,$$

și prin integrare rezultă:

$$m = \left[a\,(t+b) + \frac{k}{a}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{1.60}$$

unde a și b sînt constante de integrare.

410. **Mișcarea navei cu reacție.** Ca exemplu de aplicație a ecuației generale (1.4) pentru cazul de absorbție și emisie simultană, considerăm mișcarea unei nave C determinată de acțiunea pompei A care absoarbe apă de la pupa navei și o aruncă afară prin partea opusă (fig. 81). De fapt, mișcarea de ansamblu a navei este aceea a unui corp cu masă constantă, căci este absorbită tot atîta cantitate de apă cît este evacuată. Luăm cazul simplu al unui canal rectiliniu orizontal. Fie v_2 viteza relativă a particulelor de apă care intră în canal și v_1 viteza particulelor evacuate. Admitem că în momentul t_0 viteza este $v_0 < v_2$ și se cere să studiem mișcarea cînd v_0 crește pînă la v_2. Fie μ masa apei pompată în unitatea de timp, prin

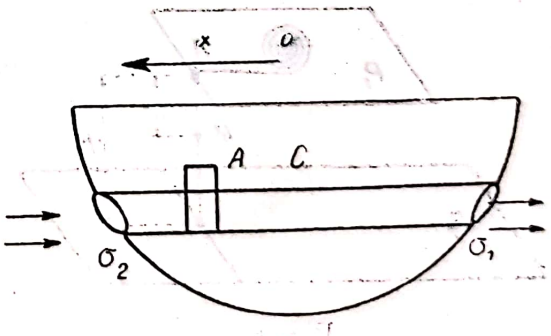

Fig. 81

[1]) *Mac Millan*, „The problem of two bodies with disminishing mass." Monthly Notice, 85, 1925.

unitatea de arie a secțiunii cînd $v = 1$; notăm cu $\sigma = \sigma_1/\sigma^1$ raportul ariilor orificiului de intrare față de ieșire. Trebuie ca $\sigma_2 \mu v_2 t = \sigma_1 \mu v_1 t$; deci

$$v_1 = \sigma v_2. \tag{1.61}$$

Admitem că rezistența apei față de mișcarea navei este proporțională cu pătratul vitezei ($\varkappa_1 v^2$). Ecuația (1.4) în care introducem rezistența, ne dă:

$$m \frac{dv}{dt} = -\varkappa_1 v^2 + \mu v_1^2 \sigma^1 - \mu v_2^2 \sigma_2,$$

sau

$$\frac{dv}{dt} = q v_2^2 - k v^2, \tag{1.62}$$

unde am pus $\varkappa = \varkappa_1/m$; $q = \mu\sigma_2 (\sigma - 1)/m$.

Masa m este constantă, reprezentînd masa navei și a apei din canal. Din ecuația (1.62) rezultă că pentru ca viteza navei să nu se micșoreze este necesar ca $q > 0$, deci $\sigma > 1$, — așadar, aria orificiului de intrare să fie mai mare decît aria la ieșire.

Integrarea ecuației (1.62) ne dă legea de variație a vitezei momentane a navei; se obține

$$v = \sqrt{\frac{c}{\varkappa}}\, v_2 \frac{1 - c_1 e^{-2\sqrt{q\varkappa} v_2 t}}{1 + c_1 e^{-2\sqrt{q\varkappa} v_2 t}},$$

unde

$$C_1 = \frac{\sqrt{q}\, v_2 - \sqrt{\varkappa}\, v_0}{\sqrt{q}\, v_2 + \sqrt{\varkappa}\, v_0}.$$

Dacă pentru $C_1 = 1$, adică $v_0 = 0$, rezultă:

$$v = \sqrt{\frac{q}{k}}\, v_2 \frac{1 - e^{-2\sqrt{q\varkappa} v_2 t}}{1 + e^{-2\sqrt{2q\varkappa} v_2 t}}, \tag{1.63}$$

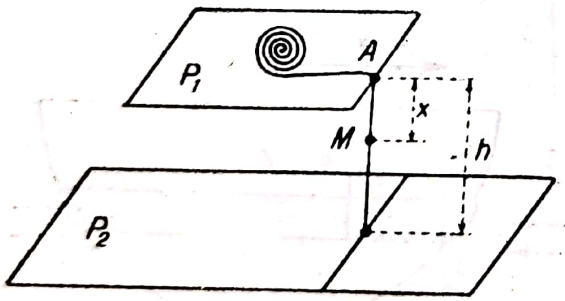

Fig. 82

în care caz, timpul necesar pentru ca viteza navei să devină v_2 este:

$$T = \frac{1}{2\sqrt{q\varkappa}\, v_2} \ln \frac{\sqrt{q} + \sqrt{k}}{\sqrt{q} - \sqrt{k}}. \tag{1.64}$$

411. Căderea firului greu[1]. Un nou exemplu de mișcare a unui corp material cu captare și evacuare de particule este căderea firului greu (fig. 82). Fie un fir omogen greu, elastic dar inextensibil, care alunecă vertical de pe planul orizontal superior P_1 pînă la planul orizontal inferior P_2, distanța $\overline{P_1P_2}$ fiind egală cu h. Neglijăm rezistențele care iau naștere prin desfășurarea firului. Partea mobilă a firului are lungimea constantă h pînă

[1]) Problema lui *A. Cayley*. „On a class of dynamical problems." Pr. R. Soc. London, 1857 p. 506.

cînd se desfăşoară tot firul, (moment t_0) pe planul P_1. Fie a lungimea porţiunii de fir aflată pe planul superior în momentul iniţial.

Desfacem mişcarea firului în două intervale ($t=0$, $t=t_0$) şi apoi de la ($t=t_0$) pînă ce tot firul este pe planul inferior.

a) *Mişcarea firului în intervalul* $t=0$ *la* $t=t_0$. Avem de studiat mişcarea unui punct M din fir care la $t=0$ se află pe marginea A a planului P_1. Fie x distanţa $\overline{AM}$ în momentul t. Luăm $a>h$. Mişcarea este determinată de ecuaţia (1.4). Trebuie să luăm pentru cîtimile care figurează în ecuaţia (1.4): $m=h=\text{const}$; $m_1=m_2=x$; $F_x=hg$; $u_2=0$; $u_{1x}=v$, mişcarea este dată de:

$$\dot{v}=g-\frac{1}{h}v^2. \tag{1.65}$$

Ecuaţia (1.65) descrie mişcarea firului pînă în momentul cînd $x=a$ dacă $a<h$; sau pînă $x=h$, dacă $a\geqslant h$. Rezultă că x este lungimea acelei porţiuni din fir care s-a deplasat pe planul P_1.

Forma ecuaţiei (1.65) corespunde la mişcare unui punct cu masă constantă $m=1$ într-un mediu rezistent proporţional cu pătratul vitezei $\left(\frac{1}{h}v^2\right)$. Integrarea ecuaţiei (1.65), prin separarea variabilelor cu condiţia iniţială $t=0$, $v=0$, ne dă:

$$v=\sqrt{gh}\,\frac{1-e^{-2\sqrt{\frac{g}{h}}t}}{1+e^{-2\sqrt{\frac{g}{h}}t}}. \tag{1.66}$$

Integrînd încă o dată ecuaţia (1.66) obţinem:

$$x=h\ln\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{h}}t}+e^{-\sqrt{\frac{g}{h}}t}\right). \tag{1.67}$$

Putem integra ecuaţia (1.65) în raport cu variabila x, scriind-o sub forma:

$$v\frac{dv}{dx}=g-\frac{1}{h}v^2, \tag{1.68}$$

de unde rezultă:

$$v=\sqrt{gh\left(1-e^{-\frac{2}{h}x}\right)}. \tag{1.68'}$$

Relaţiile (1.66, 1.67, 1.68) sînt analoge cu formulele pentru punctul greu cu masă constantă care cade într-un mediu rezistent; această observaţie ne permite să tragem următoarele concluzii: 1) viteza firului mobil într-un moment oarecare $t<t_0$ este aceeaşi cu viteza unui punct greu care cade într-un mediu rezistent cu pătratul vitezei; 2) lungimea părţii din fir care se deplasează în timpul t de pe suprafaţa superioară este egală cu înălţimea de cădere a punctului greu în mediul rezistent.

b) *Să determinăm mişcarea firului după momentul* t_0. Fie x distanţa de la extremitatea superioară a firului (care a părăsit planul P_1) pînă la planul P_1 în momentul cînd $t>t_0$. Masa firului mobil este în acest moment egală cu $h-x$. Ecuaţia mişcării devine:

$$(h-x)\ddot{x}=(h-x)g, \quad \text{sau} \quad \ddot{x}=g.$$

Deci, după momentul t_0 mișcarea firului este uniform accelerată, viteza inițială fiind v_0, dedusă din ecuația (1.66) în care punem $t = t_0$.

412. **Mișcarea rectilinie a avionului cu motor aeroreactiv.** Avem un exemplu de aplicare a ecuațiilor generale (1.4) pentru cazul de captare și evacuare simultană, în următoarele ipoteze:

a) Deplasarea prin consumarea rezervei de combustibil, a centrului de greutate a avionului față de corpul acestuia este neglijabilă.

b) Se neglijează mișcarea particulelor de aer față de corpul avionului.

c) Vitezele relative ale particulelor captate și emise vor fi considerate ca fiind coliniare cu viteza centrului de greutate al avionului.

Ecuația (1.4) proiectată pe direcția mișcării, ne dă:

$$m\frac{dv}{dt} = F - \frac{dm_1}{dt}w + \frac{dm_2}{dt}(u - v), \tag{1.69}$$

unde m este masa avionului în momentul t; w este viteza relativă a particulelor emise, pe care o considerăm constantă. Admitem de asemenea că viteza absolută u a particulelor captate este nulă. În tehnică se consideră că debitul pe secundă (captare) ca și consumul pe secundă (evacuare) sînt constante și stau în relația:

$$\left|\frac{dm_1}{dt}\right| = \beta\left|\frac{dm_2}{dt}\right|, \tag{1.70}$$

unde β este un coeficient care caracterizează variația masei din cauza produselor prin ardere; în practică, se ia $\beta = 1$.

Cu aceste ipoteze, ecuația (1.69) devine:

$$m\frac{dv}{dt} = -k_1^2 v - \frac{dm_1}{dt}\left(w - \frac{v}{\beta}\right), \tag{1.71}$$

admițînd cazul particular al forței aplicate $F = -k_1^2 v$ (care corespunde zborului orizontal într-un interval suficient de mare de viteze, chiar supersonice) $\overline{F}$ fiind forța de rezistență a aerului.

Luînd, de asemenea, legea liniară a emisiei $m_1 = m_0(1 - \alpha t)$; obținem:

$$m\frac{dv}{dt} = -k_1^2 v + \alpha m_0 w - \frac{\alpha}{\beta}m_0 v. \tag{1.72}$$

Ținînd seamă de procesele de captare și emisie, putem scrie:

$$m = m_0(1 - \alpha t) + \frac{1}{\beta}\int_0^t \left|\frac{dm_1}{dt}\right| dt = m_0(1 - \alpha t) + \frac{\alpha}{\beta}m_0 t$$

sau:

$$m = m_0(1 - \lambda t), \tag{1.73}$$

cu:

$$\lambda = \alpha\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \quad \text{și} \quad \beta > 1,$$

deoarece masa particulelor evacuate este mai mare decît masa particulelor captate. Punînd $k^2 = k_1^2/m_0$, din (1.72) rezultă:

$$(1 - \lambda t)\frac{dv}{dt} = -k^2 v + \alpha w - \frac{\alpha}{\beta} v$$

sau:

$$(1 - \lambda t)\frac{dv}{dt} = \alpha w - \sigma v,$$

unde:

$$\sigma = k^2 + \frac{\alpha}{\beta}; \tag{1.74}$$

Ecuația se integrează imediat, cu $t = 0$, $v = v_0$:

$$v = \frac{\alpha w}{\sigma} - \left(\frac{\alpha w}{\sigma} - v_0\right)(1 - \lambda t)^{\frac{\sigma}{\lambda}}. \tag{1.75}$$

După ecuația (1.75) rezultă că, pentru avionul cu motor reactiv cu aer, viteza limită este:

$$v^* = \frac{\alpha w}{\sigma} = \frac{\alpha\beta w}{\alpha + k^2\beta}, \tag{1.76}$$

întrucît $\frac{\sigma}{\lambda} \gg 1$, iar $(1 - \lambda t) < 1$. Prin urmare, începînd de la un moment dat, putem considera că $(1 - \lambda t)^{\sigma/\lambda} < \varepsilon \ll 1$. Integrînd (1.75) cu $t = 0$, $s = 0$ se obține:

$$s = \frac{\alpha w}{\sigma} t + \frac{\frac{\alpha w}{\sigma} - v_0}{\lambda\left(\frac{\sigma}{\lambda} + 1\right)}\left[(1 - \lambda t)^{1 + \frac{\sigma}{\lambda}} - 1\right]. \tag{1.77}$$

Lungimea segmentului activ este determinată de rezerva de combustibil. Dacă la extremitatea segmentului activ avem $m = m_s$, atunci:

$$1 - \alpha t_1 = \frac{m_s}{m_0},$$

deci, valoarea timpului la sfîrșitul segmentului activ este:

$$t_1 = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{m_s}{m_0}\right) = \frac{\text{const}}{\alpha}. \tag{1.78}$$

Cînd $1 - \sigma t_1$ este constantă, rezultă că lungimea segmentului activ (după 1.78) depinde de un singur parametru α, care caracterizează consumul specific al masei pe secundă.

Scanned with OKEN Scanner

METODE VARIAȚIONALE ÎN PROBLEMELE DINAMICII PUNCTULUI CU MASĂ VARIABILĂ

413. Metoda lui R. Goddard [1]. Admițînd mișcarea rectilinie în cîmpul gravitațional, cu forțe de rezistență $Q_1(v, s)$ depinzînd de viteză și distanță, ecuația diferențială a punctului cu masă variabilă ia forma:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta - Q_1(v, s) - \frac{dm}{dt}w, \tag{2.1}$$

unde θ este unghiul traiectoriei față de orizontală, w este viteza relativă constantă a particulelor emise, coliniară cu vectorul $\bar{v}$ al vitezei momentane (fig. 83). Accelerația $g = g(s)$ este în general o funcție de poziție. Pentru înălțimi mici față de raza pămîntului luăm $g \approx g_0$ (const). Funcția de variație a masei fie $m = m_0 f(t)$, cu condiția $t = 0$, $m = m_0$, $f(0) = 1$.

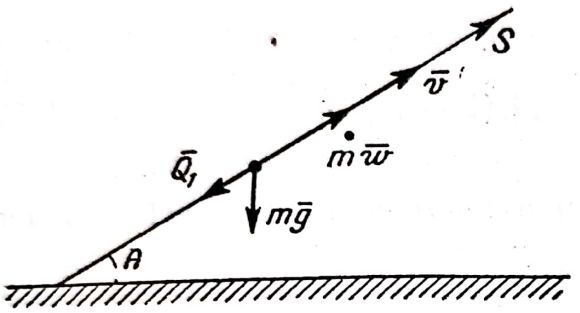

Fig. 83

La extremitatea segmentului activ, $t = t$, $m = m_s$ (masa vehiculului fără combustibil), $f(t) = f_s$. Punînd $Q_1/m_0 = Q(v,s)$, ecuația (2.1) ia forma:

$$\dot{fv} = -fg\sin\theta - Q - \dot{fw}. \tag{2.2}$$

Proprietățile caracteristice ale mișcării definite prin ecuația (2.2) depind de legea de variație a funcției $f(t)$. Integrarea ecuației (2.2) va duce la o soluție de forma:

$$v = v(t, f, \dot{f}, c_1); \quad s = s(t, f, \dot{f}, c_1, c_2), \tag{2.3}$$

unde c_1 și c_2 sînt constante arbitrare de integrare.

Expresiile (2.3) pot fi considerate drept niște ecuații funcționale pentru studiul regimurilor optime, unde unele caracteristici ale mișcării (distanța parcursă, timpul de ajungere a unei înălțimi date, lucrul mecanic al forțelor de rezistență etc.) trebuie să ia valori extreme. Avem deci o problemă de calcul variațional, — pusă în problema mișcării punctului cu masă variabilă în 1919 de Goddard: se cere să se afle minimul masei necesare pentru ca să obținem o înălțime dată. Goddard pornește de la următoarele considerații. Viteza de ascensiune trebuie să aibă o anumită valoare care să corespundă poziției respective a corpului. Este necesar deci să determinăm funcția $v = \varphi(s)$ astfel încît rezerva de masă necesară pentru ajungerea înălțmii date să fie minimă. Goddard a propus o soluție aproximativă a acestei probleme. Metoda sa constă în următoarele observații: înălțimea totală de ascensiune a punctului se împarte în n părți, luîndu-se constantă rezistența mediului pe fiecare din aceste părți; se ia g

[1] *R. Goddard*, „A method of reaching extreme altitudes" — Washington, 1919.

constant; se ia accelerația punctului mobil a tot constantă. Luîndu-se $\theta = 90°$, din (2.2) se obține:

$$\dot{fv} = -fg - Q - \dot{f}w.$$

Punînd $\dot{v} = a$ (const) se obține:

$$\dot{f} + \frac{a+g}{w} f + \frac{Q}{w} = 0,$$

o ecuație diferențială ordinară, liniară, care se integrează prin:

$$f(t) = \frac{m}{m_0} = e^{-\frac{a+g}{w}t}\left(C_1 - \frac{Q}{a+g}e^{\frac{a+g}{w}t}\right), \tag{2.4}$$

C_1 fiind o constantă de integrare, care se deduce prin condiția $t = 0$, $m = m_0 f(0) = m_0$; rezultă:

$$C_1 = 1 + \frac{Q}{a+g}.$$

Introducînd masa consumată într-un moment dat μ, avem:

$$m = m_0 - \mu; \quad f = 1 - \frac{\mu}{m_0},$$

soluția (2.4) devine:

$$\frac{\mu}{m_0} = \left(1 + \frac{Q}{a+g}\right)\left(1 - e^{-\frac{a+g}{w}t}\right), \tag{2.5}$$

care dă soluția în condițiile stabilite ($a = \text{const}$; $g = \text{const}$; $w = \text{const}$; $Q = \text{const}$). Goddard propune ca masa inițială să fie astfel aleasă încît masa finală să devină egală cu unitatea: $1 = m_0 - \mu$, ceea ce ne dă:

$$m_0 = e^{\frac{a+g}{w}t} + \frac{Q_1}{a+g}\left(e^{\frac{a+g}{w}} - 1\right); \quad Q = \frac{Q_1}{m_0} \tag{2.6}$$

și dacă $Q_1 = 0$, $g = 0$ (v. § 339):

$$m_0^* = e^{\frac{a}{w}t}. \tag{2.7}$$

Raportul:

$$\frac{m_0}{m^*} = m_0 e^{-\frac{a}{w}t} = \text{minim},$$

exprimă problema de extremum al masei în condițiile enunțate. Așadar, viteza inițială totală necesară pentru ca punctul să ajungă la înălțimea pentru care masa finală devine egală cu unitatea se obține din sumarea maselor minime m_0 obținute pentru fiecare interval. Calculul se face succesiv, precum urmează. La începutul unui interval avem o viteză de zbor

atinsă de punct pe segmentul anterior, v_0. Dacă notăm cu v_1 viteza finală de pe acest interval, avem pentru $a = \text{const}$:

$$v_1 = v_0 + at; \quad s = \frac{v_1 + v_2}{2} t.$$

Forța de rezistență Q se determină prin încercări în tunelul aerodinamic sau prin calculul teoretic.

Dînd lui t diferite valori și determinînd pe m_0/m^* pentru fiecare interval de timp dat, deducem valoarea timpului de zbor, pe intervalul dat, timp care corespunde minimului raportului maselor.

Procedeul de calcul astfel expus este însă nesatisfăcător, cu toate că metoda variațională este o idee fertilă, dezvoltată ulterior cu succes de alți autori, în special de A. Kosmodemianski.

414. **Metoda lui H. Obert**[1]). Această metodă dă una din soluțiile aproximative ale problemei de regim optim în ascensiune verticală anume pentru cazul $v \ll w$, adică viteza momentană a punctului mobil este foarte mică față de viteza relativă de evacuare a particulelor de combustibil. Asupra mobilului acționează forța de greutate mg în jos și rezistența mediului în sens contrar mișcării: $R = Q_1 + mg$ (adică tot în jos). Ecuația mișcării rectilinii se scrie:

$$m\dot{v} = -R - \dot{m}w, \tag{2.8}$$

sau, introducînd ca variabilă arcul de traiectorie s prin relația $v = \frac{dv}{ds} v$, $\left(v = \frac{ds}{dt}\right)$ ecuația (2.8) devine:

$$m\frac{dv}{ds} + \frac{R}{v} + \frac{dm}{ds} w = 0. \tag{2.9}$$

Facem ipoteza că punctul cu masă variabilă străbate la înălțimea s deasupra nivelului mării un strat subțire $ds = \text{const}$, în care putem considera densitatea aerului constantă; de asemenea, luăm constant și impulsul mdv. În aceste condiții se poate deduce legea de mișcare a punctului în ipoteza că consumul de combustibil este minim. În acest scop, derivăm ecuația (2.9) în raport cu v, sub condiția minimului de consum $dm/ds = 0$; obținem:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(m\frac{dv}{ds}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{R}{v}\right) = 0$$

sau, după ipoteza $m\,dv = \text{const}$, rezultă:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{R}{v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{mg + Q_1}{v}\right) = 0. \tag{2.10}$$

Ecuația (2.10) are un sens bine determinat. În adevăr, R este forța repulsivă care se opune mișcării, deci raportul R/v este rezistența pe unitatea de drum și de timp. Deci, viteza optimă de înălțare a punctului de masă varia-

[1]) *H. Obert*, „Die Rakete zu den Planetenräumen", 1929.

bilă se caracterizează prin faptul că numai pentru această viteză pierderile specifice provocate de forța repulsivă sînt minime.

În aerodinamică forța de rezistență se ia proporțională cu pătratul vitezei, cu densitatea aerului ρ și cu suprafața caracteristică Σ (la avion, suprafața aripii):

$$Q_1 = -\frac{1}{2}\rho\Sigma C_x v^2,$$

unde C_x este coeficientul aerodinamic de rezistență la înălțare pe direcția x (direcția mișcării) depinzînd de numărul lui Reynolds și de numărul lui Mach, în care intră calibrul, viscozitatea aerului, viteza momentană și viteza sunetului. Luînd în stratul de grosime ds pe $m = \text{const}$, din (2.10) deducem:

$$-\frac{mg}{v^2} + \frac{1}{2} C_x \rho\Sigma - \frac{1}{2}\rho\Sigma v \frac{\partial C_x}{\partial v} = 0,$$

ecuația care ne dă viteza maximă:

$$v^2 = \frac{2mg}{\rho\Sigma\left(C_x - v\frac{\partial C_x}{\partial v}\right)}, \tag{2.11}$$

sau luînd $C_x = \text{const}$ (deci Q_1 proporțională cu pătratul vitezei):

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{C_x\rho\Sigma}}.$$

Din relația (2.11) rezultă că în mediul rezistent proporțional cu pătratul vitezei avem relația de egalitate între greutatea punctului și rezistența mediului:

$$mg = \frac{1}{2} C_x \rho\Sigma v^2. \tag{2.12}$$

Prin urmare, viteza optimă a corpului cu masă variabilă m care se deplasează într-un mediu de densitate dată cu legea de rezistență pătratică în viteză, este viteza pe care trebuie s-o aibă corpul de masă m care cade liber într-un mediu omogen cu densitatea considerată ρ. Viteza de cădere liberă a corpurilor bine fuzelate este suficient de mare; ea crește o dată cu micșorarea densității — ceea ce se folosește la aprecierea regimului optim de mișcare a vehiculelor cu reacție. Din ecuațiile (2.11) și (2.12) se pot obține toate caracteristicile dinamice și cinematice prin simple cuadraturi.

Ca și metoda Goddard, metoda Obert dă o soluție aproximativă întrucît nu pune problema variațională în formularea ei riguroasă.

415. **Problema generală variațională**[1]). Se stabilește regimul optim al mișcării, care asigură găsirea drumului maxim. În cadrul mișcării rectilinii a punctului cu masă variabilă, problema variațională se pune astfel: să se afle legea de variație a masei punctului sub condiția ca drumul parcurs:

$$\int_0^s ds = \int_0^T v\,dt \tag{2.13}$$

[1]) *A. A. Kosmodemianski*, Dok. Ak. Nauk, CCCP, Tom LIII, 1946.

să fie maxim, T fiind timpul total al mișcării punctului. Pe de altă parte, această problemă variațională condiționează variația funcției v de sub integrală prin faptul că, *pe segmentul activ*, v trebuie să satisfacă ecuația diferențială a punctului cu masă variabilă:

$$f\dot{v} = -fg \sin\theta - Q(v,s) - \dot{f}w, \tag{2.14}$$

iar pe *segmentul pasiv* v trebuie să satisfacă ecuația de mișcare a punctului cu masă constantă $m_s = m_0 - \mu$ (m_0 = masă inițială, μ = masa particulelor emise în timpul t_1 de parcurgere a segmentului activ):

$$m_s\dot{v} = -m_s g \sin\theta - Q_1(v,s)$$

sau, împărțind cu $m_0 = m_s/f_s$:

$$f_s\dot{v} = -f_s g \sin\theta - Q(v,s). \tag{2.15}$$

În problema variațională de față, ecuațiile (2.14) și (2.15) constituie relațiile suplimentare de care trebuie să se țină seama în căutarea curbelor extremale pentru funcționala (2.13). Aceste ecuații sînt de fapt niște legături neolonome în problema mecanică pusă.

Metoda de găsire a funcțiilor extremale sub condiții neolonome este dată de teorema multiplicatorilor nedeterminanți ai lui L a g r a n g e. Pentru a determina funcțiile $y_i(x)$ care fac extremă integrala:

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x; y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx \tag{2.16}$$

cu condițiile suplimentare:

$$\varphi_\sigma(x; y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n') = 0 \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, s < n), \tag{2.17}$$

se formează funcțiile ajutătoare:

$$\Phi^* = \Phi + \sum_{\sigma=1}^{n} \lambda_\sigma \varphi_\sigma, \tag{2.18}$$

unde λ_σ sînt multiplicatorii lui L a g r a n g e care urmează a fi determinați. Se știe că această problemă variațională conduce la condiția că funcțiile $y(x)$ căutate, împreună cu multiplicatorii $\lambda_\sigma(x)$ — care trebuie priviți ca niște parametri funcții de x, — trebuie să satisfacă ecuațiile lui E u l e r pentru funcția (2.18) Φ^* (compară § 298):

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi^*}{\partial y_i'} - \frac{\partial \Phi^*}{\partial y_i} = 0. \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.19}$$

Avem astfel un sistem de n ecuații diferențiale (2.19) și un sistem de s ecuații de legături neolonome pentru cele n funcții $y_1, \ldots, y_n$ și cei s parametri $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ în total $n + s$ ecuații pentru $n + s$ necunoscute.

Aplicarea acestei teoreme generale la problema mișcării unui punct cu masă variabilă se face adoptîndu-se unele ipoteze care permit simplificarea calculelor. Astfel, se admite că pe toată traiectoria punctului are loc variația masei, dar pe segmentul activ consumul pe secundă are o valoare finită, iar pe segmentul pasiv, acest consum este foarte mic (neglijabil).

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta înseamnă că funcția df/dt care în problemele reale este o funcție fragmentar continuă pe intervalul $0 \leqslant t \leqslant T$, se înlocuiește printr-o funcție continuă suficient de apropiată. Vom construi o succesiune de funcții continue, obținînd astfel un șir a cărui limită să fie oricît de apropiată de funcția fragmentar continuă și de extremumul integralei (2.16). Șirul astfel obținut pentru funcția limită nu va diferi esențial de extremumul funcției fragmentare.

Din punctul de vedere al proprietăților mișcării extremale, constatăm că ecuația diferențială (2.15) nu impune condiții inadmisibile. Sectorul pasiv al traiectoriei poate avea la momentul inițial orice viteză precum și orice valoare finală pentru $f_s > 0$. În aceste condiții ecuațiile de legătură (2.15) pot fi lăsate la o parte și să se studieze extremumul integralei (2.13) numai cu satisfacerea condițiilor de legătură neolonome (2.14).

Pentru transformarea ecuației (2.14) se introduce ca variabilă independentă arcul de traiectorie s; deci:

$$\dot{f} = v \frac{df}{ds}, \quad \dot{v} = v \frac{dv}{ds}$$

ecuația devenind:

$$fv \frac{dv}{ds} + fg \sin \theta + Q(v,s) + vw \frac{df}{ds} = 0. \tag{2.20}$$

Observăm că în problema considerată limita superioară a integralei (2.13) este variabilă; va trebui să se țină seama și de termenul corespunzător variației acestei limite. Pe de altă parte, funcția ajutătoare este în cazul de față:

$$\Phi^* = 1 + \lambda \left[fv \frac{dv}{ds} + fg \sin \theta + Q(v,s) + vw \frac{df}{ds} \right]. \tag{2.21}$$

Pentru variabilele v și f, ecuațiile lui Euler devin (s fiind variabilă independentă):

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \left(\frac{dv}{ds}\right)} - \frac{\partial \Phi^*}{\partial v} = 0, \quad \frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \left(\frac{df}{ds}\right)} - \frac{\partial \Phi^*}{\partial f} = 0; \tag{2.22}$$

sau, derivînd funcția (2.21) obținem:

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial v_s'} = \lambda v f; \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial f_s'} = \lambda v w,$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial v} = \lambda (f v_s' + Q_s' + w f_s')$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial f} = \lambda (v v_s' + g \sin \theta).$$

Introducînd în ecuațiile (2.22), deducem:

$$\frac{d}{ds} (\lambda f v) - \lambda (f v_s' + Q_s + w f_s') = 0,$$

$$\frac{d}{ds} (\lambda v w) - \lambda (v v_s' + g \sin \theta) = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă ecuațiile:

$$\left.\begin{aligned} fv\frac{d\lambda}{ds}+\lambda\left(-\frac{\partial Q}{\partial v}-w\frac{df}{ds}+v\frac{df}{ds}\right)=0,\\ wv\frac{d\lambda}{ds}+\lambda\left(w\frac{dv}{ds}-v\frac{dv}{ds}-g\sin\theta\right)=0.\end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

Ecuațiile (2.23) împreună cu ecuațiile de legătură (2.20) constituie un sistem de trei ecuații diferențiale pentru cele trei funcții λ, v, f. Ele se transformă precum urmează. Înmulțim în prima ecuație (2.23) cu w și în a doua cu f și le scădem; rezultatul se împarte apoi cu fw și se pune $f_s' = \frac{\partial f}{\partial s}$; rezultă:

$$\frac{f_s'}{f}(v-w)-\frac{1}{f}\frac{\partial Q}{\partial v}=\frac{dv}{ds}\left(1-\frac{v}{w}\right)-\frac{g\sin\theta}{w}. \tag{2.24}$$

Din ecuația (2.14) avem:

$$\frac{f_s'}{f}=-\left(\frac{Q}{fvw}+\frac{g\sin\theta}{vw}+\frac{v_s'}{w}\right). \tag{2.25}$$

Introducînd valoarea (2.25) în (2.24) deducem:

$$(v-w)\frac{Q}{fvw}+\frac{1}{v}\frac{\partial Q}{\partial v}=\frac{g\sin\theta}{w},$$

sau:

$$f=\frac{1}{gw\sin\theta}\left(vQ-wQ+vw\frac{\partial Q}{\partial v}\right). \tag{2.26}$$

Luînd ca în aerodinamică $Q_1=\frac{1}{2}C_x(v)\rho\Sigma v^2$, deducem pentru (2.26),

$$f=\frac{m}{m_0}=\frac{1}{2P_0w\sin\theta\left(\frac{g}{g_0}\right)}\left[C_x\rho\Sigma v^2(v+w)+\rho\Sigma wv^3\frac{\partial C_x}{\partial v}\right]. \tag{2.27}$$

unde $P_0 = m_0g_0$.

Formula (2.27) ne arată că între masa punctului, poziția lui pe traiectorie și viteza v există o relație bine determinată, în cazul regimului optim. Dacă nu luăm în considerare variația accelerației greutății cu altitudinea, atunci $g = g_0$ și ecuația (2.27) devine:

$$fm_0=m=\frac{\rho\Sigma v^2}{2gw\sin\theta}\left[C_x(v+w)+vw\frac{\partial C_x}{\partial v}\right] \tag{2.28}$$

și pentru C_x = const:

$$m=\frac{C_x\rho\Sigma v^2}{2g\sin\theta}\left(1+\frac{v}{w}\right); \tag{2.29}$$

iar pentru mișcarea verticală:

$$mg=\frac{1}{2}C_x\rho\Sigma v^2\left(1+\frac{v}{w}\right) \tag{2.30}$$

care se reduce la ecuația (2.12) a lui O b e r t pentru $v \ll w$.

Scanned with OKEN Scanner

Se constată deci că studiul ecuațiilor lui E u l e r ne arată că dacă este cunoscută legea de rezistență a mediului atunci, pentru punctul cu masă variabilă, în regimul optim de mișcare, fiecărei înălțimi îi corespunde o viteză de zbor bine determinată care satisface ecuația (2.28).

416. **Mișcarea într-o atmosferă omogenă** ($\rho = \text{const}$)[1]. Se poate considera drept cea mai simplă problemă de calcul variațional, dacă se caută regimul optim pentru punctul cu masă variabilă în cîmpul uniform ($g = \text{const}$) al greutății. Lungimea drumului D parcurs pe traiectoria rectilinie dată, se determină prin integrala:

$$D = \int_0^{v_0} v\,dr. \tag{2.31}$$

Ecuația M e s c e r s k i pentru atmosfera omogenă, în cîmpul uniform este:

$$f\dot{v} = -fg\sin\theta - Q(v) - w\dot{f}. \tag{2.32}$$

Această ecuație se transformă luînd viteza drept variabilă independentă; în acest mod, formula (2.24) devine:

$$\left(f + w\frac{df}{dv}\right)\dot{v} = -[fg\sin\theta + Q(v)]$$

de unde:

$$dt = -\frac{f + wf_v'}{fg\sin\theta + Q(v)}\,dv. \tag{2.33}$$

În virtutea ecuației (2.33), drumul D parcurs de mobil pînă la oprire va fi dat de integrala:

$$D = \int_0^{v_0} \frac{(f + wf_v')\,v\,dv}{fg\sin\theta + Q(v)}. \tag{2.34}$$

Funcția $f(v)$ care produce extremumul integralei (2.34) va trebui să satisfacă la ecuația lui E u l e r:

$$\frac{d}{dv}\frac{\partial\Phi}{f_v'} - \frac{\partial\Phi}{\partial f} = 0, \tag{2.35}$$

unde:

$$\Phi = \frac{(f + wf_v')\,v}{fg\sin\theta + Q(v)}. \tag{2.36}$$

Înlocuind derivatele lui (2.36) în ecuația (2.35) se obține condiția de extremum:

$$\frac{w(fg\sin\theta + Q) - vw\left(f'g\sin\theta + \dfrac{\partial Q}{\partial v}\right) - [v(fg\sin\theta + Q) - gv - \sin\theta(f + wf')]}{(fg\sin\theta + Q)^2} = 0$$

[1]) *A. A. Kosmodemianski*, Dokl. Ak. Nauk, C.C.C.O.B., LIII, 1946.

Luăm $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, astfel ca $fg \sin \theta + Q \neq 0$. Relația precedentă ne dă:

$$f = \frac{(v - w) Q + vw \dfrac{\partial Q}{\partial v}}{gw \sin \theta}, \tag{2.37}$$

ecuație care coincide cu formula (2.26), fiind un caz particular al acesteia, căci am presupus $g = \text{const}$ și $Q = Q(v)$.

Cunoscînd caracteristica regimului de evacuare $f(v)$ din ecuația (2.37), o introducem în ecuația (2.33) și integrăm; avem:

$$t = \int_{v}^{v_0} \frac{f + wf'_v}{fg \sin \theta + Q(v)} v \, dv. \tag{2.38}$$

Din ecuația (2.38) deducem pe $v = v(t)$; astfel încît cele două ecuații parametrice $f = f(v)$ și $v = v(t)$ determină legea de variație a masei punctului și deci — în problema rachetei — se determină regimul optim de lucru al motorului.

417. Aplicarea metodei variaționale la problema mișcării unui punct cu masă variabilă prin captare și emisie simultană[1]). Admitem că punctul se deplasează în cîmpul uniform al greutății; fie θ unghiul traiectoriei cu orizontala; densitatea mediului este constantă iar condițiile inițiale sînt $t = t_0$ (momentul inițial), $v = v_0$. Mai admitem că:

$$\left|\frac{dm_1}{dt}\right| = \beta \left|\frac{dm_2}{dt}\right|, \tag{2.39}$$

unde β este un coeficient constant care caracterizează creșterea masei particulelor emise față de masa particulelor captate. Ecuația diferențială a mișcării are forma:

$$m \frac{dv}{dt} = - mg \sin \theta \, Q_1(v) - \frac{dm_1}{dt} v_1 - \frac{dm_2}{dt} (u_2 - v). \tag{2.40}$$

Pentru simplificare admitem că viteza absolută a particulelor captate este nulă (cazul L e v i - C i v i t a); cu această condiție ecuația (2.40) devine:

$$m \frac{dv}{dt} = - mg \sin \theta - Q_1(v) - \frac{dm_1}{dt} \left(v_1 - \frac{v}{\beta}\right). \tag{2.41}$$

Fie $m_1 = m_0 f(t)$ legea de variație a masei descrescătoare, cu $f(0) = 1$; avem:

$$m = m_0 f + \frac{1}{\beta} m_0 (1 - f) = m_0 (af + b), \tag{2.42}$$

cu valorile: $$a = 1 - \frac{1}{\beta}, \quad b = \frac{1}{\beta}.$$

Înlocuind valoarea (2.42) în ecuația (2.41), obținem:

$$(af + b) \dot{v} = - (af + b) g_1 - Q(v) - \dot{f}(v_1 - bv) \tag{2.43}$$

[1]) *A. A. Kosmodemianski*, [44].

unde:

$$Q(v) = Q_1/m_0;\ g_1 = g \sin \theta.$$

Transformînd ecuația (2.43) prin introducerea noii variabile s (elementul de arc de traiectorie) și rezolvînd în raport cu ds, obținem:

$$ds = -\frac{(af + b) + f'_v (v_1 - bv)}{(af + b) g_1 + Q(v)} v\, dv. \tag{2.44}$$

În punctul inițial al traiectoriei fie $m = m_0$, $v = v_0$, $f(0) = 1$, iar la sfîrșitul segmentului activ fie $v = v_1$, $f = f_s$. Drumul parcurs între aceste două puncte este dat de integrala:

$$s = \int_{v_1}^{v_0} \frac{af + b + f'_v (v_1 - bv)}{(af + b) g_1 + a(v)} v\, dv. \tag{2.45}$$

Această expresie fiind dată, putem pune problema variațională. Din clasa funcțiilor $f = f(v)$ să se aleagă acea funcție care să facă maximă integrala (2.45), satisfăcînd condițiile de frontieră: cînd $v = v_0$ avem $f = 1$ și cînd $v = v_1$ avem $f = f_s$. Admitem că funcția $f(v)$ satisface condițiile impuse de calculul variațional pentru cele mai simple probleme de extremum. Tehnic, ne propunem să definim un regim de variație a masei, astfel încît rezerva de masă dată $1 - f_s$ să corespundă drumului maxim s dat de integrala (2.45). Problema constă deci în căutarea extremumului integralei (2.45). Notăm:

$$H(f, f', v) = \frac{af + b + f'_v (v_1 - bv)}{(af + b) g_1 + Q(v)} v. \tag{2.46}$$

Rezultă că problema se rezolvă căutînd din familia de funcții H pe aceea care satisface ecuației lui E u l e r :

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\partial H}{\partial f'}\right) - \frac{\partial H}{\partial f} = 0. \tag{2.47}$$

Formînd derivatele care figurează în ecuația (2.47) și observînd că avem $Q + (af + b) g_1 \neq 0$, ecuația (2.47) ne dă condiția:

$$f(v) = \frac{Q[v(a + 2b) - v_1] + bg_1 (2bv - v_1) + \dfrac{\partial Q}{\partial v}(vv_1 - bv^2)}{ag_1 (v_1 - bv)}; \tag{2.48}$$

formulă care ne dă funcția $f(v)$ pentru care se realizează regimul optim de mișcare a punctului în condițiile enunțate.

Dacă cunoaștem pe $f = f(v)$, atunci ecuația (2.48) ne va da pe v ca funcție de timp. În adevăr, ecuația (2.43) poate fi scrisă:

$$(af + b)\dot{v} = -(af + b) g_1 - Q - \frac{df}{dv}\dot{v}(v_1 - bv),$$

de unde:

$$t = \int_{v}^{v_0} \frac{af + b + f'_b (v_1 - bv)}{(af + b) g_1 + Q(v)} dv, \tag{2.49}$$

Scanned with OKEN Scanner

care este o cuadratură $t = \varphi(v)$ deoarece $f(v)$ și $f'(v)$ sînt funcții raționale cunoscute. Putem deduce pe $v = v(t)$ și deci pe $f = f(t)$; așadar, aflăm consumul de masă pe secundă care asigură maximul drumului s.

418. **Asupra unei probleme de calcul variațional privind mișcarea rachetei** (G. H a m e l, 1936). Dacă se lansează în mișcarea verticală în sus, un corp rigid de masă momentană m, sub acțiunea greutății, cu rezistența mediului $Q(s, v)$, mișcarea fiind comandată de un dispozitiv cu reacție (prin particule materiale de combustibil care părăsesc corpul) obținem ecuația de mișcare cunoscută:

$$m\frac{dv}{dt} + mg + Q(s,v) + w\frac{dm}{dt} = 0, \tag{2.50}$$

unde s este drumul, t timpul, $v = \dot{s}$, $w = u - v$ viteza relativă a gazelor evacuate. Admitem următoarele simplificări: 1) întrucît se au în vedere înălțimi de 100...200 km, se presupune $g = \text{const}$; 2) se neglijează variația impulsului în interiorul rachetei; 3) în Q se neglijează influența variabilității masei; 4) se face abstracția de rotația pămîntului. Fie m_s masa finală și m_0 masa inițială. Ni se dă m_s, înălțimea care trebuie atinsă, viteza inițială v_0 în momentul t_0 și $s_0 = 0$; constanta vitezei de scurgere w. Problema care se pune este: care este valoarea minimă a masei inițiale m_0 pentru o altitudine sau o distanță dată? O astfel de problemă a fost rezolvată de G o d d a r d și O b e r t prin metode aproximative, — G. H a m e l și-a propus s-o rezolve prin metodele riguroase ale calculului variațional.

Ecuația (2.50) poate fi privită ca o ecuație diferențială liniară în m și trebuie integrată pînă la valoarea finală a segmentului activ ($t = t_s$), cu condițiile $t = 0$, $m = m_0$, $v = v_0$, $s = s_0 = 0$, $t = t_s$, $m = m_s$. În acest scop, scriem ecuația (2.50) sub forma:

$$\frac{dm}{dt} + \frac{1}{w}\left(g + \frac{dv}{dt}\right)m = -\frac{Q(s,v)}{w}$$

și integrăm:

$$m = e^{-\int_0^{t_s}\frac{1}{w}(g+v)\,dt}\left[C - \int_0^{t_s} e^{\int_0^{t_s}\frac{1}{w}(g+v)\,dt}\frac{Q(s,v)}{w}\,dt\right].$$

Dar cum pentru $t = 0$, avem $C = m_0$, rezultă:

$$m_0 = e^{-\frac{v_0}{w}}\int_0^{t_s}\frac{Q(s,v)}{w}\,e^{\frac{v}{w}+\frac{gt}{w}}\,dt + m_s e^{-\frac{v_0}{w}+\frac{v_s}{w}+\frac{gt_s}{w}} \tag{2.51}$$

unde t_s, v_s, s_s, sînt valorile finale la sfîrșitul segmentului activ la care începe ridicarea liberă. Luînd $v_0 = 0$, ceea ce se face în cazul rachetei, în general — problema matematică nu mai prezintă aspectul unei probleme propriu-zise de minimum, ci se poate deduce numai o limită inferioară de care ne putem

apropia oricît vrem, căci la început v crește foarte repede. Avem astfel, totuși, o problemă de minimum, de forma:

$$m_0 = \int_0^{t_s} \Phi(v, s, t)\, dt + F(v_s, t_s) = \text{minimum}, \tag{2.52}$$

unde am pus:

$$\Phi(v, s, t) = \frac{1}{w} Q(s, v)\, e^{\frac{v}{w} + \frac{gt}{w}}; \qquad F(v_s, t_s) = e^{\frac{v_s}{w} + \frac{gt_s}{w}}, \tag{2.53}$$

ceea ce constituie o relație între v_s și s_s (sfîrșitul segmentului activ).

La terminarea combustibilului, $m = m_s$, racheta se va mai urca în virtutea energiei cinetice existente — după legea:

$$m_s \frac{dv}{dt} + Q(s, v) + m_s g = 0, \tag{2.54}$$

relație de forma: $\Phi + \frac{dF}{dt} = 0$, ceea ce se obține derivînd (2.52). Ecuația (2.54) se mai poate scrie:

$$m_s \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} + Q(s, v) + m_s g = 0,$$

sau:

$$v \frac{dv}{ds} = \Phi_1(v, s), \tag{2.55}$$

unde:

$$-\Phi_1 = \frac{Q(s, v)}{m_s} + g,$$

ceea ce se integrează cu condiția $s = h$, $v = 0$, $(h \gg 1;\ Q \ll 1)$:

$$\left(\frac{1}{2} v^2\right)_{s=h} - \left(\frac{1}{2} v^2\right)_s = -g(h - s),$$

deci:

$$v = \psi(s) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } s = h, \\ \sqrt{2g(h - s)} \text{ pentru } s \neq h. \end{cases} \tag{2.56}$$

La acest rezultat ar trebui adăugată condiția de frontieră $(t = t_s)$:

$$v_s = \psi(s_s). \tag{2.57}$$

Cu această valoare, termenul liber ia forma $F\{\psi(s_s), t_s\}$. Se face însă abstracție de condiția de frontieră, luîndu-se s_s și t_s ficși, pentru a se evita dificultățile analitice. Problema se pune deci pentru integrala (2.51), avînd s_s și t_s constanți.

Ecuația lui E u l e r este, în problema de față:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 \tag{2.58}$$

cu condiția $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} > 0$. În aceste condiții, integrala ne oferă un minim puternic.

Dificultățile încep cînd luăm s_s, t_s respectiv, s_s, v_s variabili.

CONSIDERAȚII ASUPRA CORPULUI CU MASĂ VARIABILĂ

419. Noțiuni fundamentale. Ca și în cazul *punctului* material, în dinamica *corpului* cu masă variabilă se folosesc evident aceleași principii, noțiuni și mărimi dinamice ca și în mecanica corpului cu masă constantă. Admitem că atît particulele captate cît și cele emise ajung sau părăsesc corpul numai dintr-o parte oarecare a suprafeței corpului. Particulele care nu se mișcă relativ cu corpul (vitezele relative față de corp nule) se consideră că aparțin corpului. Forțele de reacțiune își fac apariția numai în momentul acțiunii directe, prin contactul dintre particule și corp; mișcarea maselor interioare care aparțin corpului nu este luată în considerare.

Trecerea de la punctul material la corpul material se face prin intermediul sistemului de puncte materiale, iar procedeul matematic constă în sumarea asupra diverselor mărimi parțiale, sumare extinsă numai asupra acelor puncte ale corpului cu masă variabilă care nu au viteză relativă față de corp[1]). Prin aceasta, nu se ține seama în scrierea ecuației de mișcare de istoricul mișcării anterioare a particulelor pînă într-un moment dat t.

Pentru concretizarea expunerii, vom considera în amănunte cazul emisiei, care se prezintă mai des în tehnica vehiculelor cu reacție (fig. 84). Fie m_s masa unei particule (punct material) ce aparține corpului într-un moment dat t, deci care nu are viteză relativă față de corp. Fie v_s viteza absolută a unei particule față de sistemul fix O_0XYZ din spațiu — sistemul mobil $Oxyz$ fiind legat de corp, cu originea în punctul O. Definim mărimile cinetice:

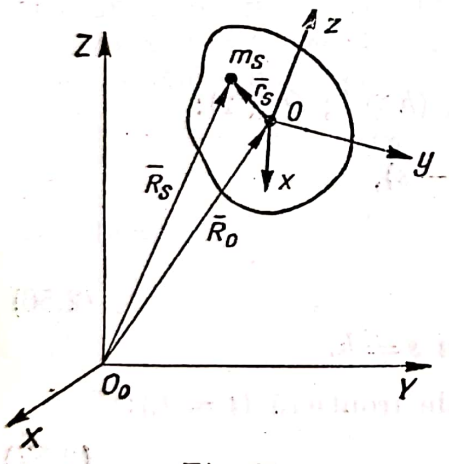

Fig. 84

Impulsul total: $\bar{P} = \sum \bar{p}_s = \sum_{s=1}^{n} m_s \bar{v}_s.$

Momentul cinetic total: $\bar{K} = \sum_{s=1}^{n} (\bar{r}_s \times m_s \bar{v}_s).$ (3.1)

Energia cinetică: $T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_s v_s^2.$

Vectorul de poziție al centrului de greutate:

$$\bar{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^{n} m_s \bar{r}_s, \quad \text{cu} \quad M = \sum m_s.$$

Prin emisia particulelor, poziția centrului de greutate variază în raport cu particulele care constituie corpul; de aceea am ales și sistemul de coordonate legat solidar de corp $Oxyz$. Avem astfel, cu notațiile evidente de pe figură (fig. 84):

$$\bar{R}_s = \bar{R}_0 + \bar{r}_s; \quad \bar{v}_s = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_s; \quad m\bar{r}_c = \sum m_s \bar{r}_s, \tag{3.2}$$

---

[1]) v. de asemenea, *V. Vâlcovici*, „Sur les équations du mouvement d'un solide de masse variable" C. R. Paris, 228, 1949, p. 52 și „Asupra mișcării corpului cu masă variabilă, în special, a rachetei", Bul. șt. Ac. R.P.R. I, 1949, p. 573.

unde $\bar{v}_0$ este viteza de translație, iar $\bar{\omega}$ viteza momentană de rotație. Accelerația absolută devine:

$$\bar{a}_s = \bar{a}_0 + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_s) + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_s, \tag{3.3}$$

unde $\dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}$ este accelerația unghiulară; iar accelerația centripetă este dată de:

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_s) = -\omega^2 \bar{\rho}_s,$$

unde ρ_s este distanța punctului m_s la axa $\bar{\omega}$. Avem astfel pentru (3.3):

$$\bar{a}_s = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_s - \omega^2 \bar{\rho}_s. \tag{3.4}$$

Fie $\bar{u}_s$ viteza absolută a particulelor emise; atunci:

$$\bar{u}_s = \bar{v}_s + \bar{w}_s$$

unde $\bar{w}_s$ este viteza relativă a particulelor emise.

Viteza punctului din triedrul mobil care coincide cu centrul de greutate într-un moment dat, adică viteza de transport este:

$$\bar{v}_c(t) = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_c. \tag{3.5}$$

Notînd cu $\bar{q}_c$ viteza relativă a centrului de greutate față de sistemul $Oxyz$ legat de corp, viteza absolută a centrului de greutate devine:

$$\bar{v}_c = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_c + \bar{q}_c. \tag{3.6}$$

Pentru corpul cu masă constantă $\bar{q}_c = 0$. Deplasarea relativă a centrului de greutate depinde de variația masei corpului.

420. **Teorema impulsului.** Înlocuim în prima relație (3.1) expresia lui $\bar{v}_s$ din (3.2). Punînd $m\bar{r}_c = \sum m_s \bar{r}_s$, se obține după (3.5):

$$\bar{P} = m(\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_c) = m\bar{v}_c^{(t)}. \tag{3.7}$$

Deci, impulsul corpului cu masă variabilă este egal cu impulsul punctului din spațiul mobil care coincide în momentul dat cu centrul de greutate. Relația (3.7), ținînd seama de (3.6), se mai poate scrie sub forma:

$$\bar{P} = m\bar{v}_c - \bar{q}_c.$$

Pentru a scrie teorema cantității de mișcare să considerăm ecuația:

$$\frac{d}{dt}(m_s \bar{v}_s) = \bar{F}_s + \bar{F}_s^{(i)} + \frac{dm_k}{dt}\bar{u}_s, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

unde $\bar{F}_s^{(i)}$ sînt forțele interioare; $\bar{F}_s$ rezultanta forțelor exterioare și $\bar{u}_s$ viteza absolută a punctului de masă m_s.

Prin sumare, ținînd seama de a treia lege a lui Newton $\left(\sum \bar{F}_s^{(i)} = 0\right)$, rezultă:

$$\dot{\bar{P}} = \bar{F} + \sum_{k=1}^{n} \dot{m}_s \bar{u}_s. \tag{3.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare: derivata impulsului în raport cu timpul este egală cu rezultanta forțelor exterioare care solicită masele corpului adunate cu impulsul total al particulelor emise în unitatea de timp. Aceasta constituie generalizarea imediată a ecuației fundamentale a punctului material, — între particule neexistînd interacțiune.

421. **Teorema centrului de greutate.** Scriem ecuația fiecărui punct m_s de masă variabilă sub forma:

$$m_s\bar{a}_s = \bar{F}_s + \bar{F}_s^{(i)} + \bar{\Phi}_{r,s}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad (3.9)$$

unde $\bar{F}_s$ este rezultanta forțelor aplicate, $\bar{F}_s^{(i)}$ rezultanta forțelor interioare cu proprietatea $\sum_{s=1}^{n} \bar{F}_s^{(i)} = 0$, $\bar{\Phi}_{r,s}$ rezultanta forțelor reactive și $\bar{a}_s = \ddot{\bar{r}}_s = \dot{\bar{v}}_s$.

Înlocuim pentru accelerația $\bar{a}_s$ expresia (3.4) și sumăm pe toate particulele sistemului; se obține:

$$\sum m_s\bar{a}_s = m\left(\bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_c - \omega^2\bar{\rho}_c\right) = m\bar{a}_c^{(t)}, \quad (3.10)$$

însemnînd prin $\bar{a}_c^{(t)}$ accelerația punctului din triedrul mobil care coincide în momentul considerat cu centrul de greutate al sistemului (accelerația de transport). Cu valoarea (3.10) ecuația (3.9) devine, după sumare:

$$m\bar{a}_c^{(t)} = \bar{F} + \bar{\Phi}_r, \quad (3.11)$$

unde am pus $\bar{F} = \sum \bar{F}_s$; $\bar{\Phi}_r = \sum \bar{\Phi}_{r,s}$. Ecuația (3.11) exprimă legea de mișcare a centrului de greutate pentru corpul cu masă variabilă. Această formulare ține seama de faptul că centrul de greutate își schimbă poziția față de triedrul mobil din cauza variației masei corpului. Ecuația de mișcare a centrului de greutate, în mișcare absolută, se obține introducînd accelerația absolută prin formula:

$$\bar{a}_c^{(a)} = \bar{a}_c^{(t)} + \bar{a}_c^{(r)} + 2\bar{\omega} \times \bar{q}_c$$

unde $\bar{a}_c^{(r)}$ este accelerația relativă a centrului de greutate. În aceste condiții, ecuația (3.11) devine:

$$m\bar{a}_c^{(a)} = \bar{F} + \bar{\Phi}_r + m\bar{a}_c^{(r)} + 2m\left(\bar{\omega} \times \bar{q}_c\right); \quad (3.12)$$

așadar, centrul de greutate al corpului cu masă variabilă se deplasează ca un punct avînd ca masă întreaga masă a corpului într-un moment dat, asupra căruia acționează următoarele forțe: rezultanta forțelor exterioare $(\bar{F})$, rezultanta forțelor reactive $(\bar{\Phi}_r)$, rezultanta forțelor inerțiale condiționate de accelerația relativă, precum și forța lui C o r i o l i s a centrului de greutate.

422. **Momentul cinetic pentru corpul cu masă variabilă**[1]). Momentul cinetic se definește atît în raport cu axele fixe O_0XYZ cît și în raport cu axele

[1]) *E. K. Chapin*, „Problems involving variable mass", Am. J. Phys., 19, 1951, p. 6.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
IAȘI

legate de corp (mobile) $Oxyz$, prin intermediul unui sistem suplimentar cu originea tot în O (ca și sistemul mobil) dar cu axele paralele cu ale sistemului fix și având o mișcare de translație rămînînd mereu paralele cu axele fixe ($OX'Y'Z'$) (fig. 85).

Momentul cinetic al corpului cu masă variabilă în raport cu sistemul fix (momentul cinetic absolut) se definește prin expresia:

$$\overline{K}_a = \sum_{s=1}^{n} (\overline{R}_s \times m_s \overline{v}_s), \qquad (3.13)$$

unde $\overline{R}_s$ este vectorul de poziție al punctului m_s față de originea sistemului fix, iar $\overline{v}_s$ este viteza absolută a aceluiași punct. Presupunem că originea mobilă O nu coincide cu centrul de greutate al corpului.

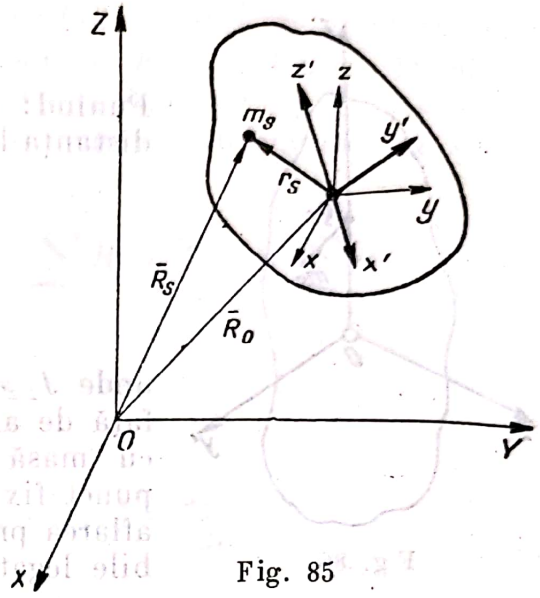

Fig. 85

Folosind relațiile (3.2) și $m = \sum m_s$, obținem prin transformări simple:

$$\overline{K}_a = \overline{K}_0 + \overline{R}_0 \times m\overline{v}_0 + \overline{r}_c \times m\overline{v}_0 + \overline{R}_0 \times m(\overline{\omega} \times \overline{r}_c), \qquad (3.14)$$

în care:

$$\overline{K}_0 = \sum (\overline{r}_s \times m_s \overline{v}_{s,0}), \qquad (3.15)$$

unde $\overline{v}_{s,0} = \overline{\omega} \times \overline{r}_s$ este viteza punctului m_s față de sistemul suplimentar $Ox'y'z'$, iar K_0 este momentul cinetic al corpului față de același sistem suplimentar $Ox'y'z'$.

Formula (3.14) se mai poate transforma folosind viteza de transport (3.5); se obține:

$$\overline{K}_a = \overline{K}_0 + \overline{R}_0 \times m\overline{v}_c^{(t)} + \overline{r}_c \times m\overline{v}_0. \qquad (3.16)$$

Deci, momentul cinetic al corpului cu masă variabilă față de axele fixe (momentul cinetic absolut) este egal cu momentul cinetic față de sistemul suplimentar $Ox'y'z'$, $(\overline{K}_0)$, adunat cu momentul cinetic al centrului de greutate în mișcarea lui de transport, având concentrată toată masa în acest punct și adunat cu momentul cinetic în mișcarea de translație, având toată masa concentrată în originea sistemului mobil $(m\overline{v}_0)$. În cazul particular în care originea sistemului mobil coincide cu centrul de greutate, avem $\overline{r}_c = 0$ și deci:

$$\overline{K}_a = \overline{K}_c + \overline{R}_c \times m\overline{v}_c^t, \qquad (3.17)$$

așadar, în acest caz particular, momentul cinetic absolut este egal cu momentul cinetic față de sistemul suplimentar, adunat cu momentul cinetic al centrului de greutate în mișcarea lui de translație, având concentrată în el toată masa corpului.

Scanned with OKEN Scanner

423. **Mişcarea unui rigid în jurul unei axe fixe.** În problema rotaţiei corpului în jurul unei axe fixe Oz', cu viteza unghiulară momentană $\overline{\omega}$, se deduce uşor proiecţia momentului cinetic $\overline{K}_a$ pe această axă $(\overline{\omega}\overline{K}_a)$ (fig. 86); se obţine:

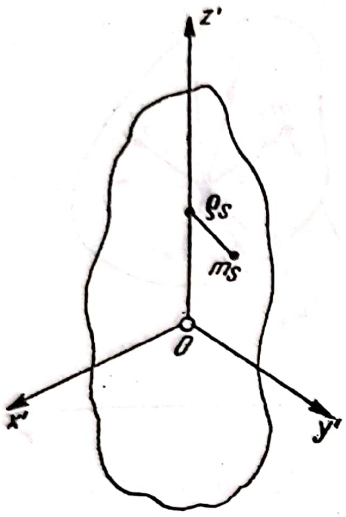

Fig. 86

$$K_{a,z'} = \sum_{s=1}^{n} m_s (x_s \dot{y}_s - y_s \dot{x}_s).$$

Punînd: $x_s = \rho_s \cos\varphi$; $y_s = \rho_s \sin\varphi$, unde ρ_s este distanţa lui m_s la Oz', se obţine:

$$x_s \dot{y}_s = -\, y_s \dot{x}_s = \rho_s^2 \omega \text{ şi deci:}$$

$$K_{a,z'} = \omega \sum m_s \rho_s^2 = J_{z'z'}\, \omega, \qquad (3.18)$$

unde $J_{z'z'}$ este componenta momentului de inerţie faţă de axa de rotaţie. În cazul unui corp greu, cu masă variabilă, care se mişcă în jurul unui punct fix, se poate aplica metoda E u l e r pentru aflarea proiecţiei momentului cinetic pe axele mobile legate invariabil de corp.

Viteza absolută într-o astfel de mişcare se reduce la $\overline{\omega} \times \overline{R}_s$ astfel încît, după (3.13):

$$\overline{K}_0 = \sum_{s=1}^{n} \overline{R}_s \times m_s (\overline{\omega} \times \overline{R}_s),$$

sau:
$$\overline{K}_0 = \sum m_s R_s^2\, \overline{\omega} - \sum m_s (\overline{\omega}\overline{R}_s)\, \overline{R}_s. \qquad (3.19)$$

Punînd ω_x, ω_y, ω_z, proiecţiile lui $\overline{\omega}$ pe axele mobile, şi notînd cu

$$J_{xx} = \sum m_s (y_s^2 + z_s^2), \qquad J_{xz} = -\sum m_s x_s z_s,$$
$$J_{yy} = \sum m_s (z_s^2 + x_s^2), \qquad J_{yx} = -\sum m_s x_s y_s, \qquad (3.20)$$
$$J_{zz} = \sum m_s (x_s^2 + y_s^2), \qquad J_{yz} = -\sum m_s y_s z_s,$$

putem scrie ca şi în cazul corpului cu masă constantă:

$$K_{0x} = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z$$
$$K_{0y} = J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z \qquad (3.21)$$
$$K_{0z} = J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z$$

cu deosebirea că în cazul de faţă componentele J_{rs} ale momentului de inerţie sînt — ca şi masa — funcţii de timp.

Scanned with OKEN Scanner

424. **Teorema momentului cinetic față de axele fixe.** Ecuația mișcării pentru un punct oarecare m_s al sistemului, în cazul emisiei este:

$$\frac{d}{dt}(m_s\bar{v}_s) = \overline{F}_{s,e} + \overline{F}_{s,i} + \frac{dm_s}{dt}\bar{u}_s, \tag{3.22}$$

unde $\bar{u}_s$ este viteza absolută a particulelor (a centrului de greutate) emise, $\overline{F}_{s,e}$ rezultanta forțelor aplicate exterioare și $\overline{F}_{s,i}$ rezultanta forțelor interioare. Înmulțim în ecuația (3.22) la stînga vectorial cu $\overline{R}_s$, vectorul de poziție al punctului de masă m_s față de originea sistemului fix O_0XYZ; obținem:

$$\sum_s \overline{R}_s \times \frac{d}{dt}(m_s\bar{v}_s) = \sum_s \overline{R}_s \times \overline{F}_{s,e} + \sum \overline{R}_s \times \overline{F}_{s,i} + \sum_s \overline{R}_s \times \frac{dm_s}{dt}\bar{u}_s,$$

dar cum avem: $\sum_s \overline{R}_s \times \overline{F}_{s,i} = 0$ și de asemenea:

$$\overline{R}_s \times \frac{d}{dt}(m_s\bar{v}_s) = \frac{d}{dt}(\overline{R}_s \times m_s\bar{v}_s) = \frac{d\overline{K}_a}{dt},$$

rezultă teorema momentului cinetic (absolut):

$$\frac{d\overline{K}_a}{dt} = \overline{M}_e + \sum \overline{R}_s \times \frac{dm_s}{dt}\bar{u}_s, \tag{3.23}$$

unde $\overline{M}_e = \sum \overline{R}_s \times \overline{F}_{e,s}$ este momentul rezultant al forțelor exterioare. Prin urmare, derivata în raport cu timpul al momentului cinetic față de axele fixe este egală cu momentul rezultant al forțelor exterioare care solicită corpul, adunate cu momentul cinetic rezultant al particulelor emise de corp în unitatea de timp.

Dacă este necesar să se pună în evidență și forțele reactive, atunci ecuația (3.23) ia o formă puțin schimbată. În adevăr, punînd:

$$\bar{u}_s = \bar{v}_s + \bar{w}_s\ ; \qquad \overline{R}_s \times \frac{dm_s}{dt}\bar{w}_s = \overline{M}_r,$$

ecuația (3.23) devine:

$$\frac{d\overline{K}_a}{dt} = \overline{M}_e + \overline{M}_r + \sum \overline{R}_s \times \frac{dm_s}{dt}\bar{v}_s. \tag{3.24}$$

425. **Rotația unui rigid cu masă variabilă în jurul unei axe fixe.** Luăm această axă ca axă Z; viteza unghiulară fiind $\bar{\omega}$. Cum $\bar{v}_s = \bar{\omega} \times \bar{r}_s$ ecuația (3.24) proiectată pe axa OZ ia forma:

$$\frac{dK_{a,Z}}{dt} = M_{e,Z} + M_{r,Z} + \omega \sum \frac{dm_s}{dt}\rho_s^2, \tag{3.25}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde ρ_s este distanța punctului m_s pînă la axa fixă de rotație. Dar după (3.18):

$$K_{a,z} = J_{zz}\omega, \quad \text{şi} \quad \sum \frac{dm_s}{dt}\rho_s^2 = \frac{dJ_{zz}}{dt};$$

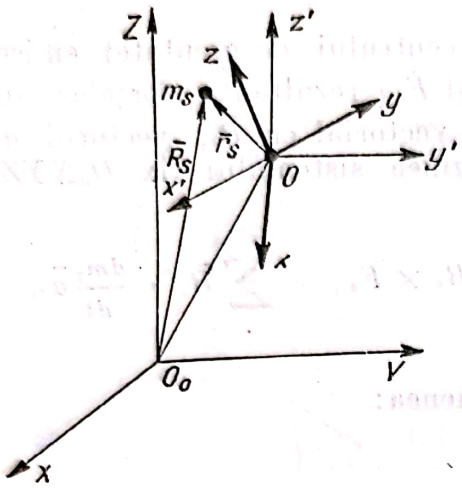

Fig. 87

în aceste condiții (3.25) devine:

$$\frac{d}{dt}(J_{zz}\omega) = M_{e,z} + M_{r,z} + \omega\frac{dJ_{zz}}{dt}$$

sau, în definitiv:

$$J_{zz}\dot{\omega} = M_{e,z} + M_{r,z}. \qquad (3.26)$$

426. **Teorema momentului cinetic față de axele mobile**[1]). Fie O_0XYZ sistemul fix și $Ox'y'z'$ sistemul suplimentar mobil cu axele paralele cu ale sistemului fix (fig. 87).

Avem:

$$\bar{R}_s = \bar{R}_0 + \bar{r}_s; \quad \bar{v}_s = \bar{v}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r}_s; \quad \dot{\bar{v}}_c = \bar{a}_c + \bar{\omega}\times\frac{\partial\bar{r}_c}{\partial t},$$

$$\dot{\bar{r}}_c = \frac{\partial r_c}{\partial t} + \bar{\omega}\times\bar{r}_c,$$

unde prin indicele c se notează mărimile respective relative la centrul de greutate. Avem, de asemenea:

$$\sum\frac{dm_s}{dt}(\bar{\omega}\times\bar{r}_s) = \bar{\omega}\times\sum\frac{dm_s}{dt}\bar{r}_s = \omega\times\left(m\frac{\partial r_c}{\partial t} + \frac{dm}{dt}\bar{r}_c\right)$$

și derivînd ecuația care dă momentul cinetic absolut (3.14), găsim:

$$\frac{d\bar{K}_a}{dt} = \frac{d\bar{K}_0}{dt} + \bar{v}_0\times m\,\bar{v}_c + \bar{R}_0\times m\left(\bar{a}_c + \bar{\omega}\times\frac{\partial\bar{r}_c}{\partial t}\right) + \frac{\partial\bar{r}_c}{\partial t}\times m\bar{v}_0 +$$

$$+ \bar{r}_c\times\frac{dm}{dt}\bar{v}_0 + \bar{r}_c\times m\,\bar{a}_0.$$

Pe de altă parte, pentru membrul al doilea al ecuației (3.24) putem scrie:

$$\bar{M}_e = \sum\bar{R}_s\times\bar{F}_s = \bar{R}_0\times\bar{F}_e + \bar{M}_{e,0},$$
$$\bar{M}_r = \sum\bar{R}_s\times\bar{\Phi}_{r,s} = \bar{R}_0\times\bar{\Phi}_r + \bar{M}_{r,0},$$

[1]) *C. Agostinelli*, „Sui sistemi dinamici di masse variabile"; Atti. Ac. SC. Torino, 1935, p. 354.

unde am notat cu: $\bar{F}_e = \sum \bar{F}_s$ și de asemenea:

$$\sum \bar{R}_s \times \frac{dm_s}{dt}\bar{v}_s = \bar{R}_0 \times \frac{dm}{dt}\bar{v}_0 + \bar{R}_0 \times m\left(\bar{\omega} \times \frac{\partial \bar{r}_c}{\partial t}\right) + \bar{R}_0 \times \frac{dm}{dt}\left(\bar{\omega} \times \bar{r}_c\right) +$$

$$+ \left(m\frac{\partial \bar{r}_c}{\partial t} + \frac{dm}{dt}\bar{r}_c\right) \times v_0 + \sum \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial t} \times \frac{dm_s}{dt}\left(\bar{\omega} \times \bar{r}_s\right).$$

Introducînd relațiile precedente în ecuația (3.24), se obține:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} + \bar{R}_0 \times m\bar{a}_c + \bar{r}_c \times m\bar{a}_0 = \bar{R}_0 \times \bar{F}_e + \bar{R}_0 \times \bar{\Phi}_r + \bar{M}_{0,e} + \bar{M}_{0,r} +$$

$$+ \sum \bar{r}_s \times \frac{dm_s}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}_s). \tag{3.27}$$

Pe de altă parte, ecuația de mișcare a centrului de greutate:

$$m\bar{a}_c = \bar{F}_e + \bar{\Phi}_r ,$$

multiplicată vectorial cu $\bar{R}_0$, ne dă:

$$\bar{R}_0 \times m\bar{a}_c = \bar{R}_0 \times \bar{F}_e + \bar{R}_0 \times \bar{\Phi}_r ,$$

relație de care, ținînd seamă, expresia (3.27) devine:

$$\frac{dK_0}{dt} = \bar{M}_{0,e} + \bar{M}_{0,r} + \sum \bar{r}_s \times \frac{dm_s}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}_s) - \bar{r}_c \times m\bar{a}_0 , \tag{3.28}$$

care ne dă expresia teoremei momentului cinetic relativ față de punctul O, centrul sistemului legat de corp.

Dacă O coincide cu centrul de greutate $r_c = 0$, ecuația (3.28) devine:

$$\frac{d\bar{K}_c}{dt} = \bar{M}_{c,e} + \bar{M}_{c,r} + \sum r_s \times \frac{dm_s}{dt}\bar{v}_{0,s} \tag{3.29}$$

unde am pus: $\bar{v}_{0,s} = \bar{\omega} \times \bar{r}_s$.

Așadar, derivata în raport cu timpul a momentului cinetic relativ la centrul de greutate este egală cu suma momentelor rezultante ale forțelor exterioare și reactive adunate cu suma momentelor impulsurilor particulelor emise de corp în unitatea de timp, față de axele legate de corp, axe în mișcare de translație.

Să introducem un sistem de axe $Oxyz$ mobil cu corpul de care este invariabil legat; atunci:

$$\frac{d\bar{K}_c}{dt} = \frac{d^*\bar{K}_c}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_c \tag{3.30}$$

unde am însemnat prin $\frac{d^*}{dt}$ derivata locală față de $Oxyz$.

Luăm ca axe $Oxyz$ axele principale de inerție ale elipsoidului de inerție relativ la punctul O al corpului (în cazul particular admis punctul O

Scanned with OKEN Scanner

coincide cu punctul C, centrul de greutate). În acest caz, proiecțiile momentului cinetic pe aceste axe sînt:

$$K_{c,x} = J_{xx}\omega_x; \quad K_{c,y} = J_{yy}\omega_y; \quad K_{c,z} = J_{zz}\omega_z .$$

Ecuația (3.29) ia forma:

$$\frac{d\bar{K}_c}{dt} - \sum \bar{r}_s \times \frac{dm_s}{dt}\bar{v}_{0,s} + \bar{\omega} \times \bar{K}_c = \bar{M}_{c,e} + \bar{M}_{c,r} . \tag{3.31}$$

Dar:

$$\bar{\omega} \times \bar{K}_c = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ J_{xx}\,\omega_x & J_{yy}\,\omega_y & J_{zz}\,\omega_z \end{vmatrix},$$

ceea ce ne dă ușor proiecțiile vectorului $\bar{\omega} \times \bar{K}_c$. Rămîne să calculăm proiecțiile vectorului:

$$\bar{A} = \frac{d\bar{K}_c}{dt} - \sum \bar{r}_s \times \frac{dm_s}{dt}\bar{v}_{0,s} .$$

Luînd proiecția pe axa x obținem:

$$A_x = \frac{dK_{c,x}}{dt} - \sum \left[\bar{r}_x \times \frac{dm_s}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}_s)\right]_x = \frac{d}{dt}(J_{xx}\,\omega_x) -$$

$$- \sum \left[\frac{dm_s}{dt}\bar{\omega}\, r_s^2 - \frac{dm_s}{dt}\bar{r}_s\,(\bar{\omega}\,\bar{r}_s)\right] = \frac{dJ_{xy}}{dt} + J_{xx}\frac{d\omega_x}{dt} - \omega_x \frac{d}{dt}\sum m_s(y_s^2 + z_s^2) +$$

$$+ \omega_y \frac{d}{dt}\sum m_s x_s y_s + \omega_z \sum m_s x_s z_s = J_{xx}\,\dot{\omega}_x .$$

În mod analog se găsește:

$$A_y = J_{yy}\,\dot{\omega}_y; \quad A_z = J_{zz}\,\dot{\omega}_z.$$

În modul acesta, ecuația vectorială (3.31) se proiectează în următoarele ecuații scalare:

$$\begin{aligned} J_{xx}\,\dot{\omega}_x + (J_{zz} - J_{yy})\,\omega_y\,\omega_z &= M_{cx,e} + M_{cx,r} \\ J_{yy}\,\dot{\omega}_y + (J_{xx} - J_{zz})\,\omega_z\,\omega_x &= M_{cy,e} + M_{cy,r} \\ J_{zz}\,\dot{\omega}_z + (J_{yy} - J_{xx})\,\omega_x\,\omega_y &= M_{cz,e} + M_{cz,r} \end{aligned} \tag{3.32}$$

care nu este altceva decît sistemul ecuațiilor lui Euler generalizat la cazul unui corp cu masă variabilă.

În cazul cînd originea sistemului mobil O coincide cu centrul de greutate și cînd viteza relativă a centrului de greutate este nulă $\frac{\partial \bar{r}_c}{\partial t} = 0$, teorema momentului cinetic se reduce la ecuația corespunzătoare corpului cu masă constantă:

$$\frac{d\bar{K}_c}{dt} = \bar{M}_{c,e} , \tag{3.33}$$

sau scalar:

$$\frac{d}{dt}(J_{xx}\omega_x)+(J_{zz}-J_{yy})\,\omega_y\omega_z = M_{cx,e}$$

$$\frac{d}{dt}(J_{yy}\omega_y)+(J_{xx}-J_{zz})\,\omega_z\omega_x = M_{cy,e} \qquad (3.34)$$

$$\frac{d}{dt}(J_{zz}\omega_z)+(J_{yy}-J_{xx})\,\omega_x\omega_y = M_{cz,e}\,.$$

427. **Definiția energiei cinetice.** *Teorema lui König generalizată.* Energia cinetică a corpului cu masă variabilă se definește ca sumă a energiilor cinetice a punctelor care constituie corpul într-un moment dat, față de sistemul fix:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_s v_s^2\,. \qquad (3.35)$$

Dată fiind relația:

$$\bar{v}_s = \bar{v}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r}_s = \bar{v}_0 + \bar{v}_s' \qquad (3.36)$$

putem scrie:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_s(\bar{v}_0+\bar{v}_s')^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\sum m_s v_s'^2 + \bar{v}_0\sum m_s\bar{v}_s'\,.$$

Dar se știe că:

$$\frac{1}{2}\sum m_s v_s'^2 = T_0 \qquad (3.37)$$

este energia cinetică a corpului față de sistemul mobil $Ox'y'z'$ (care execută cu corpul o mișcare de translație față de sistemul fix (v. fig. 86). Pe de altă parte:

$$\sum m_s v_s' = \bar{\omega}\times\sum m_s\bar{r}_s = \bar{\omega}\times m\bar{r}_c\,.$$

Formula (3.35) devine astfel:

$$T = \frac{1}{2}mv_0^2 + T_0 + \bar{v}_0(\bar{\omega}\times m\bar{r}_c)\,. \qquad (3.38)$$

Dacă originea sistemului mobil O' coincide cu centrul de greutate C avem: $\bar{v}_0 = \bar{v}_c$; $\bar{r}_c = 0$ și:

$$T = \frac{1}{2}mv_0^2 + T_0, \qquad (3.39)$$

deci, energia cinetică a corpului cu masă variabilă este egală cu energia centrului de greutate în care este concentrată toată masa corpului adunată cu energia cinetică față de sistemul mobil cu mișcare de translație; — care este teorema lui König generalizată pentru corpul cu masă variabilă.

Scanned with OKEN Scanner

428. **Teorema energiei cinetice.** Pornim de la ecuația cunoscută pentru un punct oarecare m_s :

$$\frac{d}{dt}(m_s\bar{v}_s) = \bar{F}_{s,e} + \bar{F}_{s,i} + \frac{dm_s}{dt}\bar{u}_s .$$

Înmulțim în ecuația precedentă scalar cu $\bar{v}_s dt = d\bar{r}_s$ și sumăm pe toate valorile m_s care aparțin corpului cu masă variabilă într-un moment dat; se obține:

$$\sum_s \bar{v}_s\, d(m_s\bar{v}_s) = \sum_s \bar{F}_{e,s}d\bar{r}_s + \sum_s \bar{F}_{s,i}d\bar{r}_s + \sum_s dm_s\,\bar{u}_s\bar{v}_s . \tag{3.40}$$

Dar acum:

$$d\,\frac{1}{2}(m_s v_s^2) = dm_s\,\frac{v_s^2}{2} + m_s d\left(\frac{1}{2}v_s^2\right)$$

rezultă:

$$\sum \bar{v}_s\, d(m_s\bar{v}_s) = d\sum \frac{m_s v_s^2}{2} + \sum \frac{dm_s}{2}v_s^2 ,$$

Fie:

$$\sum \bar{F}_{s,e}d\bar{r}_s = \delta A_e, \quad \sum \bar{F}_{s,i}d\bar{r}_s = \delta A_i, \quad \sum \bar{\Phi}_{rs}d\bar{r}_s = \delta A_r ,$$

lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare, respectiv interioare și al forțelor reactive. Ținem seamă și că:

$$\sum dm_s\bar{u}_s\bar{v}_s = \sum dm_s(\bar{v}_{sr} + \bar{v}_s)\,\bar{v}_s = \sum \bar{\Phi}_{rs}\,d\bar{r}_s + \sum dm_s v_s^2 .$$

Cu aceste valori introduse în ecuația (3.40) se obține:

$$dT = \delta A_e + \delta A_i + \delta A_r + \sum \frac{1}{2}dm_s v_s^2 . \tag{3.41}$$

Așadar, diferențiala energiei cinetice a corpului cu masă variabilă este egală cu suma lucrurilor mecanice elementare ale forțelor exterioare, interioare și reactive, adunate cu energia cinetică a particulelor alipite sau desprinse de corp în intervalul de timp dt, pentru mișcarea de transport.

Formula se particularizează pentru cazul cînd viteza absolută a particulelor captate este nulă (cazul L e v i - C i v i t a) și devine:

$$dT = \delta A_e + \delta A_i + \frac{1}{2}\sum dm_s v_s^2 ; \tag{3.42}$$

precum și pentru cazul cînd viteza relativă a particulelor emise este nulă (cazul L e v i - C i v i t a) și devine:

$$dT = \delta A_e + \sum \frac{1}{2}dm_s v_s^2 . \tag{3.43}$$

429. **Ecuațiile lui Lagrange pentru corpul cu masă variabilă**[1]). Introducem coordonatele generalizate $q^1, q^2, \ldots, q^s$ în sensul lui L a g r a n g e, deci

[1]) *A. A. Kosmodemianski*, Note Științifice, Univ. Moscova, 1948.

ca parametri independenţi care determină poziţia punctelor din corpul cu masă variabilă, prin relaţiile de transformare a coordonatelor cartesiene:

$$\bar{r}_s = \bar{r}_s(q^1, q^2, \ldots, q^r). \qquad (s = 1, 2, \ldots, N) \quad (3.44)$$

Scriem ecuaţia generală a corpului cu masă variabilă:

$$\frac{d}{dt}(m_s\bar{v}_s) = \bar{F}_{s,e} + \bar{F}_{s,i} + \frac{dm_s}{dt}\bar{u}_s. \quad (s = 1, 2, \ldots, N)$$

Înmulţim scalar cu $\delta\bar{r}_s$ şi sumăm; obţinem:

$$\sum_{s=1}^{N} \frac{d}{dt}(m_s\bar{v}_s)\,\delta\bar{r}_s = \sum \bar{F}_{s,e}\delta\bar{r}_s + \sum \bar{F}_{s,i}\delta\bar{r}_s + \sum \frac{dm_s}{dt}\bar{u}_s\delta\bar{r}_s. \quad (3.45)$$

Admitem că particulele care aparţin corpului nu se deplasează una faţă de cealaltă; deci:

$$\sum \bar{F}_{s,i}\delta\bar{r} = 0\,. \quad (3.46)$$

Avem din (3.44):

$$\delta\bar{r}_s = \sum \frac{\partial\bar{r}_s}{\partial q^k}\delta q^k\,. \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, n \\ s = 1, 2, \ldots, N \end{pmatrix}$$

În aceste condiţii, ecuaţia (3.45) devine:

$$\sum_{s=1}^{N} \frac{d}{dt}(m_s\bar{v}_s) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\bar{r}_s}{\partial q^k}\delta q^k = \sum \bar{F}_{s,e} \sum \frac{\partial\bar{r}_s}{\partial q^k}\delta q^k + \sum \frac{dm_s}{dt}u_s \sum \frac{\partial\bar{r}_s}{\partial q^k}\delta q^k;$$

deci:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{s=1}^{N} \frac{d}{dt}(m_s\bar{v}_s)\frac{\partial\bar{r}_s}{\partial q^k}\right]\delta q^k = \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{s=1}^{N} \bar{F}_{s,e}\frac{\partial r_s}{\partial q^k}\right]\delta q^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{dm_s}{dt}\bar{u}_s\frac{\partial\bar{r}_s}{\partial q^k}\right)\delta_q k\,.$$

Folosim relaţiile evidente ca şi în cazul clasic:

$$\frac{\partial\bar{r}_s}{\partial q^k} = \frac{\partial\bar{v}_s}{\partial\dot{q}^k}\,; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}_s}{\partial q^k}\right) = \frac{\partial\bar{v}_s}{\partial q^k}\,. \quad (3.47)$$

Notăm ca şi în problema clasică, forţa lagrangeiană:

$$\sum \bar{F}_{s,e}\frac{\partial\bar{r}_s}{\partial q^k} = Q_k\,. \quad (3.48)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, se deduce ușor, admițînd că m_s depinde numai de timp:

$$\sum_{s=1}^{N} \frac{d}{dt}(m_s\bar{v}_s)\frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q^h} = \frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{N} m_s\bar{v}_s\frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q^h} - \sum_{s=1}^{N} m_s\bar{v}_s\frac{\partial \bar{v}_s}{\partial q^h} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^h}\sum_{s=1}^{N}\frac{m_s v_s^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q^h}\sum_{s=1}^{N}\frac{m_s v_s^2}{2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{\partial \dot{q}^h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^h}$$

unde T este energia cinetică a sistemului.

Notăm pentru prescurtare:

$$\sum_{s=1}^{N}\frac{dm_s}{dt}\bar{u}_s\frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q^h} = \sum_{s=1}^{N}\frac{dm_s}{dt}\bar{u}_h\frac{\partial v_s}{\partial \dot{q}^h} = P_h. \tag{3.49}$$

Cu aceste notații, ecuația (3.46) se scrie:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^h} - Q_h - P_h\right]\delta q^h = 0.$$

Dar cum parametrii q^h sînt independenți între ei, se obține sistemul ecuațiilor lui Lagrange pentru numărul gradelor de libertate considerat n, în cazul corpului cu masă variabilă:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^h} = Q_h + P_h. \tag{3.50}$$

430. **Ecuațiile lui Hamilton pentru corpul cu masă variabilă**[1].) Pentru deducerea ecuațiilor canonice se procedează ca și în cazul clasic, introducîndu-se impulsurile generalizate prin relația:

$$p_h = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.51}$$

relație care permite exprimarea vitezelor generalizate $\dot{q}^h$ prin impulsurile generalizate p_h, admițînd că Hesseianul este diferit de zero:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^h \partial \dot{q}^s} \neq 0,$$

condiție satisfăcută în problemele de dinamică, T fiind o formă pătratică pozitiv nedegenerată.

Considerînd expresia energiei cinetice ca depinzînd de q^h și $\dot{q}^h$ avem:

$$\delta T\left(q^h, \dot{q}^h\right) = \frac{\partial T}{\partial q^h}\delta q^h + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h}\delta \dot{q}^h = \frac{\partial T}{\partial q^h}\delta q^h + \delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h}\delta q^h\right) - \dot{q}^h\delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h}\right),$$

utilizînd regula de sumare pe indicele curent k. Rezultă:

$$\delta\left(-T + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h}\dot{q}^h\right) = \dot{q}^h\,\delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^h}\delta q^h.$$

[1]) *A. A. Kosmodemianski*, [44].

Introducem funcţia lui H a m i l t o n prin relaţia:

$$H(q^h, p_h) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h}\dot{q}^h - T = p^h\,\dot{q}^h - T\,, \tag{3.52}$$

pe care o considerăm ca funcţie de q^h şi p_h. Variind această funcţie, deducem:

$$\delta H = \dot{q}^h\,\delta p_h - \frac{\partial T}{\partial q^h}\,\delta q^h\,.$$

Dar din (3.50) obţinem:

$$\frac{\partial T}{\partial q^h} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h}\right) - P_h - Q_h = \dot{p}_h - P_h - Q_h$$

şi prin urmare:

$$\delta H = \dot{}^h\,\delta p_h - (\dot{p}_h - P_h - Q_h)\,\delta p_h\,. \tag{3.53}$$

Comparînd variaţia (3.52) cu:

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q^h}\,\delta q^h + \frac{\partial H}{\partial p_h}\,\delta p_h\,,$$

rezultă ecuaţiile canonice generalizate pentru corpul cu masă variabilă:

$$\dot{q}^h = \frac{\partial H}{\partial p_h}\,; \quad \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q^h} + P_h + Q_h\,. \tag{3.54}$$

Dacă forţele exterioare derivă dintr-un potenţial U şi viteza absolută a particulelor este nulă, în locul funcţiei H (3.52) se obţine funcţia:

$$H^* = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^h}\,\dot{q}^h - \mathfrak{L} \tag{3.55}$$

unde $\mathfrak{L} = T - U$ este funcţia lui L a g r a n g e. Admitem că funcţia potenţială $U(q^h)$ depinde numai de poziţie; putem pune:

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q^h}\,. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.56}$$

În acest caz ecuaţiile L a g r a n g e devin:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^h}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^h} = 0\,, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

iar (3.53) ia forma:

$$\delta H^* = \dot{q}^h\,\delta p_h - \dot{p}_h\,\delta q^h\,,$$

iar impulsurile generalizate (3.51) se definesc prin relaţiile (clasice):

$$p_h = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^h} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.57}$$

ecuaţiile canonice devenind:

$$\dot{q}^h = \frac{\partial H^*}{\partial q^h}\,, \quad \dot{p}_h = -\frac{\partial H^*}{\partial p_h} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

care este, în acest caz, sistemul clasic al ecuaţiilor lui Hamilton.

Scanned with OKEN Scanner

431. **Asupra problemei a două corpuri cu masă variabilă**[1]). În cazul problemei astronomice a corpului care captează mase provenite din meteoriți, admițînd că viteza absolută a particulelor captate este nulă (cazul Levi-Civita) se pornește de la ecuația:

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F} \tag{3.58}$$

cu notațiile evidente.

În cazul a două corpuri: de masă m_1 așezat în punctul $P_1\,[\bar{r}_1\,(x_1\ y_1\ z_1)]$ și m_2 așezat în punctul $P_2\,[\bar{r}_2\,(x_2\ y_2\ z_2)]$ la distanța $|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|$ dintre ele, ecuațiile de mișcare se scriu (f fiind constanta gravitațională):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1\dot{\bar{r}}_1) &= f\frac{m_1 m_2}{|r_2 - r_1|^3}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \\ \frac{d}{dt}(m_2\dot{\bar{r}}_2) &= -f\frac{m_1 m_2}{|r_2 - r_1|^3}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1). \end{aligned} \tag{3.59}$$

Expresiile energiilor cinetică T și potențială U se scriu:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2\ ;\ U = -f\frac{m_1 m_2}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|}. \tag{3.60}$$

Ecuațiile (3.59) pot fi scrise și sub forma lagrangeiană:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{\partial U}{\partial x_1} \tag{3.61}$$

și analog pentru y_1, z_1; x_2, y_2, z_2.

Se verifică ușor că ecuațiile (3.59) admit următoarele trei integrale prime:

$$m_1\dot{\bar{r}}_1 + m_2\dot{\bar{r}}_2 = \bar{a} \tag{3.62}$$

unde $\bar{a}\ (a_1, a_2, a_3)$ este un vector constant.

Pentru a trece la sistemul canonic, introducem variabilele conjugate lui $\bar{r}_1, \bar{r}_2$, anume $\bar{p}_1 = m_1\dot{\bar{r}}_1$ și $\bar{p}_2 = m_2\dot{\bar{r}}_2$.

Funcția hamiltoniană se scrie sub forma:

$$H = \frac{1}{2m_1}p_1^2 + \frac{1}{2m_2}p_2^2 + U. \tag{3.63}$$

Facem o transformare de variabile datorită lui Poincaré, și anume, luăm ca o primă serie de variabile coordonatele relative ale celor două puncte $\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$, iar ca conjugate ale lor luăm impulsul lui p_2 (pe care-l

---

[1]) *Gh. Vrănceanu*, „Sopra la equazioni del problema dei due corpi di masse variabile", Rend. Ac. Naz. dei Lincei, 1928, p. 555.

notăm pe scurt cu $\bar{p}$ în loc de $\bar{p}_2$). O altă serie de variabile să fie coordonatele absolute ale lui P_1 și ca conjugate suma impulsurilor absolute ale celor două corpuri $\bar{\alpha} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2$.

În aceste noi variabile, funcția hamiltoniană se scrie:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) p^2 - \frac{1}{m_1}\bar{\alpha}\,\bar{p} + \frac{1}{2m_1}\sum \alpha^2 + U. \tag{3.64}$$

Fiind dat faptul că variabilele $\bar{r}_1$ nu apar explicit în expresia (3.64) a lui H, urmează că $\bar{\alpha}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sînt constante în conformitate cu integralele prime (3.62).

Sistemul nostru se reduce la:

$$\dot{\bar{r}} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\bar{p} - \frac{1}{m_1}\bar{a}; \qquad \dot{\bar{p}} = \text{grad } U. \tag{3.65}$$

Eliminînd necunoscutele p_x, p_y, p_z se obțin ecuațiile:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\bar{r}}\right) + \bar{a}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) = \text{grad } U \tag{3.66}$$

care este sistemul de ecuații căutat.

432. **Ecuațiile de mișcare a trei corpuri cu mase variabile** [1]). Și aici se consideră tot cazul lui Levi-Civita cînd ipotezele absolute ale particulelor sînt nule, ca și în cazul Vrănceanu. Fie cele trei corpuri de mase m_0, m_1, m_2 așezate în punctele P_0, P_1, P_2 de coordonate (ξ_0, η_0, ζ_0), (ξ_1, η_1, ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2) față de masele fixe. Ecuațiile mișcării se scriu pentru această problemă:

$$\frac{d}{dt}\left(m_s \dot{\bar{R}}_s\right) = \text{grad}_s U, \qquad (s = 0, 1, 2) \tag{3.67}$$

unde am pus $\bar{R}_s$ vectorul de componente ξ_s, η_s, ζ_s și grad_s vectorul de componente $\frac{\partial}{\partial \xi_s}, \frac{\partial}{\partial \eta_s}, \frac{\partial}{\partial \zeta_s}$. Funcția potențială U provine din atracția newtoniană $U = U_0 + U_1 + U_2$, cu expresiile:

$$U_0 = -f\frac{m_0 m_1}{|\bar{R}_1 - \bar{R}_0|}; \qquad U_1 = -f\frac{m_0 m_2}{|\bar{R}_2 - \bar{R}_0|}; \qquad U_2 = -f\frac{m_1 m_2}{|\bar{R}_2 - \bar{R}_1|},$$

f fiind constanta gravitațională.

Energia cinetică a sistemului este:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{s=0,1,2} m_s \dot{R}_s^2.$$

---

[1]) *I. I. Plăcinteanu*, „Les équations du mouvement de trois corps à masses variables". Rend. Acc. Naz. dei Lincei, 1932, p. 5, și Ann. Sc. de l'Université de Iassy, 1932, p. 70.

Ecuațiile (3.67) pot fi puse sub forma lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_s}\right)-\frac{\partial U}{\partial \xi_s}=0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_s}\right)-\frac{\partial U}{\partial \dot{\eta}_s}=0, \tag{3.68}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\zeta}_s}\right)-\frac{\partial U}{\partial \zeta_s}=0.$$

Se poate verifica ușor că sistemul (3.67) admite următoarele trei integrale prime:

$$\sum m_s \dot{\bar{R}}_s = \bar{a}, \tag{3.69}$$

unde $\bar{a}\ (a_0, a_1, a_2)$ este un vector constant.

Se poate micșora ordinul sistemului (3.68) folosind cele trei integrale prime (3.69). În adevăr, sistemul (3.68) echivalează cu un sistem canonic avînd ca funcție hamiltoniană:

$$H=\sum_{s=0,1,2}\frac{1}{2m_s}p_s^2+U \tag{3.70}$$

unde p_s este impulsul de componente $m_s\,\dot{\xi}_s$, $m_s\,\dot{\eta}_s$, $m_s\,\dot{\zeta}_s$. Luînd drept coordonate relative $\bar{r}_s\,(x_s, y_s, z_s)$, unde s-a pus $x_s=\xi_s-\xi_o$; $y_s=\eta_s-\eta_o$; $z_x=\zeta_s-\zeta_s$, și impulsurile $\bar{p}_s$ cu componentele $p_{xs}=m_s\,\dot{\xi}_s$, $p_{ys}=m_s\,\dot{\eta}_s$; $p_{zs}=m_s\,\dot{\zeta}_s$. Avem astfel o transformare canonică, a lui Poincaré, care transformă sistemul canonic echivalent (3.68) în sistemul canonic:

$$\dot{x}_s=\frac{\partial H}{\partial p_{xs}};\quad \dot{p}_{x\xi}=-\frac{\partial H}{\partial x_s}\qquad (s=1,\ 2), \tag{3.71}$$

a cărui funcție hamiltoniană se deduce din (3.70) ținînd seama de (3.69):

$$\bar{p}_0+\bar{p}_1+\bar{p}_2=\bar{a}$$

și în forma canonică a lui Poincaré:

$$H=\frac{1}{2m_1}p_1^2+\frac{1}{2m_2}p_2^2+\frac{1}{2m_0}(\bar{a}-\bar{p}_1-\bar{p}_2)^2+U\,, \tag{3.72}$$

care se transformă ușor în:

$$H=\frac{1}{2}\,\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\,p_1^2+\frac{1}{2}\,\frac{m_0+m_2}{m_0m_2}\,p_2^2-\frac{1}{m_1}(\bar{a}\bar{p}_1+\bar{a}\bar{p}_2-\bar{p}_1\bar{p}_2)+U. \tag{3.73}$$

Dacă ținem seama de ecuațiile (3.71) cu hamiltoniana (3.73), se obține:

$$\dot{\bar{r}}_1=\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m_1}\right)\bar{p}_1-\frac{1}{m_0}(\bar{a}-\bar{p}_2);\quad \dot{\bar{p}}_1=\operatorname{grad}_1 U;$$
$$\dot{\bar{r}}_2=\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m_2}\right)\bar{p}_2-\frac{1}{m_0}(\bar{a}-\bar{p}_1);\quad \dot{\bar{p}}_2=\operatorname{grad}_2 U.$$

Scanned with OKEN Scanner

Eliminînd p_1 și p_2, deducem ecuațiile de mișcare:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{m_1(m_2+m_0)}{M}\dot{\bar{r}}_1\right]-\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1m_2}{M}\dot{\bar{r}}_2\right)+\bar{a}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1}{M}\right)=\operatorname{grad}_1 U;\\
&\frac{d}{dt}\left[\frac{m_2(m_1+m_0)}{M}\dot{\bar{r}}_2\right]-\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1m_2}{M}\dot{\bar{r}}_1\right)+\bar{a}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{m_2}{M}\right)=\operatorname{grad}_2 U;
\end{aligned}\tag{3.74}$$

unde am pus $M=m_0+m_1+m_2$. Făcînd suma acestor două ecuații, obținem ecuația echivalentă:

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0}{M}(m_1\dot{\bar{r}}_1+m_2\dot{\bar{r}}_2)+\bar{a}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1+m_2}{M}\right)=\operatorname{grad}_1 U+\operatorname{grad}_2 U.\tag{3.75}$$

Această ecuație împreună cu una dintre cele două ecuații (3.74) ne dă un sistem de ecuații diferențiale pentru problema celor trei corpuri cu masa variabilă.

Ecuațiile precedente pot să fie puse sub o formă mai simetrică. Punem ecuația (3.75) sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0m_1}{M}\dot{\bar{r}}_1\right)+\bar{a}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1}{M}\right)-\operatorname{grad}_1 U_1=-\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0m_2}{M}\dot{\bar{r}}_2\right)+\bar{a}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{m_2}{M}\right)-\operatorname{grad}_2 U_2\right].$$

Cei doi membri conțin: primul numai variabilele $\bar{r}_1(x_1, y_1, z_1)$, iar al doilea numai variabilele $\bar{r}_2(x_2, y_2, z_2)$; putem egala valoarea lor comună cu un vector $\bar{b}(t)$ funcție de t, care urmează a fi determinat. Ecuația (3.75) este echivalentă astfel cu una dintre ecuațiile în care variabilele sînt separate:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0m_1}{M}\dot{\bar{r}}_1\right)+\bar{a}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1}{M}\right)+\bar{b}(t)=\operatorname{grad}_1 U_1;\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0m_2}{M}\dot{\bar{r}}_2\right)+\bar{a}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{m_2}{M}\right)-\bar{b}(t)=\operatorname{grad}_2 U_2.
\end{aligned}\tag{3.76}$$

Pentru a găsi ecuația pentru funcția suplimentară $\bar{b}(t)$, scădem cele două ecuații (3.74); se obține:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{m_1m_2}{M}(\dot{\bar{r}}_2-\dot{\bar{r}}_1)\right]+\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0m_2}{M}\dot{\bar{r}}_2\right)+\bar{a}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{m_2}{M}\right)-\operatorname{grad}_2 U_2\right]-\\
&-\left[\frac{d}{dt}\frac{m_0m_1}{M}\dot{\bar{r}}_1\right)+\bar{a}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1}{M}\right)-\operatorname{grad}_1 U\Big]=\operatorname{grad}_2 U_2-\operatorname{grad}_1 U_1
\end{aligned}$$

care, dacă ținem seama de (3.76), devine:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1m_2}{M}\dot{\bar{r}}_3\right)+\bar{b}(t)=\operatorname{grad}_3 U_3,\tag{3.77}$$

unde:

$$U_3=f\frac{m_1m_2}{|\bar{r}_2-\bar{r}_1|};\quad U_1=f\frac{m_0m_1}{|\bar{r}_1|};\quad U_2=f\frac{m_0m_2}{|\bar{r}_2|}.$$

Sistemul ecuațiilor (3.76) și (3.77) poate înlocui sistemul (3.74) și (3.75) fiind mai simetric prin separarea variabilelor.

Scanned with OKEN Scanner

433. **Ecuațiile mecanicii ondulatorii pentru un punct cu masă variabilă**[1]).

a) *Ecuația lui E. Schrödinger.* Se consideră problema în sensul pus de Levi-Civita: un corp a cărui masă $m = m(t)$ variază prin captarea unui nor de particule și care deci satisface ecuația (viteza absolută a particulelor nulă):

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\bar{r}}) = \bar{F} \tag{3.78}$$

precum și în cazul emisiei norului de particule (viteza relativă a particulelor nulă), în ecuația de mișcare:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F} \tag{3.79}$$

$\bar{F}$ fiind rezultanta forțelor exterioare.

Ecuația energiei se scrie pentru cele două cazuri:

$$T \pm \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \dot{m}\dot{r}^2\,dt + U = E, \tag{3.80}$$

unde: $T = \frac{1}{2}mv^2$ este energia cinetică, U este potențialul forțelor exterioare și E este constanta energiei totale.

Semnul (+) corespunde la cazul absorbției [ecuația (3.78)], iar semnul (—) corespunde la cazul emisiei [ecuația (3.79)].

Luăm drept ecuație de variație a masei cu timpul, legea exponențială — valabilă în radioactivitate:

$$m = m_0 e^{\pm\lambda t}, \tag{3.81}$$

unde λ este o constantă pozitivă în cazul radioactivității, constanta de dezintegrare radioactivă caracteristică pentru fiecare corp radioactiv.

Cu legea (3.81) avem:

$$\int_{t_0}^{t} \dot{m}\dot{r}^2\,dt = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{m}\dot{m}2T\,dt$$

sau:

$$\pm\lambda\int_{t_0}^{t} 2T\,dt = \pm\lambda S(\bar{r}, \bar{r}_0), \tag{3.82}$$

---

[1]) *I. I. Plăcinteanu*, „L'équation ondulatoire d'un corps à masse variable. Aplication à la radioactivité", Rend. Acc. Naz. dei Lincei, vol. XIX, 1934, p. 629 și „L'équation de Dirac pour un corp à masse variable", Acad. Roum. v. XVIII, 1936, p. 1.

Scanned with OKEN Scanner

însemnînd cu $S(\bar{r}, \bar{r}_0)$ funcţia de acţiune a lui Jacobi. În aceste condiţii, ecuaţia energiei ne conduce la ecuaţia cu derivate parţiale a lui Hamilton-Jacobi:

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\lambda}{2} S = E \tag{3.83}$$

aceeaşi pentru ambele cazuri. Aici $H = T + U$ este funcţia lui Hamilton şi q^k coordonatele lagrangeiene.

Pentru a obţine ecuaţia lui Schrödinger a mecanicii ondulatorii este necesar să se facă substituţiile formale:

$$\frac{\partial S}{\partial q} \to \hbar i \frac{\partial}{\partial q}, \qquad S \to \hbar i \qquad \left(i = \sqrt{-1};\ \hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$$

unde h este constanta de acţiune a lui Max Planck.

În acest mod, după procedeul cunoscut al mecanicii ondulatorii, considerîndu-se expresia (3.83) ca operator asupra funcţiei de undă ψ, se obţine:

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + E + \hbar i \frac{\lambda}{2} + U\right)\psi = 0, \tag{3.84}$$

unde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ este operatorul lui Lagrange. Ea diferă de ecuaţia obişnuită a lui Schrödinger prin apariţia termenului $\hbar i \lambda/2$ introdus empiric de Gamow în ecuaţia sa ondulatorie pentru emisia particulelor α prin ipoteza valorilor proprii imaginare $(E + \hbar i \lambda/2)$.

Substituţia introdusă de noi $S \to \hbar i$ constituie corespondentul cuantificării funcţiei de acţiune. Aceasta este problema nerelativistă.

b) *Ecuaţia lui Dirac*[1]). Dacă considerăm viteze de ordinul vitezei luminii c, trebuie să trecem la ecuaţia relativistă a lui Dirac, cînd masa de mişcare variază după legea (v. § 447):

$$m = \frac{m_0(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3.85}$$

unde considerăm că şi masa de repaus $m_0(t)$ variază în timp; astfel încît ecuaţiile de mişcare ale lui Levi-Civita devin:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = \bar{F} \tag{3.86}$$

pentru absorbţie, şi:

$$m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = \bar{F} \tag{3.87}$$

pentru emisie.

Pentru construirea ecuaţiei ondulatorii relativiste formăm ecuaţia energiei. Plecăm de la teorema energiei:

$$\bar{v}\,\bar{F} = \frac{dE}{dt}$$

[1]) Acest paragraf se va citi după studierea relativităţii restrînse, care urmează.

Scanned with OKEN Scanner

și ținînd seama de (3.86), obținem:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \lambda \int_0^t m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt, \tag{3.88}$$

în cazul absorbției; apoi, ținînd seama de (3.87), se obține:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \lambda \int_0^t \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\, dt \tag{3.89}$$

în cazul emisiei.

Deosebirea dintre cele două cazuri (3.88) și (3.89) este neesențială. În adevăr, teoria relativității (cap. următor) definește funcția de acțiune relativistă prin relația:

$$S = \int_0^t \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\, dt = \int_0^t \left[- m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] dt. \tag{3.90}$$

Făcînd substituțiile formale:

$$- m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \to - \frac{\hbar i}{2}\ ; \qquad \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \to - \frac{\hbar i}{2} \tag{3.91}$$

obținem ecuația lui H a m i l t o n - J a c o b i:

$$H - \frac{\lambda}{2} \hbar i = W,$$

unde W este constanta energiei și H hamiltoniana relativistă:

$$H = m_0 c \sqrt{\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{m_0^2 c^2} + 1} + E_{pot}\,. \tag{3.92}$$

În acest mod, ecuația relativistă ondulatorie devine:

$$H\left(q, - \hbar i \frac{\partial}{\partial q}\right) - \frac{\lambda}{2} \hbar i = W,$$

ceea ce prin liniarizare (procedeul D i r a c), se obține:

$$\left(\frac{W}{C} + \frac{\lambda}{2} \hbar i + \sum_{S=1}^{3} \alpha_s p_s + m_0 c^2 \right) \psi = 0, \tag{3.93}$$

care este ecuația lui D i r a c pentru corpul cu masă variabilă, în care apare termenul suplimentar $\frac{\lambda}{2} \hbar i$.

Partea a doua

NOȚIUNI DE TEORIA RELATIVITĂȚII RESTRÎNSE
MASA DE MIȘCARE VARIABILĂ CU VITEZA

Capitolul IV

CINEMATICA RELATIVISTĂ

434. **Introducere.** În evoluția teoriilor fizice, menite să cristalizeze în formulare unitară cît mai multe legi naturale, relativitatea einsteiniană marchează un moment capital — atît prin numeroasele și însemnatele consecințe experimentale, cît și prin necesitatea reexaminării unor noțiuni primordiale, anterior unanim și neverificat acceptate — și pătrunde astfel pînă în domeniul filozofiei cunoașterii, cu revizuiri de concepte esențiale.

Cercetătorii fizicii teoretice înaintau spre răscrucea marcată în 1905 de E i n s t e i n, pe două căi diferite, dar concurente.

Pe deoparte, mecanica newtoniană se oprise la studiul mișcării corpurilor materiale posedînd viteze neglijabile față de viteza luminii în vid. În expunerea ce precede acest capitol am fixat limita valabilității mecanicii newtoniene în studiul fenomenelor naturii și am constatat că N e w t o n însuși fusese condus la concepția unui spațiu absolut și a timpului absolut. Legea fundamentală a mecanicii newtoniene se verifică a fi invariantă față de transformările de variabile cuprinse în *grupul galileian*, grup cu totul particular. Principial deci, se naște problema *o lege a naturii* (cum este, de exemplu, ecuația mecanicii newtoniene) *nu trebuie să depindă de sistemul de referință față de care se raportează fenomenul fizic*; ea trebuie să se exprime printr-o *relație tensorială* invariantă față de oricare transformări de variabile. Prin urmare, ecuația mecanicii clasice se dovedește a fi un caz particular al unei mecanici generale care satisface la condiția generală de invarianță. Trebuie deci căutată această mecanică. În cele ce urmează vom arăta cît de departe s-a ajuns în această direcție, în relativitatea restrînsă.

Istoric, problema relativității einsteiniene nu a luat ființă direct din considerații de natura celor expuse mai sus, privind formalismul matematic, — ci, din evoluția normală a cercetărilor teoretice și experimentale întreprinse, — o lungă perioadă de timp, — asupra *Electrodinamicii*, unde predomina tendința pentru formulare de modele mecanice, cu folosirea clasicelor metode mecaniste, sub regimul marelui prestigiu cucerit în știință de mecanica lui N e w t o n.

Se știe că apogeul Electrodinamicii îl atinge *teoria lui M a x w e l l* care condensează și exploatează fecundele idei ale lui F a r a d a y pentru dielectricele în repaus sub forma dată de H. H e r t z; după care H. A. L o r e n t z, în intenția creării unei electrodinamici a corpurilor în mișcare, dezvoltă cunoscuta *teorie electronică*.

Toate aceste teorii, îngrădite în calapodul mecanicii clasice, nu reprezintă decît doar o extindere timidă a clasicei teorii maxwelliene suprapusă peste problema „*mișcării relative*", bine înțeles, în spiritul relativității newtoniene. Așa a luat ființă mult dezbătuta problemă a existenței și proprietăților *eterului*, acel „mediu" universal față de care era necesar să se raporteze mișcările corpurilor electromagnetice și materiale. Este interesant de observat că această problemă, fără să reprezinte prin ea însăși o concepție de prea mare însemnătate, a fost totuși extrem de fertilă prin numeroasele experiențe la care a dat imbold. Reamintim de celebrele experiențe ale lui Wilson, Röntgen-Eichenwald, Fizeau, Michelson, Sagnac, Trouton-Noble, Zeeman, Harres etc., imaginate și executate în intenția de a stabili existența unui „eter" absolut sau antrenat în mișcare parțial, ori total. Marele succes al tuturor acestor experiențe — de remarcabilă abilitate tehnică și ingenioasă imaginație științifică — nu a fost evident, concluzia negativă privind infirmarea teoriilor amintite mai sus, ci fără îndoială, ele au constituit suportul experimental pentru noua concepție a relativității einsteiniene.

În adevăr, în anul 1905 situația se prezintă astfel: pe deoparte experiențele imaginate infirmau categoric concepțiile fundamentale pe care se sprijineau toate încercările unei Electrodinamici a corpurilor în mișcare; pe de altă parte, legile Electromagnetismului nefiind invariante față de grupul galileian (așa cum este ecuația mecanicii clasice) — nu se putea întrevedea cu ușurință reușita unei teorii care să unifice, într-o formulare cuprinzătoare, atît fenomenele electromagnetice, cît și fenomenele mecanice, — dacă ne menținem în cadrul delimitat de principiile mecanicii clasice și al noțiunilor corespunzătoare. Singura constatare precisă și utilă ce se poate extrage din această stare de lucruri este: legea mecanicii newtoniene nu este compatibilă cu legile Electromagnetismului maxwellian, deci ale fenomenelor optice, respectiv luminoase! Care este cauza?

La această întrebare răspunde *teoria relativității restrînse*. A. Einstein, în anul 1905, pune problema *invers* decît se făcuse pînă la el. În loc să caute o formulare a legilor electromagnetice compatibilă cu mecanica lui Newton, el preconizează, dimpotrivă, *o modificare a mecanicii newtoniene cu condiția de a satisface principiul de invarianță a legilor electromagnetismului pe care le așază, astfel, la baza tuturor fenomenelor fizice.*

Pentru împlinirea acestui program, Einstein se vede condus la necesitatea revizuirii și modificării unor noțiuni primordiale — cum sînt noțiunile de: *simultaneitate*, *corp rigid*, *timp*, *spațiu*, *masă*, *energie* — care pînă atunci erau acceptate și folosite în înțelesul tradițional, fără o analizare mai profundă a conținutului subînțeles, dar nu prea bine descifrat.

După cum vom vedea în cele ce urmează, modificarea imprimată legii newtoniene, cu condiția compatibilității cu legile electromagnetismului, nu determină o renunțare la mecanica clasică, ci constituie doar o generalizare a acestei mecanici, pentru un grup de fenomene mai întins, și anume: pentru *mișcările ce se efectuează cu viteze comparabile cu viteza luminii în vid.*

De asemenea, vom constata că grupul de transformări față de care condiționăm invarianța legilor naturii (optice, mecanice etc.) este tot un grup particular (mai extins, evident, decît grupul galileian), și anume, *grupul lui Lorentz.* Prin aceasta, problema relativității, așa cum este

Scanned with OKEN Scanner

prezentată în expunerea de față — și așa cum a conceput-o autorul ei — rezolvă problema *restrînsă*; de unde și denumirea.

Este necesar să se accentueze că întreaga teorie a relativității este o concepție a spiritului uman, izvorîtă din dorința și necesitatea stăpînirii, înțelegerii și folosirii fenomenelor naturii, — pe bază de experiență, sub permanentul control al verificării prin observațiile și măsurările efectuate în cercetarea fenomenului natural.

Introducerea relativității restrînse drept un capitol al mecanicii are ca scop evidențierea distincției între mecanica clasică și cea einsteiniană, distincție privind natura fenomenelor de mișcare a corpurilor materiale (punctul material), considerînd mecanica einsteiniană drept o extindere a mecanicii newtoniene.

În expunerea care urmează am preferat calea clasică folosită de însuși autorul teoriei, convins fiind că această cale lămurește mai convingător, pe cel ce dorește să se inițieze, asupra concepțiilor relativiste.

435. **Principiile relativității restrînse.** Conform cu programul enunțat mai sus, A. Einstein a căutat, în primul rînd, grupul de transformări care lasă invariantă legea fundamentală a opticii; anume: legea propagării luminii în vid, postulînd, apoi, generalizarea: *toate* legile naturii *trebuie* să satisfacă *aceleași* condiții! Teoria relativității restrînse se clădește, conform acestei concepții, pe următoarele două principii fundamentale:

1. Principiul relativității restrînse: toate legile naturii sînt invariante față de sistemele inerțiale (în translație rectilinie și uniformă unele în raport cu celelalte).

2. Principiul constanței vitezei luminii: în toate sistemele inerțiale, lumina se propagă, în vid, în linie dreaptă, cu viteza constantă: $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s, ceea ce nu este adevărat în realitatea galileiană, căci, după legea adunării vitezelor, raza de lumină ar trebui să aibă viteza $v \pm c$ față de sistemul fix, dacă sistemul mobil se deplasează cu viteza relativă v; ceeace ce este în contradicție cu experiența.

436. **Grupul de transformări al lui H. A. Lorentz.** Principiul întîi, enunțat mai sus, exprimă că toate legile naturii trebuie să satisfacă numitei condiții de invarianță pe care o satisface și legea fundamentală a opticii (propagarea luminii în vid):

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0.$$

Ne punem așadar întrebarea: care este grupul care transformă coordonatele unui sistem inerțial $O\,x\,y\,z\,t$ în alt sistem inerțial $O'\,x'\,y'\,z'\,t'$ pentru care este satisfăcută condiția de invarianță:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \equiv \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2). \qquad (4.1)$$

Această problemă fusese rezolvată de H. A. Lorentz cu ocazia cercetărilor sale asupra electrodinamicii mediilor în mișcare. De aceea, grupul de transformări ce se obține poartă numele lui.

Observăm, în primul rînd, că sistemele inerțiale O și O' fiind egal îndreptățite, condiției (4.1) îi corespunde condiția similară:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \equiv \lambda\,(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2), \qquad (4.1')$$

Scanned with OKEN Scanner

cu același factor λ; ceea ce ne dă $\lambda^2 = 1$, deci, $\lambda = \pm 1$. Dar soluția $\lambda = -1$, trebuie părăsită pentru regiunea interioară sferei de perturbație luminoasă. Păstrăm, prin aceasta, principiul de cauzalitate, valabil în toată fizica. În aceste condiții, primul membru al relației (4.1') sau (4.1) va avea același semn cu paranteza membrului al doilea al relației respective; adică: $r < ct$ atrage $r' < ct'$, și reciproc. Prin urmare, vom pune în (4.1) valoarea $\lambda = +1$.

Pentru a găsi expresia generală a formulelor de transformare căutată, să observăm că, în conformitate cu principiul întîi, o mișcare uniformă își păstrează caracterul față de ambele sisteme de referință.

Să presupunem, atunci, cele două sisteme inerțiale O și O', cu vitezele constante egale și de semne contrare $\bar{v}$ și $-\bar{v}$ pentru simplificare, alegînd axele Ox și Ox', precum și planele Oxy și $O'x'y'$ suprapuse în direcția translației comune, avînd originile ($x = 0$; $x' = 0$) în coincidență la momentul inițial ($t = 0$; $t' = 0$).

În sistemul O, mișcarea uniformă este dată de ecuațiile:

$$x = \alpha t + x_0; \; y = \beta t + y_0; \; z = \gamma t + z_0;$$

ecuații care, în spațiul cu patru dimensiuni (x, y, z, t) reprezintă o dreaptă. Rezultă așadar că, în spațiul $O'(x', y', z', t')$, mișcarea rămînînd tot uniformă, dreapta precedentă va rămîne tot o dreaptă prin transformarea căutată de noi. Așadar, transformarea dintre spațiile (x, y, z, t) și (x', y', z', t') este *punctuală* și *biunivocă*; ea schimbă dreptele în drepte, făcînd să corespundă punctele de la începutul acestor drepte. O asemenea corespondență este o *afinitate* exprimată printr-o substituție liniară întreagă, cu coeficienți care sînt funcții de v, în general. Ținînd seamă de alegerea particulară a pozițiilor axelor sistemelor O și O', precum și cu condițiile inițiale stabilite mai sus, putem scrie:

$$x' = m(v)\, x + m_1(v)\, t, \qquad z' = p(v)\, z, \tag{4.2}$$

$$y' = n(v)\, y, \qquad t' = q(v)\, x + q_1(v)\, y + q_2(v)\, z + q_3(v)\, t.$$

Sîntem așadar, conduși să concepem fenomenele naturale de mișcare, răspunzînd relativității restrînse, într-un spațiu generalizat, cu *patru dimensiuni* (spațiul lui Minkowski).

Relațiile (4.2) se precizează prin considerațiile următoare. Schimbînd sensul axei Ox, coordonatele x și x' și viteza v schimbă semnul, celelalte coordonate păstrîndu-și semnul. Din (4.2) rezultă, în acest caz:

$$y' = n(-v)\, y; \qquad z' = p(-v)\, z \tag{4.3}$$

comparînd relațiile (4.2) și (4.3) urmează:

$$n(v) = n(-v); \qquad (v) = p(-v). \tag{4.4}$$

Pe de altă parte, considerînd transformarea lui O' față de O, putem scrie:

$$y = n(-v)\, y; \qquad z = p(-v)\, z'. \tag{4.2'}$$

Din relațiile (4.3) și (4.2') rezultă:

$$n^2 = 1; \qquad p^2 = 1.$$

După observația făcută mai sus, y și z păstrînd semnul, luăm determinarea pozitivă, așa că, după (4.4), putem scrie:

$$n(v) = n(-v) = +1; \qquad p(v) = p(-v) = +1.$$

Să înlocuim valorile (4.2), unde am pus $n = 1$, $p = 1$, în relația (4.1) unde am pus $\lambda = 1$. Identificînd coeficienții termenilor identici, găsim succesiv:

$$q_1 = q_2 = 0; \; m^2 = 1 + c^2q^2; \; mm_1 = c^2qq_3; \; m_1^2 = c^2(q_3^2 - 1).$$

Observăm deocamdată că punctul O' (adică $x' = 0$) descrie față de sistemul O axa x cu viteza constantă v. Așadar, trebuie să avem:

$$x' = 0; \qquad x = vt;$$

de unde rezultă:

$$m_1 = -mv.$$

Eliminînd, apoi, în relațiile precedente pe q și q_3, deducem:

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

dacă punem $\beta = v/c$. În felul acesta, formulele de transformare căutate sînt, după (4.2):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y' &= y, & y &= y', \\ z' &= z, & z &= z', \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}; & t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Aceste relații alcătuiesc *grupul de transformări* al lui Lorentz, (în forma particulară aleasă, pentru ușurință, fără a strica prin aceasta, cu nimic, generalitatea concepției). El înlocuiește, în relativitatea restrînsă, grupul lui Galilei din mecanica clasică, grup, la care se reduc formulele (4.5) pentru $c \to \infty$, adică $v \ll c$; ceea ce caracterizează mișcările newtoniene (§ 22). O mecanică ce ar satisface grupului (4.5) ar fi valabilă și pentru viteze comparabile cu viteza luminii, observînd că, în nici un caz nu putem avea $v = c$, sau $v > c$. În adevăr, într-un astfel de caz, din (4.5) rezultă că radicalul ce apare în aceste formule ar fi ori nul, ori imaginar, ceea ce ar face fictive aceste relații de transformare.

Mecanica astfel obținută poate fi considerată, în adevăr, ca o generalizare (pentru c finit) a mecanicii newtoniene ($c \gg v$).

437. **Revizuirea noțiunii de simultaneitate.** Fie (x_1, y_1, z_1, t_1) și (x_2, y_2, z_2, t_2) coordonatele a două evenimente E_I și E_{II} într-un sistem de referință O. Vom exprima aceleași evenimente în sistemul de referință O' prin coordonate accentuate.

Clasic: $t_1 = t_1'$; $t_2 = t_2'$. Condiția de simultaneitate $t_1 = t_2$ antrenează automat condiția $t_1' = t_2'$. Deci, noțiunea de simultaneitate reprezentînd un eveniment „absolut" — același în toate sistemele de referință — este ea însăși o noțiune absolută, valabilă pentru toate sistemele de referință. Această noțiune domină întreaga fizică clasică.

Relativist:

$$t_1' - t_2' = \frac{t_1 - t_2 - \frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Dacă în O evenimentele E_I și E_{II} sînt simultane ($t_1 = t_2$), vom avea în sistemul O':

$$t_1' - t_2' = \frac{-v}{c^2\sqrt{1 - \beta^2}}(x_1 - x_2).$$

Admițînd că, în general, evenimentele nu coincid și în spațiu ($x_1 \neq x_2$) avem $t_1' - t_2' \neq 0$. Evenimentele E_I și E_{II} nu sînt mai simultane în sistemul O'. Simultaneitatea este, prin urmare o noțiune relativă valabilă numai într-un anumit sistem de referință.

438. **Spațiu absolut și spațiu relativ.** În mecanica newtoniană am constatat că putem raporta mișcarea la un sistem de referință absolut, sistem cartesian, astfel încît forma pătratică fundamentală:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

rămîne invariantă la transformările galileiene (spațiul euclidian) în orice moment; relativist, această proprietate nu mai este satisfăcută; în schimb transformările lui L o r e n t z (4.5) lasă invariantă forma pătratică:

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2\,dt^2. \tag{4.6}$$

Cum prin formulele lui L o r e n t z am fost conduși la considerarea spațiilor cu patru dimensiuni, putem imagina, după M i n k o w s k i, o „*lume*" (spațiu + timp) cuadridimensională (x, y, z, t), numită „universul spațiu-timp minkowskian". În această lume, secțiunea t = const, ne redă spațiul tridimensional al fizicii clasice. Metrica acestei lumi cuadridimensionale este tot euclidiană, sau, mai corect, cuasieuclidiană și este determinată de expresia (4.6), care se mai scrie obișnuit, punînd $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$:

$$-ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2. \tag{4.7}$$

Lumina parcuge, în vid, geodezicele (particulare) $ds = 0$ (dreptele izotrope, sau minimale, ale lumii spațiu + timp (4.7).

Spațiul mecanicii clasice fiind secțiunea t = const, prin spațiul relativist, el poate fi definit drept *locul tuturor evenimentelor simultane în lumea relativistă spațiu + timp*.

Segmentul din dreaptă dintre două evenimente în lumea spațiu + timp se numește *linie a universului relativist*; lungimea lui este ds, unde ds are expresia (4.7).

Scanned with OKEN Scanner

439. **Relativitatea timpului.** De unde, clasic, timpul t este o mărime absolută, independentă de sistemele de coordonate, în relativitate timpul devine o noțiune relativă, legată de sistemul de referință în care se efectuează măsurarea.

Timpul propriu. Să ne închipuim o porțiune de materie și un sistem de referință legat solidar de această porțiune de materie. Punctele sistemului de referință, execută aceleași mișcări ca și punctele materiei considerate, așa încît două evenimente oarecare întîmplate la intervalul de timp $d\tau$ măsurat în acest sistem de referință, vor avea distanța spațială nulă: $dx = dy = dz = 0$. Pentru acest sistem, avem deci, după (4.6): $ds = c\,d\tau$; cîtimea $d\tau$ se numește *elementul de timp propriu* al materiei (timp legat de materie), măsurat de orologiile legate de această materie.

Pe linia universului, două evenimente infinit vecine a căror distanță este ds, se vor petrece într-un interval de timp relativ la sistemul O, dedus din relația:

$$ds^2 = c^2\,dt^2\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\} = c^2\,dt^2\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right);$$

deci:

$$dt = \frac{ds}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} = d\tau\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \tag{4.8}$$

Așadar, *timpul propriu*:

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \beta^2}$$

între două evenimente de pe linia universului este mai scurt decît timpul dintre aceleași evenimente măsurat de un ceasornic așezat în sistemul din repaus (inerțial).

440. **Contracția lungimilor.** În sistemul mobil, fie $s' = x_1' - x_2'$ lungimea unei bare legată de axa x', deci în direcția mișcării. Un observator din sistemul fix O, privind-o într-un moment dat t, în care vede din O' simultan ambele extremități ale barei, adică pentru $t_2 - t_1 = 0$, vede bara ca avînd lungimea:

$$S = x_1 - x_2 = (x_1' - x_2')\sqrt{1 - \beta^2},$$

după formulele (4.5); așadar concludem:

$$S = S'\sqrt{1 - \beta^2}.$$

Prin urmare, din sistemul în repaus O, lungimea S' va fi văzută mai scurtă în raportul $\sqrt{1 - \beta^2}$. De aici rezultă celebra *ipoteză a concentrației lui Fitzgerald și Lorentz*: *lungimile se contractă, în sensul mișcării, în raportul* $\sqrt{1 - \beta^2}$.

441. **Dilatarea timpului.** Fie un orologiu imobil în sistemul O'. El marchează timpul t'. Ce timp va vedea un observator din O, dacă O' se mișcă rectiliniu și uniform de-alungul axei de x și x'?

Scanned with OKEN Scanner

Să fie așezat orologiul în originea lui O; deci $dx' = 0$, de unde, după relațiile (4.5), rezultă $dx = v\,dt$. Apoi,

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}\,dx}{\sqrt{1-\beta^2}} = dt\sqrt{1-\beta^2}.$$

Așadar, timpul dt' va fi văzut din sistemul O egal cu $dt\sqrt{1-\beta^2}$; deci, mai mare în raportul $\sqrt{1-\beta^2}$. Prin urmare: ceasornicele în mișcare, merg mai încet decît ceasornicele în repaus.

442. **Invarianța elementului de ipervolum.** Pentru sistemele inerțiale supuse la transformarea dată de formulele (4.5) avem, în conformitate cu § 436,

$$dx = \sqrt{1-\beta^2}\,dx';\quad dy = dy';\ dz = dz';\ dt = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,dt'.$$

Așadar rezultă:

$$dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4 = dx_1'\,dx_2'\,dx_3'\,dx_4'.$$

Deci, în spațiul relativist cu patru dimensiuni, elementul de ipervolum este un invariant. În schimb, elementul de volum clasic variază după relația evidentă:

$$dx_1\,dx_2\,dx_3 = \sqrt{1-\beta^2}\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3'.$$

443. **Legea de adunare a vitezelor.** În sistemul $Oxyz$ componentele vitezei unui punct material sînt:

$$q_x = \frac{dx}{dt};\quad q_y = \frac{dy}{dt};\quad q_z = \frac{dz}{dt};$$

iar în sistemul $O'(x', y', z')$:

$$q_x' = \frac{dx'}{dt'};\quad q_y' = \frac{dy'}{dt'};\quad q_z' = \frac{dz'}{dt'}.$$

Transformările lui L o r e n t z (4.5) ne dau:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{dt}{dt'};\quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dt'};\quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}\,\frac{dt}{dt'};\quad \frac{dt'}{dt} = \frac{1-\frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

De aici rezultă relațiile de transformare a vitezelor:

$$q_x' = \frac{q_x - v}{1-\frac{v}{c^2}q_x};\quad q_y' = \frac{q_y}{1-\frac{v}{c^2}q_y}\sqrt{1-\beta^2};\quad q_z' = \frac{q_z}{1-\frac{v}{c^2}q_z}\sqrt{1-\beta^2} \qquad (4.9)$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde, în mod analog:

$$q_x = \frac{q'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} q'_y} \; ; \; q_y = \frac{q'_y}{1 + \frac{v}{c^2} q'_y} \sqrt{1 - \beta^2} \; ; \; q_z = \frac{q'_z}{1 + \frac{v}{c^2} q'_z} \sqrt{1 - \beta^2} . \quad (4.9')$$

Consecințe. a) *Viteză rezultantă.* Dacă vitezei v îi adunăm viteza w, după legea adunării vitezelor din mecanica clasică, viteza rezultantă ar putea să apară mai mare ca viteza luminii. Nu avem decît să luăm $v = c$ și w oarecare, pozitiv. Relativist însă, dacă $v = c$, din (4.9′) rezultă și $w = c$, oricare ar fi cealaltă viteză; w_y și w_z se anulează.

b) *Succesiunea evenimentelor.* Fie în sistemul O un fenomen, de exemplu un semnal care pornește din A $(x = x_A)$ și se propagă cu viteza V pînă în $B(x = x_B)$. El va ajunge în B după timpul:

$$\Delta t = \frac{x_B - x_A}{V} .$$

În sistemul O' vom avea, după relațiile (4.9′):

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \Delta t \frac{1 - \frac{vV}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} .$$

Deci, dacă $V > c$, atunci $\Delta t'$ poate avea o valoare negativă pentru V suficient de mare. Aceasta ar însemna însă că ceea ce în O este efect, poate să devină în O' cauză, prin schimbarea succesiunii în timp. Or, acesta contrazice postulatul de menținere a principiului de cauzalitate, care stă la baza mecanicii relativiste, ca și în mecanica newtoniană.

Capitolul V

DINAMICA RELATIVISTĂ

444. Ecuația fundamentală a mecanicii relativiste. Știm că mecanica newtoniană este valabilă numai pentru viteze mici în comparație cu viteza luminii, în care caz transformările lorentziene se reduc la transformările galileiene, care lasă invariantă ecuația newtoniană:

$$m\bar{a} = \bar{F} . \quad (5.1)$$

Deci, dacă într-un sistem de referință O' mobilul are o mișcare suficient de înceată, astfel încît viteza lui să fie foarte mică față de c pentru această mișcare, în O' va fi valabilă ecuația clasică (5.1).

Însemnăm cu m_0 masa unui punct material cînd acesta este în repaus (ori se mișcă foarte încet) și numim acest coeficient *masă de repaus*. Ecuațiile de mișcare sînt, în O':

$$m_0 \frac{d^2x'}{dt'^2} = F'_x \; ; \; m_0 \frac{d^2y'}{dt'^2} = F'_y \; ; \; m_0 \frac{d^2z'}{dt'^2} = F'_z . \quad (5.2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ne punem întrebarea: dacă sistemul O' se află în mișcare rectilinie și uniformă cu viteza v față de sistemul O, ce devin ecuațiile (5.2) raportate la sistemul de coordonate O?

Pentru a răspunde acestei întrebări trebuie să stabilim legile de *transformare a accelerațiilor* (analoge cu legile (4.9) de transformare a vitezelor).

Derivăm încă o dată ecuațiile (4.9); obținem:

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{dq'_x}{dt'} = \frac{dq'_x}{dt}\frac{dt}{dt'} = \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{d^2x}{dt^2}\,\frac{1}{\left(1-\frac{v}{c^2}q_x\right)^3}.$$

Dar cum mobilul se mișcă extrem de încet în sistemul O', rezultă că viteza lui față de O va fi $q_x \approx v$. Deci:

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}}\frac{d^2x}{dt^2}\,;\quad \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{1}{1-\beta^2}\frac{d^2y}{dt^2}\,;\quad \frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{1}{1-\beta^2}\frac{d^2z}{dt^2}\,. \tag{5.3}$$

Aceste relații exprimă legile de transformare a accelerațiilor.

În ceea ce privește legea de transformare a forțelor care solicită un punct material, trebuie să ne reamintim programul enunțat de E i n s t e i n, prin care, contrar predecesorilor săi, el *subordonează fenomenele materiale celor electromagnetice*. Faptul nu prezintă, evident, nimic arbitrar; în adevăr, ne putem imagina că o forță mecanică face echilibrul unei forțe electrice în mișcarea unei particule materiale încărcate electric. Fenomenul nu depinde de observator, ci este invariant față de sistemele de referință.

Prin urmare, conform programului stabilit, care stă la baza teoriei relativiste einsteiniene, este indicat să admitem că *forțele de natură mecanică posedă aceleași legi de transformare ca și forțele de natură electromagnetică* (forțele generalizate ale lui H. A. L o r e n t z). Or, în teoria relativistă a cîmpurilor electromagnetice se demonstrează că forțele electromagnetice se transformă după relațiile:

$$F'_{x'} = F_x\,;\quad F'_{y'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}F_y\,;\quad F'_{z'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}F_z \tag{5.4}$$

pe care, așadar, le admitem drept *legi de transformare a forțelor mecanice*. În aceste condiții, ecuațiile (5.2), ținînd seamă de relațiile (5.3) și (5.4), devin, pentru sistemul O:

$$\frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}}\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\,;\quad \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{1/2}}\frac{d^2y}{dt^2} = F_y\,;\quad \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{1/2}}\frac{d^2z}{dt^2} = F_z\,; \tag{5.5}$$

care formulează *ecuațiile de mișcare a punctului material* cu masă în repaos m_0, față de sistemul în repaos O și constituie legea fundamentală a mecanicii relativiste care generalizează legea clasică a mecanicii lui N e w t o n (5.1). Caracterul general al ecuațiilor (5.5) iese mai clar în evidență după ce se formulează aceste ecuații prin *teorema impulsului* generalizat.

Scanned with OKEN Scanner

445. **Masa longitudinală şi masa transversală.** Fie m_0 masa de repaus a unei particule materiale. Se defineşte drept masă longitudinală (m_l), transversală (m_{tr}) şi de mişcare (m) prin relaţiile următoare:

$$m_l = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}} \quad ; \quad m_{tr} = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{1/2}} \quad ; \quad m = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{1/2}} .$$

Observăm că masa m_l apare în componenta longitudinală a mişcării; introducerea noţiunii de „masă de mişcare" m, simplifică distincţia dintre m_l şi m_{tr}.

446. **Reducerea la unitatea de volum.** Este necesar uneori să se scrie legile de transformare a acceleraţiilor şi forţelor *reduse la unitatea de volum*. Atunci trebuie să observăm că volumul se transformă după relaţia:

$$V' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} V.$$

Aceasta înseamnă că, pentru a obţine relaţiile de transformare la unitatea de volum, trebuie să împărţim peste tot cu $1/\sqrt{1-\beta^2}$; ceea ce ne dă formulele de transformare ale acceleraţiilor reduse la unitatea de volum:

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{1}{1-\beta^2}\frac{d^2x}{dt^2} \; ; \quad \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d^2y}{dt^2} \; ; \qquad (5.3')$$

$$\frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d^2z}{dt^2} .$$

Dar atunci şi forţele trebuie considerate ca forţe mecanice, raportate la unitatea de volum. Ne putem folosi de faptul că aceste forţe au caracter vectorial covariant şi, prin urmare, se transformă ca şi coordonatele (v. Anexa III, § 58), aşadar:

$$F'_{x'} = \frac{F_x - vF_t}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad F'_{y'} = F_y \; ; \quad F'_{z'} = F_z \; ; \quad F'_{t'} = \frac{F_t - \frac{v}{c^2}F_x}{\sqrt{1-\beta^2}} . \qquad (5.4')$$

Dar, în sistemul O' (repaus) domină legile clasice $F'_{t'} = 0$; de unde rezultă $F_t = \frac{v}{c^2}F_x$; deci F_t nu este componentă independentă.

În aceste condiţii, legile de transformare (5.4'), devin:

$$F'_{x'} = \sqrt{1-\beta^2}\,F_x \; ; \quad F'_{y'} = F_y \; ; \quad F'_{z'} = F_z . \qquad (5.4'')$$

Înlocuind (5.3') şi (5.4'') în (5.2), regăsim ecuaţiile (5.5) ceea ce era de aşteptat.

447. **Teorema impulsului.** Masa de mişcare definită prin relaţia de la § 445 este:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} . \qquad (5.6)$$

Admitem că viteza v (variabilă pentru punctul în mişcare) posedă componente pe toate trei direcţii (nu numai pe direcţia axei x; ceea ce înseamnă

Scanned with OKEN Scanner

că trecem la cazul general al mișcării de direcție oarecare), numim *impuls* mărimea:

$$m\bar{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\bar{v}\,.$$

Ecuațiile de mișcare (5.5) se vor putea scrie vectorial:

$$\frac{d}{dt}(m\,\bar{v}) = \bar{F}\,, \tag{5.7}$$

sau explicit:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\bar{v}\right) = \bar{F}\,. \tag{5.7'}$$

Pusă în această formă, ecuația de mișcare se prezintă sub aspectul generalizat al principiului newtonian, enunțat, precum știm, numai pentru punctul material de masă *constantă*. Acest rezultat evidențiază universalitatea principiului newtonian (legea a doua a impulsului).

Relația (5.6) a dat naștere la organizarea de experiențe menite să verifice consecințele ce decurg din noua concepție. Reamintim experiențele lui W. K a u f m a n n (1906) și A. H. B u c h e r e r (1908). Ulterior, experiențele au fost reluate și verificarea se confirmă cu mai multă precizie [1]).

448. **Energia proprie a punctului material.** Înmulțind în ecuația (5.7) scalar cu $\bar{v}$, obținem:

$$\bar{v}\frac{d}{dt}(m\,\bar{v}) = \bar{F}\,\bar{v} = \frac{dU}{dt}\,,$$

dU fiind lucrul mecanic elementar al forțelor aplicate. Așadar:

$$-\,U = E_p \quad \text{(energia potențială)}.$$

Observăm însă că, după (5.6): $\frac{dm}{dt} = \frac{m}{c^2-v^2}v\frac{dv}{dt}$; sau $\frac{d}{dt}(mc^2) = \frac{dU}{dt}$; (5.7'')

rezultă:

$$E = mc^2 = m_0c^2 + U + W \quad (\text{const}), \tag{5.8}$$

unde însemnăm cu mc^2 *energia de mișcare* și cu m_0c^2 *energia de repaus*. Rezultă că W reprezintă energia totală. Relația (5.8) constituie integrala primă a energiei.

449. **Energia cinetică.** Aceasta se obține prin diferența între energia proprie de mișcare și energia de repaus:

$$E_c = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \tag{5.9}$$

---

[1]) v. *M. M. Rogers, A. W. Mc. Reynolds and F. T. Rogers Jr.* „A Determination of the Masses and Velocities of Three Radium B Beta-Particles. — The Relativistic Mass of the Electron — " Physical Review, vol. 57, 1940, p. 379.

Așa fiind, relația (5.8) se poate scrie:

$$E_c + E_p = W \text{ (const)}$$

exprimînd ecuația de conservare a energiei totale a sistemului.

În cazul newtonian, neglijînd pe v^2/c^2 față de termenii finiți, se obține din (5.9):

$$E_c = \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} + \ldots \right);$$

de unde rezultă, în primă aproximație, expresia clasică a energiei cinetice:

$$E_{c.\,cl.} = \frac{m_0}{2} v^2 .$$

450. **Inerția energiei. Masa energetică.** Din relația (5.8), care exprimă energia proprie de mișcare, E, putem defini, invers, masa de mișcare ca o mărime energetică și putem scrie:

$$E = mc^2 \; ; \quad m = \frac{E}{c^2},$$

și putem interpreta energia E ca fiind de origine inerțială (masa înmulțită cu c^2), sau masa m ca fiind de origine energetică (energia împărțită cu c^2). Aceste relații sînt de importanță capitală în toată fizica modernă — cu deosebire în fenomenele nucleare de dezagregare și de transmutare, respectiv teoriile de structură a nucleului atomic.

451. **Aplicație cuantică.** Teoria *structurii fine* a liniilor spectrale se reduce la studiul mișcării planetare, după ecuația relativistă. Forța fiind coulombiană, ecuația mișcării se scrie:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\bar{r}}) = -\frac{Ze^2}{r^3}\bar{r} \tag{5.10}$$

Z fiind numărul atomic. Trebuie să transformăm (5.10) într-o ecuație similară ecuației lui B i n e t. Pentru aceasta, observăm mai întîi că este satisfăcută legea ariilor. În adevăr, înmulțind (5.10) vectorial cu $\bar{r}$, momentul forței $\bar{F}$ în raport cu originea este nul. Rezultă:

$$\bar{r} \times \frac{d}{dt}(m\dot{\bar{r}}) = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\dot{\bar{r}}) = 0,$$

deci : $\bar{r} \times m\dot{\bar{r}} = \text{const.}$ În coordonate polare :

$$mr^2\dot{\theta} = p, \tag{5.11}$$

unde $m = m_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$, iar p este constanta ariilor. Observăm că:

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r^2}{c^2}\dot{\theta}^2 = \frac{p^2}{m^2c^2}\left[\left(\frac{1}{r}\right)'^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right],$$

și ținem seama de (5.11) însemnînd cu accent derivata în raport cu θ, așa cum se face în calculul clasic al formulei lui Binet.

Scanned with OKEN Scanner

Să însemnăm pentru prescurtare $1 : r = s$. Înlocuind pe m, avem:

$$\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{p^2}{m_0^2 c^2}(s'^2 + s^2),$$

și derivînd încă o dată în raport cu s:

$$\frac{\beta\beta'}{(1-\beta^2)^2} = \frac{p^2}{m_0^2 c^2}(s'' + s)\, s'. \tag{5.12}$$

Observăm că ecuația de mișcare (5.10) scrisă sub forma (5.7''), devine:

$$\frac{d}{dt}(mc^2) = \frac{dU}{dt} = -\frac{Ze^2}{r^3}\dot{r};$$

sau, derivînd în membrul întîi masa m, obținem pentru ecuația precedentă:

$$\frac{m_0 c^2 \beta\beta'}{(1-\beta^2)^{3/2}} = -\frac{Ze^2}{r^2}\dot{r} = +Ze^2 s',$$

sau, observînd că: $\beta = \beta' \frac{p}{m}$, urmează:

$$\frac{m_0 c^2 \beta\beta' p}{m^2 (1-\beta^2)^{3/2}} = \frac{pZe^2 s'}{mr^2}$$

deci:

$$m_0 c^2 \frac{\beta\beta'}{(1-\beta^2)^{3/2}} = Ze^2 s'. \tag{5.13}$$

Observăm că ecuația energiei: $mc^2 = m_0 c^2 + U + W$, ne dă:

$$mc^2 = m_0 c^2 + \frac{Ze^2}{r} + W,$$

de unde:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{W}{m_0 c^2} + \frac{Ze^2}{m_0 c^2} s. \tag{5.14}$$

Înmulțind membru cu membru ecuația (5.13) cu (5.14), obținem:

$$m_0 c^2 \frac{\beta\beta'}{(1-\beta^2)^2} = \left(1 + \frac{W}{m_0 c^2} + \frac{Ze^2}{m_0 c^2} s\right) Ze^2 s'. \tag{5.15}$$

Comparînd ecuația (5.12) cu ecuația (5.15) găsim:

$$p^2 (s'' + s)\, s' = m_0 Ze^2 \left(1 + \frac{W}{m_0 c^2} + \frac{Ze^2}{m_0 c^2} s\right) s'.$$

Simplificînd cu s' și făcînd notațiile:

$$\gamma^2 = 1 - \frac{Z^2 e^4}{c^2 p^2} = 1 - \frac{p_0^2}{p^2}; \quad \frac{1}{P} = \frac{m_0 Ze^2}{p^2 \gamma^2}\left(1 + \frac{W}{m_0 c^2}\right),$$

găsim ecuația diferențială a mișcării relativiste:

$$\left(\frac{1}{r}\right)'' + \gamma^2 \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\gamma^2}{P}, \tag{5.16}$$

Scanned with OKEN Scanner

analogă ecuației lui B i n e t, nerelativistă. Dacă punem $P = a(1 - \varepsilon^2)\gamma^2$ și $w = \theta - \theta_0$ (anomalia adevărată), integrala generală a ecuației (5.16) este:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon \cos(\gamma w)}{a(1 - \varepsilon^2)}. \tag{5.17}$$

Traiectoriile stabile se deduc, așadar, exact în același mod ca și în cazul newtonian, din condițiile de cuantizare:

$$\oint p_w \, dw = n_\varphi h; \quad \oint p_r \, dr = n_r h. \tag{5.18}$$

Pentru fixarea limitelor de integrare, din cauza apariției unghiului (γw) observăm că mobilul va ajunge la perihelia următoare, pe traiectorie, după unghiul (raportat la axele fixe) $w = 2\pi : (\gamma - 2\pi)$ și nu după 2π cum este în cazul nerelativist. Așadar, perihelia traiectoriei efectuează o mișcare de rotație în sensul mișcării mobilului pe traiectorie, cu viteza unghiulară $\Delta w = 2\pi : (\gamma - 2\pi)$, perioada corespunzătoare lui w față de axele mobile ale elipsei fiind 2π.

Este interesant de observat că o astfel de deplasare a periheliei există în mișcarea planetelor, efectul observabil fiind apreciabil numai la planeta Mercur. Observațiile astronomice indică o deplasare a periheliei lui Mercur, în sensul mișcării pe traiectorie (avansare) de 45″ pe secol. Traiectoria (5.17) a mișcării coulombiene calculează doar 7″ pe secol (v. problema 300). Prin calcul, sub regimul forței newtoniene — care se acordă cu legea de mișcare a planetelor — se găsește o jumătate din valoarea experimentală.

Teoria relativității generale regăsește aproape valoarea experimentală, dacă se ține seamă de erorile de observație, anume 43″ pe secol.

Revenind la problema noastră, limitele integralelor (5.18) vor fi: pentru anomalia adevărată o perioadă, adică $(0, 2\pi)$; iar pentru o mișcare completă, de la r_{per} $(\varphi = 0)$ pînă la următoarea r_{per} $(\varphi = \pi)$, așadar:

$$\int_0^{2\pi} p_w \, dw = n_\varphi h; \quad \int_{\varphi=\gamma w=0}^{2\pi} p_r \, dr = n_r h. \tag{5.19}$$

Calculul integralelor precedente se efectuează ca și în cazul nerelativist. Să calculăm pe p_w și p_r.

Prima ecuație de condiția (5.19) ne dă imediat:

$$p = n_\varphi \frac{h}{2\pi} = n_\varphi \hbar,$$

iar a doua:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - 1 = \frac{n_r}{n_\varphi \gamma}$$

sau:

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{n_r^2 \gamma^2}{(n_r + n_\varphi \gamma)^2}.$$

Prin aceasta am determinat, din mulțimea traiectoriilor posibile, numai acele traiectorii pentru care mișcarea este staționară. Apariția mărimii $n_\varphi \gamma$ schimbă esențial rezultatul, față de cazul nerelativist. În adevăr:

$$n_\varphi \gamma = \sqrt{n_\varphi^2 - \frac{(n_\varphi p_0)^2}{p^2}} = \sqrt{n_\varphi^2 - \left(\frac{e^2 Z}{\hbar c}\right)^2} = \sqrt{n_\varphi^2 - Z^2 \alpha^2},$$

Scanned with OKEN Scanner

făcînd notația:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

numită constanta structurii fine sau constanta lui Sommerfeld. În acest caz:

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{n_\varphi^2 - Z^2\alpha^2}{(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - Z^2\alpha^2})^2}. \tag{5.20}$$

Să trecem acum la *calculul energiei totale* pe traiectoria staționară. Relația (5.12) ne dă:

$$1 + \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta^2} = 1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}(s'^2 + s^2).$$

Expresia energiei cinetice este:

$$E_c = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = m_0c^2\left(\sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}(s'^2 + s^2)} - 1\right).$$

Energia potențială este:

$$E_p = -\frac{Ze^2}{r}.$$

Ecuația energiei: $E_c + E_p = W$ ne dă, înlocuind expresiile lui s' și s din ecuația traiectoriei (5.16):

$$\sqrt{1 + \frac{p^2[(1+\varepsilon\cos\varphi)^2 + \varepsilon^2\gamma^2\sin^2\varphi]}{m_0^2 c^2 a^2 (1-\varepsilon^2)}} - \frac{Ze^2(1+\varepsilon\cos\varphi)}{a(1-\varepsilon^2)m_0c^2} = 1 + \frac{W}{m_0c^2}.$$

Notăm, pentru prescurtarea scrisului:

$$A = \frac{p^2}{a^2(1-\varepsilon^2)m_0c^2}; \quad B = \frac{Ze^2}{a(1-\varepsilon^2)m_0c^2}; \quad C = 1 + \frac{W}{m_0c^2};$$

izolăm radicalul și ridicăm la pătrat; obținem:

$$1 + A(1 + 2\cos\varphi)^2 + A\varepsilon^2\gamma^2 - A\varepsilon^2\gamma^2\cos^2\varphi - 2BC(1 + \varepsilon\cos\varphi) - \\ - B^2(1 + \varepsilon\cos\varphi) - C^2 = 0, \tag{5.21}$$

expresie care nu trebuie să depindă de φ. Coeficientul lui $\cos^2\varphi$, egalat cu zero, dă:

$$\varepsilon^2 A - A\varepsilon^2\gamma^2 - B^2\varepsilon^2 = 0, \text{ sau: } A(1-\gamma^2) = B^2$$

care este o identitate.

Coeficientul lui $\cos\varphi$ egalat cu zero ne dă relația:

$$2\varepsilon A - 2B^2\varepsilon - 2BC\varepsilon = 0, \text{ sau: } B\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} = C.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din aceste relații se obține:

$$a = \frac{\hbar^2}{m_0 Ze^2 C}\left(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - Z^2\alpha^2}\right)^2, \tag{5.22}$$

care ne dă lungimea semiaxei mari a traiectoriei relativiste.

Dacă egalăm cu zero coeficientul liber din relația (5.21), obținem:

$$1 + A + A\varepsilon^2\gamma^2 - 2BC - B^2 - C^2 = 0,$$

și făcînd înlocuirile, găsim:

$$C^2\left[1 + \frac{Z^2\alpha^2}{\left(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - Z^2\alpha^2}\right)^2}\right] = 1;$$

de unde:

$$1 + \frac{W}{m_0 c^2} = \left[1 + \frac{Z^2\alpha^2}{\left(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - Z^2\alpha^2}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.23}$$

Este evident că pentru $c = \infty$, adică $\alpha = 0$, toate aceste formule se transformă în formulele corespunzătoare nerelativiste.

Formula care ne dă relația cuantică se obține scriind legea frecvențelor după B o h r:

$$h\nu = W_n - W_m.$$

Obținem, pentru cazul relativist de față, formula lui Sommerfeld:

$$\nu = 2R\left\{\left[1 + \frac{Z^2\alpha^2}{\left(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - Z^2\alpha^2}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} - \left[1 + \frac{Z^2\alpha^2}{\left(m_r + \sqrt{m_\varphi^2 - Z^2\alpha^2}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}, \tag{5.24}$$

unde am notat constanta lui R y d b e r g cu:

$$R = \frac{4\pi^2 m_0 c^4}{h^3} \tag{5.25}$$

ca și în teoria clasică. Se vede că formula (5.24) nu cuprinde exclusiv combinația $n_\varphi + n_r$, ca în cazul clasic ci, la fiecare valoare întreagă a lui $n = n_\varphi + n_r$ obținem diverse linii spectrale, după cum variem cu numere întregi pe n_φ și n_r separat. Prin aceasta, formula (5.24) ne redă dungile structurii fixe, adică sateliții dungii principale corespunzătoare unui n (întreg) dat. Teoria precedentă se datorește lui A. S o m m e r f e l d.

452. **Oscilatorul liniar relativist**[1]). Considerăm cazul unui oscilator liniar a cărui masă variază după legea relativistă (§ 447, formula 5.6):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c} \tag{5.26}$$

unde: m_0 este masa de repaus; v este viteza momentană a mobilului; c este viteza luminii în vid.

---

[1]) *R. Penfield și H. Zatzkis*, Journal of the Franklin Institute; V. 262, 1956, p. 121.

Notăm cu x deplasarea momentană din poziția de echilibru, cu a amplitudinea oscilației; cu v_0 viteza maximă; cu $\varkappa^2$ constanta forței elastice de rapel, constantă; cu t timpul; cu $\omega_0 = \sqrt{\frac{\varkappa^2}{m_0}}$ frecvența proprie clasică și cu T perioada.

Aplicăm teorema energiei: creșterea energiei cinetice:

$$E_c = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \tag{5.27}$$

este egală cu descreșterea energiei potențiale:

$$E_p = \frac{1}{2} \varkappa^2 x^2 ; \quad \text{deci:} \quad \delta E_p = - \delta E_c ;$$

ceea ce ne conduce la relația:

$$\frac{1}{2} \varkappa^2 x^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \tag{5.28}$$

Condiția limită: pentru $v = 0$, $x = a$, ne conduce la relația:

$$\frac{1}{2} \varkappa^2 a^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} - 1 \right), \tag{5.29}$$

de unde:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{\omega_0^2 a^2 + 2c^2}{2c^2} .$$

Cu această valoare, ecuația (5.28) ne dă:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\omega_0^2 (a^2 - x^2) + 2c^2}{2c^2} . \tag{5.30}$$

Este convenabil să se introducă distanța nedimensională $z = \frac{x}{a}$ și timpul nedimensional $\tau = \omega_0 t$. Ecuația (5.30) devine astfel:

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{c \sqrt{(1 - z^2) [\omega_0^2 a^2 (1 - z^2) + 4c^2]}}{\omega_0^2 a^2 (1 - z^2) + 2c^2}$$

și deci:

$$\tau = \frac{1}{c} \int_{w=0}^{w=z} \frac{\omega^2 a^2 (1 - w^2) + 2c^2}{\sqrt{(1 - w^2) [\omega_0^2 a^2 (1 - w^2) + 4c^2]}} dw. \tag{5.31}$$

Ecuația (5.31) ne arată că timpul este o integrală eliptică în funcție de deplasare și invers, deplasarea este o funcție eliptică de timp. Perioada

Scanned with OKEN Scanner

oscilației este dată prin integrarea ecuației (5.31) de la $z = 0$ până la $z = 1$:

$$T = \frac{4}{c\omega_0} \int_{z=0}^{z=1} \frac{\omega_0^2 a^2 (1 - z^2) + 2c^2}{\sqrt{(1 - z^2)[\omega_0^2 a^2 (1 - z^2) + 4c^2]}} dz. \tag{5.32}$$

Integrala se simplifică punînd $z = \sin\theta$; se obține:

$$T = \frac{4}{c\omega_0} \int_{0=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_0^2 a^2 \cos^2\theta + 2c^2}{\sqrt{4c^2 + \omega_0^2 a^2 \cos^2\theta}} d\theta \tag{5.33}$$

care se descompune într-o sumă de două integrale eliptice:

$$T = \frac{4A}{c\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}\, d\theta - \frac{8c}{A\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} =$$

$$= \frac{4}{Ac\omega_0} \left[A^2 E(k) - 2c^2 D(k) \right], \tag{5.34}$$

unde: $$k = \frac{\omega_0^2 a^2}{4c^2 + \omega_0 a^2}; \quad A^2 = 4c^2 + \omega_0^2 a^2;$$

$E(k)$ este integrala eliptică de speța a doua și $D(k)$ integrala eliptică de prima speță.

Ecuația (5.34) este similară ca structură cu formula perioadei T a pendulului de lungimea l și amplitudinea unghiulară finită θ_0:

$$T^* = \frac{2T_0}{\pi} D(k') \tag{5.35}$$

unde: $$k' = \sin\frac{\theta_0}{2}; \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{5.36}$$

Există însă deosebiri însemnate între formulele (5.34) și (5.35).

1. Perioada T depinde de două integrale eliptice diferite. În ecuația (5.35) perioada T^* depinde de amplitudinea θ_0 prin k'; pe cînd în cazul relativist, k este funcție nu numai de a ci și de ω_0. Dezvoltînd relațiile (5.34) și (5.35) în serii Taylor, primii termeni ne dau:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{3\pi^2 a^2}{4c^2 T_0^2}\right) \tag{5.37}$$

$$T^* = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right). \tag{5.38}$$

Aceste oscilații se pot asimila cu oscilațiile unui pendul de frecvență ω_0; amplitudinea unghiulară fiind în cea mai joasă aproximație:

$$\theta_0 = \frac{a}{l} \quad \text{și} \quad \frac{\pi^2 a^2}{T_0^2} = \frac{g l \theta_0^2}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Introducînd aceste valori în (5.37) și (5.38), găsim:

$$T = T_0\left(1 + \frac{3gl\theta_0^2}{16c^2}\right) \tag{5.39}$$

$$T^* = T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right). \tag{5.40}$$

Fie: $$T - T_0 = \delta T\,; \qquad T^* - T_0 = \delta T^*\,;$$

avem: $$\frac{\delta T}{\delta T^*} = \frac{3gl}{c^2} \tag{5.41}$$

ceea ce ne arată că variația frecvenței datorită variabilității masei este mult mai slabă decît cea datorită valorii finite a amplitudinii.

Să calculăm mișcarea particulei în același grad de aproximație în care s-a luat ecuația (5.35). Introducem parametrul de micime:

$$\lambda = \frac{\alpha\omega_0}{2c}\,; \qquad k^2 = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\,.$$

și numai pentru primul termen din seriile Taylor are loc egalitatea $k^2 = \lambda^2$.

Dacă integrăm ecuația (5.31) în aceeași aproximație, se obține:

$$\omega_0 t = \theta\left(1 + \frac{3}{4}\lambda^2\right) + \frac{3}{8}\lambda^2 \sin 2\theta\,.$$

Pentru t mare, se obține aproximația:

$$\omega_0 t = \theta\left(1 + \frac{3}{4}\lambda^2\right)$$

sau: $$\theta = \omega_0 t\left(1 - \frac{3}{4}\lambda^2\right)$$

și deci: $$\sin\theta = \frac{x}{a} = \sin\left[\omega_0\left(1 - \frac{3}{4}\lambda^2\right)t\right]$$

ceea ce ne dă elongația:

$$x = a\sin\left[\omega_0\left(1 - \frac{3}{4}\lambda^2\right)t\right] \tag{5.42}$$

rezultat care generalizează expresia oscilațiilor armonice cu masă constantă.

Aplicarea metodei Krîlov-Bogoliubov. Aceeași problemă a fost tratată de Șt. Gheorghiță[1]), care într-o primă aproximație pune ecuația relativistă sub forma:

$$m\ddot{x} + kx\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right) = 0 \tag{5.43}$$

și o integrează prin metoda lui Krîlov și Bogoliubov (§ 71), aplicată ecuațiilor de clasa studiată de acești autori:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = 0. \tag{5.44}$$

---

[1]) *Șt. Gheorghiță.* Rev. Univ. C. I. Parhon și a Politehnicii București, nr.2, 1953, p. 19.

Punînd în (5.44):

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\,; \qquad \varepsilon = \frac{3\omega^2}{2c^2} \ll 1\,; \qquad f(x, \dot{x}) = -\,x\dot{x}^2 \tag{5.45}$$

se obține (5.43). Se apreciază că pentru oscilatorii armonici, ε este de ordinul de mărime $10^{-16}...10^{-18}$; ceea ce înseamnă că neliniaritatea resortului întrece neliniaritatea masei. Pentru ca teoria să fie aplicabilă în acest caz, trebuie ca ε să fie de ordinul $10^{-1,3}...10^{-3}$.

În acest caz, mișcarea descrisă de ecuația (5.43) este indiferentă ca și în cazul oscilatorului armonic.

După autorii citați, soluția ecuației (5.43) este, în primă aproximație (§ 71):

$$x = a\sin(\omega t + \varphi) - \frac{\varepsilon}{\omega^2} f_0(a) + \frac{\varepsilon}{\omega^2} \sum_{n=2} \frac{f_n \cos n(\omega t + \varphi) + g_n \sin n(\omega t + \varphi)}{n^2 - 1} \tag{5.46}$$

unde $f_n (n = 0, 1, 2,...)$ și $g_n (n = 1, 2,...)$ sînt coeficienții dezvoltării în serie Fourier a funcției f dată de (5.45), unde se înlocuiește x și $\dot{x}$ cu expresiile care rezultă din rezolvarea ecuației (5.43), punînd $\varepsilon = 0$; adică:

$$f[a\sin(\omega t + \varphi),\ a\omega\cos(\omega t + \varphi)] =$$

$$= f_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [f_n \cos n(\omega t + \varphi) + g_n(a) \sin n(\omega t + \varphi)]$$

iar a și φ satisfac ecuațiile:

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{2\omega} f_1(a); \qquad \dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{2a\omega} g_1(a). \tag{5.47}$$

În cazul de față, punînd $\alpha = \omega t + \varphi$ deducem:

$$f(a\sin\alpha,\ a\omega\cos\alpha) = -\,a^3\omega^2 \sin\alpha\cos^2\alpha.$$

Dezvoltarea în serie Fourier a lui f se obține ușor observînd că:

$$\sin\alpha\cos^2\alpha = \frac{1}{4}(\sin\alpha + \sin 3\alpha).$$

Toți coeficienții f_n sînt nuli, iar g_n sînt nuli în afară de:

$$g_1 = g_3 = \frac{-a^3\omega^2}{4}.$$

Din (5.47) rezultă: $\dot{a} = 0$; $\dot{\varphi} = -\,\varepsilon\frac{a^2\omega}{8}$.

A doua ecuație ne dă: $\varphi = -\,\varepsilon\frac{a^2\omega}{8}t + \varphi_0$.

Soluția (5.46) devine, punînd:

$$\psi = \omega\left(1 - \varepsilon\frac{a^2}{8}\right):$$

$$x = a\sin(\psi t + \varphi_0) - \varepsilon\frac{a^3}{32}\sin 3(\psi t + \varphi_0).$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuația precedentă rezultă că, în prima aproximație, oscilatorul studiat are următoarele caracteristici:

a) amplitudinea mișcării este aceeași ca și în cazul $\varepsilon = 0$;

b) frecvența se micșorează, raportul frecvenței relativiste față de frecvența clasică este:

$$1 - \frac{3}{16}\frac{\omega^2 a^2}{c^2} = 1 - \frac{3}{16}\frac{ka^2}{m_0 c^2} < 1;$$

ceea ce este explicabil fizicește: masa relativistă de mișcare fiind mai mare ca masa de repaus, frecvența scade.

Observație. În problemele (295) și (296) este tratată problema oscilatorului plan (bidimensional) în cazul relativist.

NOTĂ

Principiul unei mecanici a sistemelor dinamice inerțiale [1])

a) *Generalități asupra sistemelor mecanice.* În mecanica clasică newtoniană, mecanicile cuantice, mecanica relativității restrînse, se tratează sistemele gravitaționale distinct de sistemele gravifice care și-au găsit formularea — separată — în relativitatea generalizată einsteiniană. În lucrarea de față se încearcă a se construi o mecanică a sistemelor mecanice inerțiale care să înglobeze cîmpul gravific pornindu-se de la anumite postulate fundamentale.

Un sistem cu n grade de libertate este considerat ca dinamic definit, în fiecare moment t, prin parametrii de poziție și impulsurile q^i, p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ și de o funcție de stare $f\ (q,\ p,\ t)$ supusă la condițiile:

$$\dot{q}^i = -\frac{\partial f}{\partial p_i}\ ; \qquad \dot{p}_i = \frac{\partial f}{\partial q^i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{1}$$

Această condiție (1) echivalează cu următorul principiu: operatorul diferențial „d" caracterizează mișcarea sistemului dacă derivata exterioară $d\Omega_\delta - \delta\Omega_d$ a formei fundamentale:

$$\Omega_\delta = \sum_i p_i \delta q^i + f\delta t \tag{2}$$

este nulă, oricare ar fi δ.

Pentru fiecare sistem dinamic material, alegerea parametrilor de poziție q, a impulsurilor p și a funcției de stare f se face, ținîndu-se seamă de condițiile fizice ale sistemului, cu ajutorul unui grup de postulate pe care le indicăm aici numai pentru cazul punctului material și pentru un sistem format de două puncte materiale în mișcare inerțială (problema celor două corpuri).

b) *Mișcarea inerțială a unui punct material.* Postulatul 1. Punctul material izolat în spațiu este un sistem dinamic definit, olonom, cu trei grade de libertate.

Descrierea mișcării este deci realizată cu ajutorul a trei parametri de poziție q^1, q^2, q^3, a trei impulsuri p_1, p_2, p_3 și a funcției de stare $f\ (q^1, q^2, q^3;\ p_1, p_2, p_3;\ t)$, cu aplicarea principiului (1).

---

[1]) *O. Onicescu*, „O mecanică nouă a sistemelor materiale". Revista Universității C. I. Parhon, nr. 3, București, 1953.

Scanned with OKEN Scanner

Postulatul 2. Spațiul mișcării este euclidian, ceea ce face ca prin notațiile cartesiene să putem pune pentru vectorul de poziție $\bar{\rho}(x, y, z)$ și impulsul $\bar{\pi}(p, q, r)$:

$$q^1 = x, \quad q^2 = y, \quad q^3 = z; \quad p_1 = p, \quad p_2 = q, \quad p_3 = r.$$

Postulatul 3. Funcția de stare a punctului material izolat este un scalar care depinde de vectorul impuls $\bar{\pi}$ sub forma $f = f(p^2 + q^2 + r^2)$.

Ținînd seamă de postulatul 1 și de faptul că sînt aplicabile ecuațiile (1), rezultă imediat că:

$$\bar{\pi} = m\dot{\bar{\rho}} \tag{3}$$

unde: $$m = -\frac{1}{2f'}; \qquad f' = \frac{df(\xi)}{d\xi}.$$

Postulatul 4. Forma Ω_δ este invariantă pentru transformările care corespund deplasărilor reperului legat de punctul de mișcare. Rezultă imediat că:

$$\delta t_0 = \frac{f}{f_0}\left(\delta t + \frac{m}{f}\dot{\bar{\rho}}\,\delta\bar{\rho}\right) \tag{4}$$

unde prin indicele (0) se indică starea de repaus.

Postulatul 5. Raportul f/m este o constantă negativă pe care o notăm cu $-\omega^2$. Este clar că ω reprezintă o viteză.

Acest postulat corespunde uniformității spațiului relativ la punctul în mișcare. Din aceste condiții rezultă:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}}; \quad f = -m\omega^2; \quad f_0 = -m_0\omega^2, \tag{5}$$

de unde rezultă semnificația fizică a mărimilor: m ca masă de mișcare, m_0 ca masă de repaus și $\omega = c$ viteza luminii în vid, în conformitate cu rezultatele relativității restrînse.

c) *Mișcarea inerțială a unui sistem de două puncte materiale.* Primele trei postulate indică în acest caz că poziția sistemului este determinată cu ajutorul vectorilor de poziție $\bar{\rho}_1\,(x_1, y_1, z_1)$ și $\bar{\rho}_2\,(x_2, y_2, z_2)$, a vectorilor impuls $\bar{\pi}_1\,(p_1, q_1, r_1)$ și $\bar{\pi}_2\,(p_2, q_2, r_2)$ și funcția $f = f\,[(p_1^2 + q_1^2 + r_1^2), (p_2^2 + q_2^2 + r_2^2), (p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2); r]$ căci $p_1^2 + q_1^2 + r_1^2$; $p_2^2 + q_2^2 + r_2^2$ și $p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2$ sînt cei trei invarianți euclidieni ai sistemului de doi vectori $\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2$. iar $r = |\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1|$ este distanța dintre cele două puncte.

Aceste diverse elemente sînt legate prin sistemul de ecuații (1).

Forma Ω_δ devine în aceste condiții:

$$\Omega_\delta = m_1\dot{\bar{\sigma}}_1\,\delta\bar{\sigma}_1 + m_2\dot{\bar{\sigma}}_2\delta\bar{\sigma}_2 + \mu\left(\dot{\bar{\sigma}}_1\,\delta\bar{\sigma}_2 + \dot{\bar{\sigma}}_2\,\delta\bar{\sigma}_1\right), \tag{6}$$

unde:

$$(d\bar{\sigma})^2 = \Phi\, d\bar{\rho}^2 - c^2\psi\, dt^2$$
$$d\bar{\sigma}_1 \delta\bar{\sigma}_2 = \Phi d\bar{\rho}\delta\bar{\rho} - c^2 \sqrt{\psi_1\psi_2}\, dt\, \delta t, \tag{7}$$

unde $\mu\left(\dot{\bar{\sigma}}_1 \delta\bar{\sigma}_2 + \dot{\bar{\sigma}}_2 \delta\bar{\sigma}_1\right)$ este termenul de interacțiune, factorul μ fiind masa de interacțiune, iar

$$\Phi = 1 + \frac{\alpha}{c^2 r}; \qquad \psi_s = 1 - \frac{1}{2}\frac{fm_{0;s}}{c^2 r^2} \qquad (s = 1, 2) \tag{8}$$

unde: f este constanta gravitațională newtoniană; iar α — un parametru care urmează a fi determinat.

Expresia maselor în mișcare m_1 și m_2 este dată de relația:

$$m_s = \sqrt{m_{0,s}^2 + \frac{1}{c^2\Phi_s\psi_s}\left(p_s^2 + q_s^2 + r_s^2\right)} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\frac{\Phi_s}{\psi_s}\dot{\bar{\rho}}_s^2}}. \tag{9}$$

Masa de interacțiune este neglijabilă la distanțe de ordinul dimensiunilor macroscopice, dar poate deveni importantă pentru distanțe de ordin atomic.

Energia sistemului este constantă și dată de expresia:

$$H = c^2\left(\psi_1 m_1 + \psi_2 m_2 + 2\mu\sqrt{\psi_1\psi_2}\right) = E\ (\text{const}) \tag{10}$$

Conservarea momentului cinetic este dată de egalitatea:

$$m_1\Phi_1\dot{\bar{\rho}}_1 + m_2\Phi_2\dot{\bar{\rho}}_2 + \mu\sqrt{\Phi_1\Phi_2}\left(\dot{\bar{\rho}}_1 + \dot{\bar{\rho}}_2\right) = \bar{C}\ (\text{const}) \tag{11}$$

Ecuațiile de mișcare se scriu:

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi_1 m_1\dot{\bar{\rho}}_1 + \sqrt{\Phi_1\Phi_2}\,\mu\dot{\bar{\rho}}_2\right) = -\operatorname{grad}_1 H, \tag{12}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\Phi_1\Phi_2}\,\mu\dot{\bar{\rho}}_1 + \Phi_2 m_2\dot{\bar{\rho}}_2\right) = -\operatorname{grad}_2 H.$$

Pentru a verifica teoria de mai sus, în primă aproximație, considerăm masa de interacțiune egală cu zero ($\mu = 0$); introducem vectorul $\bar{r} = \bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1$; ecuațiile (12) se scriu:

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\Phi\dot{\bar{\rho}}_1\right) = kf(m_1 + m_2)\operatorname{grad}_1\left(\frac{1}{r}\right)$$
$$\frac{d}{dt}\left(m_2\Phi\dot{\bar{\rho}}_2\right) = kf(m_1 + m_2)\operatorname{grad}_2\left(\frac{1}{r}\right) \tag{13}$$

unde am pus:

$$k = \frac{m_{01}m_{02}}{m_{01} + m_{02}}.$$

În cazul cîmpului gravitațional al soarelui $m_1 = m$ masa corpului atras (planeta); $m_2 = M$ (masa soarelui), astfel încît:

$$\frac{m_0 M_0}{m_0 + M_0}(m + M) \approx mM. \tag{14}$$

Scanned with OKEN Scanner

Luînd originea axelor de coordonate în centrul soarelui, ecuațiile (13) se reduc, ținînd seamă de expresiile (8), la ecuația:

$$\frac{d}{dt}\left[1+\alpha\frac{\lambda}{c^2 r}\right)\dot{\bar{r}}\Big] = m\ \text{grad}\left(\frac{\lambda}{r}\right) \tag{15}$$

unde $\lambda = fM$.

Ecuația (15) dă legea de mișcare a unei particule a cărei formă fundamentală este:

$$\Omega_\delta = \left(1+\alpha\frac{\lambda}{c^2 r}\right) m\dot{\bar{r}}\delta\bar{r} - \left(1-\frac{\lambda}{c^2 r}\right) mc^2\delta t. \tag{16}$$

În acest mod expresiile potențialului total pentru cîmpul gravitațional sînt (cu potențialul vectorial $\bar{A}$ și scalar A_0):

$$\bar{A} = \alpha\frac{\lambda m}{c^2}\frac{\dot{\bar{r}}}{r}\ ; \qquad A_0 = \frac{\lambda m}{c^2}\frac{1}{r}\ . \tag{17}$$

Pentru verificare, această teorie a fost aplicată de I. Plăcinţeanu[1] la determinarea valorilor efectelor tratate și în teoria relativității generale einsteiniene: „deplasarea spre roșu a liniilor spectrului solar“ care permite determinarea constantei $\alpha = 0{,}7$; „avansarea seculară a periheliului planetei Mercur“ pentru care s-a găsit 41″,47 valoarea cea mai probabilă dedusă din observații fiind 41″,24; și „devierea razei de lumină în vecinătatea discului solar“, pentru care s-a găsit 2″,35, valoarea observată cea mai probabilă fiind 2″,2.

---

[1]) *I. Plăcinţeanu*; „Efecte relativiste deduse printr-o mecanică nouă“. Buletinul ştiinţific al A.M.T., Bucureşti, 1956.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

Scanned with OKEN Scanner

Mecanica vectorială

I. Cinematica punctului

1. *Un punct $M(x,y)$ se mișcă în plan după legea:*

$$x = a \sin t; \quad y = a \sin 3t.$$

Să se afle traiectoria, viteza și accelerația. Să se studieze mișcarea. Aceeași problemă pentru mișcarea:

$$x = a \sin t; \quad y = a \cos 3t.$$

I n d i c a ț i e. Traiectoria se obține eliminînd timpul între ecuațiile parametrice ale mișcării: este porțiunea curbei $a^2y = x(3a^2 - 4x^2)$ pentru care $|x| \leqslant a, |y| \leqslant a$. Viteza și accelerația se obțin derivînd succesiv în raport cu t. Mișcarea este periodică, cu perioada 2π. Pentru a doua variantă, ecuația traiectoriei este:

$$a^2y = (a^2 - 4x^2)\sqrt{a^2 - x^2}.$$

2. *Un punct $M(x)$ se mișcă rectiliniu, spațiul parcurs fiind legat de viteză prin relația:*

$$x = a - by^3 \qquad (a, b = \text{const}).$$

La $t = 0$, punctul trece prin origină. Cît timp trebuie să se miște punctul pentru ca viteza lui să se dubleze?

I n d i c a ț i e. Avem: $v_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

Momentul în care $v = 2v_0$ se obține din ecuația diferențială $x = a - bx^3$.

3. *Într-o mișcare rectilinie, relația dintre accelerația a și spațiul s este:*

$$a = \frac{\beta}{\alpha - s}; \qquad (\alpha, \beta = \text{const}).$$

La $t = 0$ mobilul se află în originea spațiilor și are viteza v_0. Să se exprime viteza în funcție de s.

I n d i c a ț i e. Vom considera ecuația diferențială: $v\frac{dv}{ds} = \frac{\beta}{\alpha - s}$.

Scanned with OKEN Scanner

4. *Punctul A, al cărui vector de poziție $\overrightarrow{OA}$ este echipolent cu viteza unui punct P, descrie o curbă numită hodograful mișcării lui P. Să se afle hodograful mișcării plane:* $x = a\cos t$, $y = a\sin 2t$.

Indicație. Coordonatele punctului A, care descrie hodograful, sînt:

$$\xi = -a\sin t\ ; \qquad \eta = 2a\cos 2t.$$

Eliminînd pe t între aceste două relații, se obține ecuația curbei hodograf.

5. *Un punct $M(x,y)$ în mișcare uniformă, cu viteza v descrie parabola $y^2 = 2px$. Să se determine proiecțiile vitezei și accelerației în funcție de y. La $t = 0$, punctul se află în vîrful parabolei. Să se calculeze accelerația normală și să se scrie ecuațiile parametrice ale traiectoriei.*

6. *Mișcarea unui punct $M(x,y)$ este definită în plan, prin:*

$$x = t^{4/3}\ , \qquad y = t^{2/3}\ .$$

Să se găsească viteza v și accelerația a; viteza areolară în raport cu originea și hodograful mișcării. Să se verifice relația $v = 3at$.

7. *Să se arate că mișcarea rectilinie în care avem $v^2 = 2ks$ ($k = \text{const}$) este uniform accelerată.*

8. *Un punct $M(x, y)$ descrie curba $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ astfel ca proiecția vitezei pe Ox să fie $\dot{x} = a$ (const). Să se arate că accelerația normală este constantă și egală cu a.*

Indicație. Avem:

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}\ ; \qquad y' = \operatorname{sh}\frac{x}{a}\ ; \qquad y'' = \frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\ ;$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\Big/\left(1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}\right)^{3/2}\ ; \qquad \frac{v^2}{\rho} = a.$$

9. *Să se găsească traiectoria unui punct $M(x, y)$ care se mișcă în plan astfel ca proiecția vitezei pe Ox să fie egală cu a, iar accelerația normală să fie tot a.*

Indicație. Această problemă este inversa problemei precedente. Condiții inițiale: $t = 0$, $x = 0$, $y = 2a$, $\dot{x} = a$, $\dot{y} = 0$. Se găsește:

$$\dot{x} = a,\ x = at,\ v^2\, d\alpha/ds = a; \qquad dx = \cos\alpha\, ds = a\, dt = \frac{ds}{dt}\, d\alpha;$$

deci,

$$d\alpha/\cos\alpha = dt.$$

Integrînd se obține:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = e^{-t}\ ;$$

de unde:

$$2\operatorname{tg}\alpha = e^{x/a} - e^{-x/a}\ .$$

Dar $dx = ds\cos\alpha$, $dy = ds\sin\alpha$. Așadar:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right)$$

și integrînd se obține:

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x}{\alpha}\ .$$

Scanned with OKEN Scanner

10. *Un punct P este animat simultan de două viteze: una constantă egală cu v_1 și îndreptată mereu spre un punct fix O și alta, tot constantă egală cu v_2, paralelă cu o direcție fixă Ox.*

Să se arate că mișcarea este plană. Raportînd-o apoi la coordonate polare în planul mișcării, să se afle componenta radială și transversală a vitezei. Să se găsească traiectoria cînd $v_1 = v_2$.

Indicație. Se arată că produsul $\bar{r} \times \bar{v}$ are direcție fixă. Față de un sistem *Oxyz* proiecțiile vitezei sînt:

$$\dot{x} = -a\frac{x}{r} + b, \quad \dot{y} = -a\frac{y}{r}, \quad \dot{z} = -a\frac{z}{r},$$

unde ($r = OP$). Luînd apoi *Ox* ca axă polară și $\widehat{xOP} = \theta$, avem:

$$\dot{r} = -a + b\cos\theta \quad \text{și} \quad r\dot{\theta} = b\sin\theta.$$

Prin eliminarea lui t se obține ecuația diferențială a traiectoriei. Pentru $v_1 = v_2$ traiectoria este o parabolă.

11. *Un punct M (x, y) descrie lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ cu viteza unghiulară $\omega = 1$. La $t = 0$, punctul se găseste în $x = a$. Să se afle x și y în funcție de timp, viteza și accelerația.*

Indicație. Avem:

$$\dot{\theta} = 1; \quad \theta = t; \quad x = a\cos t\sqrt{\cos 2t}; \quad y = a\sin t\sqrt{\cos 2t}.$$

12. *Ce traiectorie descrie un punct în plan, dacă accelerația lui tangențială și normală sînt constante?*

Indicație. Avem:

$$\dot{v} = a \quad \text{și} \quad \frac{v^2}{\rho} = b, \quad \text{sau:} \quad v\frac{dv}{ds} = a \quad \text{și} \quad v^2\frac{d\alpha}{ds} = b,$$

deci

$$v^2 = 2as \quad \text{și} \quad s = e^2\frac{a}{b}\alpha.$$

Apoi din $dx = ds\cos\alpha$ și $dy = ds\sin\alpha$, deducem:

$$d(x + iy) = e^{i\alpha}\,ds = ke^{(k+i)\alpha}\,d\alpha, \quad \left(k = 2\frac{a}{b}\right),$$

sau:

$$re^{i\theta} = \frac{k(k-i)}{k^2 + i}e^{(k+i)\alpha}.$$

Identificînd părțile reale și imaginare se găsește o spirală logaritmică.

13. *Un punct P (r,θ) descrie curba $r = \frac{a}{2}(1 + \cos\theta)$ cu viteza constantă a. Să se determine r și θ în funcție de timp. Să se calculeze componentele radiale și transversale ale vitezei și accelerației.*

Indicație. Avem $\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = a^2$ și (din ecuația curbei):

$$\dot{r} = -\frac{a}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}.$$

Se obține o ecuație diferențială care ne dă $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{t}{2}$ luînd la $t = 0$, $\theta = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

14. *În paralelogramul OQPS, laturile OQ și OS se rotesc în jurul punctului O fix cu vitezele unghiulare constante* ω_1 *și* ω_2. *Să se găsească ecuația vectorială a traiectoriei punctului P.*

Indicație. Se observă că $\theta_1 = \omega_1 t$; $\theta_2 = \omega_2 t$; se aplică teorema proiecțiilor.

15. *Să se studieze mișcarea a două puncte, știind că în fiecare moment vectorul viteză al fiecărui dintre aceste puncte este echipolent cu vectorul accelerație al celuilalt punct.*

Indicație. Din $\bar{v}_A = \dot{\bar{v}}_B$; $\bar{v}_B = \dot{\bar{v}}_A$ rezultă: $\ddot{\bar{v}}_A = \bar{v}_A$; $\ddot{\bar{v}}_B = v_B$ ceea ce se integrează ușor.

16. *Mișcarea unui punct M (x,y) este definită de ecuațiile:*

$$x = R(\omega t - \sin \omega t), \quad y = R(1 - \cos \omega t).$$

R și ω *fiind constante. Să se construiască traiectoria punctului M (cicloida). Să se determine viteza și accelerația lui M. Să se deducă construcția geometrică a tangentei și a centrului de curbură la cicloidă.*

17. *Viteza* $\bar{v}_M$ *a unui punct M care se mișcă într-un plan este rezultanta unei componente v de-a lungul vectorului de poziție (vector unitar* $\bar{\rho}$*) față de un pol fix, și a componentei v' paralelă cu o direcție fixă (vector unitar* $\bar{i}$*).*

Să se arate că accelerația lui M este

$$\bar{a} = \left(\dot{v} - \frac{vv'}{r}\cos\theta\right)\bar{\rho} + \left(\dot{v}' - \frac{vv'}{r}\right)\bar{i}$$

unde :

$$\cos\theta = \bar{\rho}\bar{i}.$$

Indicație. $\bar{v}_M = v\bar{\rho} + v'\bar{i}$; $\bar{a} = \dot{v}\bar{\rho} + v'\dot{\bar{i}} + v\dot{\bar{\rho}}$; $\bar{v}_M\bar{\rho} = \dot{r}$; $\bar{v}_M\bar{\rho} = v + v'\cos\theta$. Se identifică $(v + v'\cos\theta)\bar{\rho} + r\dot{\bar{\rho}} = \bar{v}_M = v\bar{\rho} + v'\bar{i}$.

Rezultă:

$$\dot{\bar{\rho}} = -\frac{v'\cos\theta}{r}\bar{\rho} + \frac{v'}{r}\bar{i}.$$

18. *Un punct se mișcă în plan. Raportăm mișcarea lui la un sistem de axe cartezian, care fac unghiurile* α *și* β *cu o direcție fixă în plan, unghiuri variabile cu timpul t. Să se găsească componentele vitezei și ale accelerației pe axele de coordonate mobile x, y.*

Indicație. Se obține pentru viteză:

$$\begin{cases} \dot{x} - x\dot{\alpha}\operatorname{ctg}(\beta - \alpha) - y\dot{\beta}\operatorname{cosec}(\beta - \alpha) \\ \dot{y} + y\dot{\beta}\operatorname{ctg}(\beta - \alpha) + x\dot{\alpha}\operatorname{cosec}(\beta - \alpha). \end{cases}$$

19. *Să se exprime componentele accelerației unui punct ce descrie o curbă plană după direcțiile vectorului de poziție* $\bar{r}/r$ *și a tangentei* $\bar{t}$ (Siacci).

Indicație. Avem: $\bar{a} = \dot{v}\bar{t} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n}$. Un vector oarecare $\bar{\alpha} = \alpha\bar{n}$ de direcție $\bar{n}$ se poate descompune precum urmează:

$$\left(\frac{\bar{n}\bar{r}}{r}\right)\alpha\bar{n} = \left(\frac{\bar{r}}{r}\bar{t}\right)\alpha\bar{t} + \alpha\frac{\bar{r}}{r},$$

luînd ca sens pozitiv pentru $\bar{r}/r$ sensul spre pol.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă:

$$\bar{a} = \left[v\frac{dv}{ds} + \frac{v^2}{\left(\bar{n}\frac{\bar{r}}{r}\right)\rho}\frac{\bar{r}}{r}\bar{t} \right]\bar{t} + \frac{v^2}{\rho}\frac{r}{(\bar{n}\bar{r})}\frac{\bar{r}}{r}.$$

Punem $p = \bar{r}\bar{n}$; $h = pv$ (unde p este lungimea perpendicularei coborîtă din origine pe tangentă în $M(\bar{r})$. Observăm că $\frac{dp}{ds} = \frac{r}{\rho}\frac{\bar{r}}{r}\bar{t}$, ținînd seamă de formulele lui Frenet. Obținem, în cele din urmă relația:

$$\bar{a} = \frac{h}{p^2}\frac{dh}{ds}\bar{t} + \frac{rh^2}{p^3\rho}\frac{\bar{r}}{r}.$$

20. *Să se arate că componentele accelerației unui punct care descrie o curbă plană: anume, pe direcția tangentei* $\bar{t}$ *și pe direcția vectorului de poziție,* $(\bar{r}/r)$, *avînd ca pol proiecția unui punct fix din spațiul O pe planul osculator sînt date de:*

$$\bar{a} = \left(\frac{h}{p^2}\frac{dh}{ds} + \frac{h^2}{p^4}\frac{dq}{ds}\right)\bar{t} + \frac{rh^2}{p^3\rho}\frac{\bar{r}}{r},$$

unde:

ρ este *raza de curbură*;

q — *distanța punctului fix din spațiu pînă la proiecția sa pe planul osculator*;

r și p — *distanțele acestei proiecții pînă la punctul mobil pe curbă și la tangentă*;

$h = pv$ (v, *viteza și* s — *arcul de curbă*) (Siacci).

Indicație. Față de problema precedentă, mai trebuie ținut seamă de relația lui Frenet:

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{\bar{t}}{\rho} - \frac{\bar{b}}{\tau}; \quad \bar{R} = \bar{r} + q\bar{b},$$

unde: $\bar{R}$ este vectorul de poziție al punctului fix O; și $\bar{b}$ — versorul binormalei.

Avem: $\bar{n}\bar{R} = \bar{n}(\bar{r} + q\bar{b}) = \bar{n}\bar{r} = p$; $\bar{R}\bar{t} = (\bar{r} + q\bar{b})\bar{t} = \bar{r}\bar{t}$.

Deci: $$\bar{a} = \left[v\frac{dv}{ds} + \frac{rv^2}{p\rho}\left(\frac{\bar{r}}{r}\bar{t}\right)\right]\bar{t} + \frac{rv^2}{p\rho}\frac{\bar{r}}{r}.$$

Observăm că: $d\bar{R}/ds = \bar{t}$; $\bar{t}\bar{b} = 0$; $d\bar{b}/ds = -\bar{n}/\tau$; $dq/ds = -\bar{R}\bar{n}/\tau$. Prin substituțiile indicate și reduceri succesive, se obține relația cerută.

21. *Dacă un punct se mișcă pe parabola de parametru* p, *însemnînd cu* $\bar{r}$ *poziția punctului față de focarul parabolei și cu* $\bar{v}$ *viteza lui, să se arate că componentele accelerației punctului în raport cu direcția vectorului de poziție* $\bar{r}/r$ *și față de normala* $\bar{n}$ *la parabolă, sînt date de relația:*

$$\bar{a} = v\frac{dv}{dr}\frac{\bar{r}}{r} + \frac{p^{1/2}}{2^{3/2}r^{3/2}}\frac{d(v^2R)}{dr}\bar{n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Ecuația parabolei: $y^2 = 2px$. Raza de curbură: $\rho = (1 + y'^2)^{3/2}/y''$. Se găsește $\rho = -(2r)^{3/2}/p$. Apoi $dr/ds = y/\sqrt{2pr}$. Observăm că un vector avînd direcția tangentei poate fi descompus precum urmează:

$$\alpha\bar{t} = \alpha\bar{n}\frac{\bar{n}\bar{r}}{\bar{r}} + \alpha\bar{r}\frac{1}{\bar{r}}.$$

Apoi: $$\bar{r}\bar{t} = r\frac{dr}{ds} = \left(x + \frac{p}{2}\right)\frac{dx}{ds}, \quad \bar{n}\bar{r} = (pr/2)^{1/2}.$$

Sau: $$\dot{v}\bar{t} = v\frac{\bar{r}}{r}\frac{ds}{dr} - \dot{v}\frac{\bar{n}}{r}\frac{ds}{dr}\frac{(pr)^{1/2}}{2^{1/2}}.$$

Ținînd seamă și de relația cunoscută $\bar{a} = \dot{v}\bar{t} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n}$, rezultă relația căutată.

22. *Un punct M se mișcă într-un plan. Fie $\bar{r}_1$ și $\bar{r}_2$ distanțele lui la două puncte fixe A și B; fie $\overline{AB} = 2k$; $r_1/r_2 = e^{\theta}$; iar unghiul făcut de $\bar{r}_1$ cu $\bar{r}_2$ să fie φ. Să se arate că viteza punctului se poate exprima prin relația:*

$$v = \frac{k\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2}}{(\operatorname{ch}\theta - \cos\varphi)}.$$

Indicație. În triunghiul AMB se calculează $4k^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\varphi$ sau $2k^2 = r_1r_2(\operatorname{ch}\theta - \cos\varphi)$. Apoi $r^2 + k^2 = r_1r_2\cos\theta$. Rezultă $r^2 = k(\operatorname{ch}\theta + \cos\varphi)/(\operatorname{ch}\theta - \cos\varphi)$. Altă relație din același triunghi ne dă: $r_1 - r_2 = 4kx$. Se obține $x = k\operatorname{sh}\theta/(\operatorname{ch}\theta - \cos\varphi)$; $y = k\sin\varphi/(\operatorname{ch}\theta - \cos\varphi)$. Formăm $v^2 = x^2 + y^2$ și obținem relația cerută.

23. *Un punct descrie parabola $r\cos^2\frac{\theta}{2} = a$, cu o viteză proporțională cu vectorul de poziție. Să se calculeze componentele accelerației, pe tangentă și normală.*

Indicație. $\bar{v} = k\bar{r}$. Rezultă:

$$\dot{\theta} = k\cos\frac{\theta}{2}; \quad \dot{r} = kr\sin\frac{\theta}{2}; \quad \dot{v} = k^2r\sin\frac{\theta}{2}; \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \frac{3k^2r}{4}\sin\theta.$$

24. *Un punct descrie parabola $y^2 = 2px$ astfel încît accelerația este constantă și paralelă cu dreapta $y = mx$. La momentul inițial $t = 0$, avem $x = 0$, $v = v_0$. Să se calculeze viteza și accelerația.*

Indicație. Se găsește $\dot{y} = m\dot{x} + v_0$;

$$\dot{x} = \frac{v_0y}{p - my}; \qquad \dot{y} = \frac{v_0p}{p - my};$$

$$\ddot{x} = \frac{p^2v_0^2}{(p - my)^3}; \qquad \ddot{y} = \frac{mp^2v_0^2}{(p - my)^3}.$$

25. *Un punct se mișcă în plan după legea $x = x_0e^{\omega t}$; $y = y_0e^{-\omega t}$. Să se determine traiectoria, viteza, accelerația și raza de curbură.*

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Traiectoria este hiperbolă echilateră

$$xy = x_0 y_0. \quad \text{Apoi: } v_x = \omega x; \qquad v_y = -\omega y \text{ etc.}$$

26. *Un punct M se mișcă în jurul punctului fix O din plan cu accelerația $\bar{w}$, care rămîne mereu perpendiculară pe vectorul de poziție $\overrightarrow{OM} = \bar{r}$. Acest vector se rotește cu viteza unghiulară constantă ω. Se cere valoarea lui $\bar{w}$ și traiectoria. Condiții inițiale: $\bar{r} = \bar{r}_0$, $\theta = 0$, $\bar{v}_0$ perpendicular pe $\bar{r}_0$.*

Indicație. $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$. Se calculează $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x} = a_x$ și $\ddot{y} = a_y$. Condiția din enunț cere $a_x \cos\theta + a_y \sin\theta = 0$. Se obține ecuația diferențială $\ddot{\bar{r}} = \omega^2 \bar{r}$, care se integrează ușor.

II. Dinamica punctului material liber

27. *Dintr-un punct A $(0, a)$ se lansează orizontal un punct material de masă $m = 1$, cu viteza $v = \text{const}$. Asupra punctului lucrează o forță necunoscută Y îndreptată vertical în sus. Cum trebuie să fie această forță ca punctul să se miște pe hiperbola $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Să se găsească componentele v_x și v_y ale vitezei și viteza pe traiectorie v în fiecare poziție (x, y).*

Indicație. Se pornește de la ecuația dinamicii:

$$X = 0, \quad Y = m\frac{dv_y}{dt} = mv_y \frac{dv_y}{dy}.$$

28. *Un punct este lansat din origină cu viteza v_0 care face un unghi α cu axa Ox. Ce forță Y perpendiculară pe Ox trebuie să lucreze asupra punctului, ca acesta să descrie o traiectorie dată $y = f(x)$, proiecția lui pe Ox avînd o mișcare uniformă.*

Indicație. Avem:

$$Y = mv_y \frac{dv_y}{dy}, \quad \frac{dy}{dt} = v_y = \frac{dy}{dx}\dot{x} = f'(x)\dot{x} \text{ și}$$

$\dot{x} = v_0 \cos\alpha$. De aici se deduce: $Y = mv_0^2 \cos^2\alpha f''(x)$

29. *Un punct material de masă 1 este aruncat dintr-un punct A de pe axa Ox, în momentul $t = 0$, cu o viteză inițială c care face unghiul α cu Ox. Punctul este supus unei atracții spre origină și se mișcă astfel încît componentele vitezei sale sînt $v_x = c\cos\alpha\cos kt - ak\sin kt$ și $v_y = c\sin\alpha\cos kt$ (c, k = = const). Să se studieze mișcarea, găsindu-se: 1) punctul în care ajunge mobilul în momentul t, 2) traiectoria punctului mobil, 3) componentele forței atractive.*

30. *Un punct material M (x,y) de masă 1 se mișcă într-un plan fiind supus unei forțe de componente: $F_x = x$, $F_y = y - 4x$. La $t = 0$, punctul se află în A $(a, 0)$, viteza inițială avînd proiecțiile $(-a, 2a)$. Să se afle traiectoria și să se studieze mișcarea.*

Indicație. Ecuațiile mișcării sînt: $\ddot{x} = x$, $\ddot{y} = y - 4x$. Prima ne dă $x = a\,e^{-t}$ (dacă ținem seamă de datele inițiale). Apoi $y = 2at\,e^{-t}$.

Scanned with OKEN Scanner

31. *Să se studieze mișcarea plană a unui punct* $M(x, y)$ *de masă* 1, *supus forțelor:* $F_x = y$; $F_y = x$. *La* $t = 0$, *punctul se află în* $A(1, 1)$ *cînd viteza sa are proiecțiile* $(-1, -1)$.

Indicație. Din $\ddot{x} = y$, $\ddot{y} = x$; rezultă $x^2 + y^2 = 2xy$; etc.

32. *Un punct material* $M(x)$ *de masă* m *este mobil pe o dreaptă* Ox, *supus unei forțe de rezistență* $mk\sqrt{v}$. *La* $t = 0$, $v_0 > 0$, *mobilul pleacă din* O. *Să se studieze mișcarea.*

Indicație. Fie $OM = x$. Ecuația mișcării este $\ddot{x} = -k\sqrt{v}$, căci rezistența se opune mișcării care la început se face spre spre $x > 0$. Avem:

$$v\frac{dv}{dx} = -k\sqrt{v}, \quad \text{deci:} \quad x = \frac{2}{3k}(v_0^{3/2} - v^{3/2}).$$

Mobilul se oprește cînd $v = 0$, deci $x = \frac{2}{3k}v_0^{3/2}$.

Scriind apoi ecuația mișcării sub forma $\dot{v} = -k\sqrt{v}$, găsim timpul $t = \frac{2}{k}(\sqrt{v_0} - \sqrt{v})$. Mobilul se oprește la momentul $t = 2\frac{\sqrt{v_0}}{k}$.

33. *Un punct de masă* $m = 1$ *se mișcă într-un plan, atras de originea axelor cu forța* $2r$ *și întîmpinînd o rezistentă* $2v$. *La* $t = 0$ *punctul se află în* $A(a, 0)$, *iar viteza are proiecțiile* $(0, a)$. *Să se afle traiectoria.*

Aceeași problemă, forța fiind $2r$ și rezistența $3v$.

Indicație. Ecuațiile mișcării sînt:

$$\ddot{x} = -2x - 2\dot{x}, \quad \ddot{y} = -2y - 2\dot{y}.$$

Ele se integrează separat și ne dau $x = a\,e^{-t}(\cos t + \sin t)$, $y = a\,e^{-t}\sin t$; (ecuațiile parametrice ale traiectoriei).

34. *Un punct material* $M(x)$ *de masă* 1 *se mișcă pe o dreaptă, fiind respins de două centre* C *și* C' *situate pe această dreaptă, cu forțele:* $\frac{k^2}{CM^2}$ *și* $\frac{k^2}{C'M^2}$. *La început punctul se află în repaus, într-o poziție* $M_0(x_0)$ *situată între* C *și* C'. *Să se scrie ecuația mișcării și să se reducă la o cuadratură. Să se arate că mișcarea este osculatorie și să se exprime perioada printr-o serie convergentă.*

Indicație. Dacă alegem axele așa ca: $C(c, 0)$ și $C'(-c, 0)$, ecuația mișcării se scrie:

$$x = \frac{k^2}{(x+c)^2} - \frac{k^2}{(x-c)^2} = \frac{\dot{x}^2}{2} = -\frac{2k^2c}{c^2 - x^2} + h.$$

Presupunînd că la $t = 0$, $x_0 = \lambda c$ $(\lambda < 1)$, avem: $h = \frac{2k^2}{c(1-\lambda)^2}$.

Perioada este dată de: $T = \frac{2}{k}c(1-\lambda^2)\int_0^{\lambda c}\sqrt{\frac{c^2 - x^2}{c^2\lambda^2 - x^2}}\,dx,$

sau punînd: $x = c\lambda \sin \varphi$,

$$T = \frac{2c}{k} c\,(1 - \lambda^2) \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)}\, d\varphi.$$

35. *În planul xOy un punct M (x, y) de masă 1 este atras de un punct A cu forța* $-\overrightarrow{AM}$. *Punctul A descrie axa Ox uniform cu viteza a. La t = 0 punctul M se află în* M_0 *(2a, a) iar viteza are proiecțiile (a, 0). Să se studieze mișcarea lui M.*

Indicație. Punînd $X = x - at$, mărimea forței este $\sqrt{X^2 + y^2}$. Ecuațiile de mișcare sînt: $\ddot{X} + X = 0$; $\ddot{y} + y = 0$. Rezultă: $\dot{X}^2 + X^2 = 4a^2$; $\dot{y}^2 + y^2 = a^2$. Se obține, $x = 2a \cos t + at$; $y = a \cos t$.

36. *În mișcarea parabolică a unui punct greu, azvîrlit cu viteza* v_0, *sub un unghi* α, *cu orizontul; să se determine* α *așa ca traiectoria să treacă printr-un punct A dat. Să se studieze apoi problema: cînd* α *este dat, să se determine* v_0 *pentru ca traiectoria să treacă printr-un punct de coordonate polare date. Pentru ce valoare a lui* α *viteza* v_0 *este minimă?*

Indicație. Ecuația traiectoriei este:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)\, x^2.$$

Ca punctul să treacă prin $A\ (x_0, y_0)$ trebuie ca α să satisfacă ecuația:

$$\frac{g x_0^2}{2 v_0^2} \operatorname{tg}^2 \alpha - x_0 \operatorname{tg} \alpha + y_0 - \frac{g x_0^2}{2 v_0^2} = 0.$$

Problema are soluții dacă $v_0^4 - 2g v_0^2 y_0 + g^2 x_0^2 \geqslant 0$, adică, dacă $A\,(x_0, y_0)$ este în concavitatea parabolei de siguranță.

37. *Să se arate că traiectoria punctului material* $(m = 1)$ *solicitat de forța:* $F = \varphi\ (t, r, v)\ \bar{r} + \psi\ (t, r, v)\ \bar{v}$ *este plană.*

Indicație. Aplicăm teorema momentului cinetic:

$$\frac{d}{dt} (\bar{r} \times \dot{\bar{r}}) = \varphi\ \bar{r} \times \bar{r} + \psi\ \bar{r} \times \dot{\bar{r}};$$

deci, însemnînd cu $\bar{\mu} = \bar{r} \times \dot{\bar{r}}$, avem ecuația $\dot{\bar{\mu}} = \psi \bar{\mu}$; vectorul $\bar{\mu}$ are direcția fixă, variind în valoare absolută după legea $\mu = ce^{\int \psi\, dt}$.

38. *Să se stabilească condiția necesară și suficientă la care trebuie să satisfacă forțele care solicită un punct material pentru ca traiectoria să fie plană.*

Indicație. Fie $\bar{F}$ rezultanta forțelor care solicită punctul $(m = 1)$. Avem, cu notațiile din exercițiul precedent: $\dot{\bar{\mu}} = \bar{r} \times \bar{F}$. Condiția cerută este: $\mu \times \dot{\bar{\mu}} = 0 = \bar{\mu} \times (\bar{r} \times \bar{F}) = \bar{r}\,(\bar{\mu}\,\bar{F})$. Deci $\bar{F} \parallel$ planul fix format de $\bar{r}$ și $\dot{\bar{r}}$.

39. *Distanța pămîntului la soare este în medie de* $149{,}5 \cdot 10^6$ km. *Distanța cea mai mare este* $152 \cdot 10^6$ km; *cea mai mică* $147 \cdot 10^6$ km. *Masa*

soarelui este egală cu 330 000 m (*masa pământului*). *Densitatea pământului, în medie* $\rho = 5{,}5$. *Raza pământului* $r = 6\,370$ km. *Constanta gravitației* $f = 67 \cdot 10^{-9}$. *Se cer valorile vitezelor la periheliu și afeliu.*

Indicație. $v_p = 30{,}5$ km/s, $v_a = 29{,}5$ km/s. Se calculează $v_p^2 - v_a^2$ din ecuația energiei și se pune $v_p + p_a = 2x$ lungimea traiectoriei pământești: durata revoluției.

40. *Aceeași problemă pentru lună. Depărtarea medie de pământ este de* 384 000 km; *distanța cea mai mare* 405 000 km; *cea mai mică* 363 000 km. *Timpul de revoluție este* 27,3 *zile. Masa lunei* = 1/80 *din masa pământului.*

Indicație. $v_p = 1{,}13$ km/s; $v_a = 1{,}02$ km/s.

41. *Un punct* $M(x,y)$ *de masă* $m = 1$ *se mișcă în planul* xOy *respins de* O *cu o forță* $F = \frac{kr}{x^3}$, *unde* $r = \overline{OM}$. *La* $t = 0$, $r = a$, *iar* $v_0 = \sqrt{\frac{k}{2a}}$ *având o direcție perpendiculară pe raza* r_0. *Să se studieze mișcarea.*

Indicație. În coordonate polare $F = \frac{k}{r^2 \cos^3 \theta}$. Formula lui Binet ne dă:

$$-c^2\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right] = \frac{k}{\cos^3 \theta},$$

în care $c^2 = r_0^2 v_0^2 = \frac{ka}{2}$. Avem ecuația diferențială liniară:

$$\left(\frac{1}{r}\right)'' + \frac{1}{r} = -\frac{2}{a \cos^3 \theta},$$

care se integrează observînd că: $\frac{1}{r} = -\frac{1}{a \cos \theta}$ este o soluție particulară.

42. *Să se studieze mișcarea punctului material* $(m = 1)$ *supus forței centrale* $\varphi(r) = a/r^2 + b/r^3$, *unde* a *și* b *sînt constante.*

Indicație. Ecuația lui Binet duce la traiectoria:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos k\theta; \text{ unde } k^2 = 1 + \frac{b}{c^2};$$

$$\frac{1}{p} = -\frac{a}{(c^2 + b)\, c^2},$$ c fiind constanta ariei.

Am presupus $k^2 > 0$; deci $c^2 > -b$; se obține o conică ce se rotește în jurul unui focar cu viteza unghiulară $(1-k)\theta$. Pe această conică punctul se mișcă cu viteza areolară kc.

43. *Un punct* $(m = 1)$ *este atras de un centru fix cu forța* $\frac{k^2}{r^7}$. *La* $t = 0$, $r_0 = a$, $v_0 = \frac{k}{a^3\sqrt{3}}$ *fiind perpendiculară pe raza* r_0. *Să se afle traiectoria.*

Scanned with OKEN Scanner

Indicaţie. Se va aplica formula lui Binet. O primă integrare conduce la ecuaţia $\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = a^4u^6$, unde $u = 1/r$. Restul se obţine prin cuadraturi.

44. *Un punct* ($m = 1$) *este atras de un centru fix cu forţa* $\frac{a^2(1+5e^{-\theta})}{r^2}$ *Să se studieze mişcarea ştiind că la* $t = 0$ *avem:* $r_0 = a$, $v_0 = 2a$, *iar unghiul făcut de* v_0 *cu* r_0 *este* $\frac{\pi}{4}$.

Indicaţie. Aplicăm formula lui *Binet.* Ecuaţia diferenţială admite integrarea particulară:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{2}e^{-\theta}\right),$$

observînd că $\dot{\theta}_0 = \sqrt{2}$; $r_0 = a\sqrt{2}$, rezultă că integrarea generală a ecuaţiei fără membrul al doilea este:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}[\cos(\theta - \theta_0) + \sin(\theta - \theta_0)].$$

45. *Un punct material* ($m = 1$) *este respins de un centru fix cu forţa* k^2/r^6 *şi atras de acelaşi centru cu forţa* $k_1^2 r$. *La unitatea de distanţă avem:* $k^2/k_1^2 = 3a^2b^2/4$. *La* $t = 0$ *avem* $r_0 = a$, *iar* $v_0 = k_1/a\sqrt{3}$, *perpendiculară pe* r_0. *Să se studieze mişcarea.*

Indicaţie. Ecuaţia lui Binet se integrează prin cuadraturi.

46. *Un punct material* ($m = 1$) *este atras de un centru fix cu forţa* $k \sin^2\theta/r^2$. *La* $t = 0$ *avem:* $r_0 = a$, $v_0 = \sqrt{\frac{2k}{3a}}$ *şi perpendiculară pe* r_0. *Să se arate că mişcarea este periodică şi similară cu aceea în care forţa atractivă este* k/r^2, *datele iniţiale rămînînd aceleaşi.*

Indicaţie. Formula lui Binet ne dă ecuaţia:

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 - \cos^2\theta),$$

unde $p = 2a/3$. O integrală particulară este:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right) \text{ etc.}$$

47. *Un punct material descrie curba* $x^3 + y^3 = a^3$ *sub acţiunea unei forţe perpendiculare pe asimptota curbei. Să se găsească expresia intensităţii forţei.*

Indicaţie. Avem $F_x = F_y$, deci $\ddot{x} = \ddot{y}$, prin urmare $\dot{x} - \dot{y} = c$. Ţinînd apoi seama de ecuaţia traiectoriei se găseşte:

$$F_x = F_y = \frac{2a^3c^2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

48. *În planul xOy, cu axa Oy verticală un punct material greu este lansat din poziția (0,a) cu viteza* $v_0 = 2a$, *paralelă cu dreapta* $x = y$, *fiind în același timp atras de axa Oy proporțional cu distanța la acea axă. Să se studieze mișcarea punctului.*

Indicație. Vom utiliza ecuațiile generale ale mișcării și teorema energiei.

49. *Componentele* (X, Y) *ale forței care solicită un punct* $(m = 1)$ *în punctul* (x,y) *din plan, nu depinde de timp. Să se arate că prin eliminarea timpului din ecuațiile mișcării, soluția problemei revine la rezolvarea ecuației diferențiale de ordinul al treilea:*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{Y - X\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\right) - 2X = 0.$$

Indicație. $d^2x/dt^2 = X$; $d^2y/dt^2 = Y$;

$$\frac{Y\,dx - X\,dy}{dx^2} = \frac{d}{dt^2}\left(\frac{dy}{dx}\right); \quad \frac{Y\,dx - X\,dy}{dx^2} = \frac{\int 2X\,dx + C}{dx^2}\; d\left(\frac{dy}{dx}\right);$$

$$\frac{Y - X\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}} = \int 2X\,dx + C.$$

Derivînd în raport cu x se obține relația din enunț.

50. *Un punct* $(m = 1)$ *este supus la forța centrală* $\varphi\,(r, v)$, *unde* $\bar{r}$ *și* $\bar{v}$ *sînt vectorul de poziție și viteza în momentul t. Să se găsească condiția la care trebuie să satisfacă* $\varphi\,(r, v)$, *pentru ca traiectoria să fie o conică. Să se determine forma funcției* φ *în acest caz. Să se demonstreze teorema reciprocă.*

Indicație. Ecuația lui Binet, ecuația energiei $dv^2/2 = \varphi dr$ și integrala ariilor $r^2\theta = c$ ne dau relația $-k/r^2 = \varphi$; oricare ar fi φ.

Rezultă $\frac{d}{dt}(r^2\varphi) = 0$. Notăm: $\Omega\,(\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{v}\frac{\partial\varphi}{dv} + 2\frac{\varphi}{r}$.

Avem:
$$\frac{d}{dt}(r^2\varphi) \equiv r^2\,\dot{r}\,\Omega\,(\varphi).$$

Dacă $\dot{r} \neq 0$, funcția căutată φ este integrală generală a ecuației diferențiale $\Omega\,(\varphi) = 0$.

. *Reciproca* rezultă imediat, căci ecuația lui Binet și condiția $\frac{d}{dt}(r^2\varphi) = 0$, conduc la forma $\varphi = -k/r^2$; deci, traiectoria este o conică.

51. *Să se studieze mișcarea planetară sub acțiunea forței lui Armellini:*

$$F = -\frac{fmr}{r^3}(1 + \varepsilon\,\dot{r}),$$

unde $\varepsilon =$ *constanta cosmogonică a lui Armellini, este pozitivă.*

Scanned with OKEN Scanner

Indicaţie. Ecuaţia lui Binet şi integrala ariilor determină traiectoria:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + Ae^{-\alpha\theta} \cos \beta (\theta - \theta_0);$$

unde: $\alpha = \varepsilon c$; $2p > 0$; $\beta^2 = 1 - \alpha^2$; $p = c^2/fm$; A şi θ_0 sînt constante de integrare; iar r = vectorul de poziţie momentană; θ = unghiul de poziţie. Cum $\varepsilon > 0$, pentru $\theta \to \infty$ rezultă traiectoria *circulară*.

52. *Să se exprime forţa centrală care solicită un punct m, astfel încît îi impune traiectoria:*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \psi(\theta) \cos \beta (\theta - \theta_0),$$

unde: p, β, θ sînt constante; iar ψ — o funcţie arbitrară de θ, de două ori derivabilă, satisfăcînd condiţiile necesare de continuitate.

Să se studieze cazurile particulare: 1) $\psi = Ae^{-\gamma\theta}$; 2) $\frac{\psi''}{\psi} - 2\frac{\psi'^2}{\psi^2} + \gamma^2 = 0$, unde $\gamma^2 = 1 - \beta^2$.

Indicaţie. Ecuaţia lui Binet conduce la expresia:

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\left(\frac{\psi''}{\psi} - 2\frac{\psi'^2}{\psi^2} + \gamma^2\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) + 2\left(\frac{1}{r}\right)'\frac{\psi'}{\psi} + \frac{1}{p}\right].$$

Cazul 1 conduce la legea lui Armellini; cazul 2 duce la soluţia:

$$\psi(\theta) = A_1 \operatorname{ch}^{-1} \gamma (\theta - \theta_1).$$

53. *În problema balistică, proiectilul este aruncat cu o viteză v_0 însă făcînd unghiuri variabile cu orizontala, cu condiţia ca traiectoriile să treacă prin aceleaşi puncte. Să se determine:* 1) *locul geometric al focarelor traiectoriilor;* 2) *locul vîrfurilor;* 3) *locul de intersecţie al tangentelor în origină cu axele verticale;* 4) *locul punctelor atinse după acelaşi timp.*

Indicaţie. $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{x^2}{4h \cos^2 \alpha}$ unde $h = v_0^2/2g$.

1) Cercul $x^2 + y^2 = h^2$; 2) $\frac{x^2}{h^2} + \frac{(y - h/2)^2}{(h/2)^2} = 1$; 3) $x^2 + (y - h)^2 = h^2$;

4) $x^2 + \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^2 y^2 = (v_0 t)^2$.

54. *Aceeaşi problemă, însă proiectilul fiind aruncat sub acelaşi unghi, cu viteze diferite.*

Indicaţie. Se obţine tot o familie de parabole. Coordonatele vîrfurilor: $x = h \sin 2\alpha$; $y = h \sin^2 \alpha$. Locul focarelor: $y = x \operatorname{tg}(2\alpha + \pi/2)$. Locul punctelor atinse după acelaşi timp: $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} g t^2$.

55. *Să se studieze mişcarea proiectilului ţinîndu-se seamă de rotaţia pămîntului (viteza unghiulară ω = const, φ = latitudinea locului).*

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. $\ddot{x} = -2\omega \sin\varphi y$; $\ddot{y} = 2\omega \sin\varphi \dot{x} - 2\omega \cos\varphi \dot{z}$; $\ddot{z} = g + 2\omega \cos\varphi \dot{y}$. Se va integra, neglijînd termenii în ω^2. Se obține:

$$y = -\omega g \frac{t^3}{2} \cos\varphi + \omega t^2 v_{x0} \cos\varphi + v_{y0} t;$$

$$x = -\omega v_{y0} t^2 \sin\varphi + v_{x0} t;$$

$$z = \frac{1}{2} g t^2 + \omega t + \omega v_{y0} t^2 \cos\varphi.$$

56. *Două proiectile sînt aruncate din același punct cu viteze inițiale și direcții diferite, în momentele t_0 și t_1. Să se scrie condiția pentru ca proiectilele să se ciocnească.*

Indicație. Condiția este $2v_0 v_1 \sin(\alpha_0 - \alpha_1) = g(t_1 - t_0) \times (v_0 \cos\alpha_0 + v_1 \cos\alpha_1)$. Ce loc exprimă această relație pentru $v_0 = v_1$; $\alpha_0 = \alpha_1$?

57. *Un punct material se mișcă într-un fluid omogen astfel încît rezistența fluidului este mereu proporțională cu pătratul vitezei. Să se determine curba tautocronă (Euler).*

Indicație. Ecuația mișcării este: $v\,dv = -g\,dy + kv^2\,ds$.

Punem: $$u = \int_0^y e^{-2ks}\,dy; \quad e^{-ks}\,ds = \varphi(u)\,du.$$

Rezultă: $$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{h-u}}.$$

Expresia lui t nu trebuie să conțină pe u, h, du. Rezultă ecuația tautocronei:

$$2a^2 \frac{dy}{ds} = e^{ks} - 1.$$

III. Dinamica punctului material legat

58. *Un punct material ($m = 1$) se mișcă fără frecare pe curba strîmbă $x^2 = 2ax$, $9y^2 = 16xz$, fiind solicitat de o forță ale cărei proiecții sînt:*

$$F_x = 4k^2 x; \quad F_y = \frac{9}{2} k^2 y; \quad F_z = 2k^2 (3z + a).$$

La $t = 0$, $v_0 = ak$ și punctul se găsește în origină, pornind spre $y > 0$. Să se studieze mișcarea.

Indicație. Dacă luăm z ca parametru, ecuațiile curbei se scriu:

$$x = \frac{z^2}{2a}; \quad y = \frac{4}{3} z \sqrt{\frac{z}{2a}}; \quad z = z.$$

Deci aici, prin derivare, se calculează: $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ și se observă că:

$$U = \int (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) = \frac{k^2}{2a^2}(z + a)^4.$$

Se scrie ecuația energiei $\frac{v^2}{2} = U + h$, care ne dă pe z în funcție de t.

Scanned with OKEN Scanner

59. *În planul xOy cu axa Oy verticală se dă curba:* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ *(astroida). Să se studieze mișcarea unui punct greu pe această curbă, știind că el pleacă cu viteza* $v_0 = \sqrt{2ga}$ *din punctul cel mai de jos al curbei.*

Indicație. Ecuația energiei este: $v^2 = -2gy$, deci $y \geqslant 0$. Punctul ajunge pe axa Ox ($y = 0$ cu $v = 0$). Pentru a calcula ordonata y în funcție de timp, utilizăm ecuațiile:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = -2gy \quad \text{și} \quad x^{-1/3}\,\dot{x} + y^{-1/3}\,\dot{y} = 0.$$

60. *Un punct material* ($m = 1$) se *mișcă fără frecare pe spirala* $r = e^{-\theta}$, *fiind atras de pol cu forța* $2r$. *La* $t = 0$ *punctul pleacă din* ($\theta = 0$, $r = 1$), *cu viteza* $v_0 = 0$. *Să se studieze mișcarea; să se calculeze reacțiunea curbei.*

Indicație. Din ecuația energiei $v^2 = 2(1 - r^2)$ rezultă $r \leqslant 1$. Avem: $\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 = 2(1 - r^2)$; adică $\dot{r}^2 = 1 - r^2$. Reacțiunea se obține din formula $N = \frac{v^2}{R} - F_n$, care R = raza de curbură, iar F_n proiecția forței pe normala la curbă.

61. *Un punct material* ($m = 1$) *se mișcă pe curba:* $r = a(1 + \cos\theta)$ *și este atras de pol cu forța* $F = -\frac{3a^5}{r^4}$. *La* $t = 0$ *punctul se află în vîrful curbei și are viteza* $\frac{a}{2}$. *Să se studieze mișcarea și să se calculeze reacțiunea.*

Indicație. Ținînd seamă de teorema energiei și de ecuația curbei, găsim ecuația diferențială $\dot{\theta}\,(1 + \cos\theta)^2 = 1$, care dă θ în funcție de timp. Pentru determinarea reacțiunii utilizăm aceeași metodă ca în exercițiul precedent.

62. *Un punct material* ($m = 1$) *se mișcă fără frecare pe curba* $r = a(1 + \cos\theta)$ *și este respins de pol cu o forță constantă* $4k^2a$. *La* $t = 0$ *punctul pleacă din* (r_0, θ_0) *cu* $v_0 = 0$. *Să se studieze mișcarea punctului și reacțiunea curbei.*

Indicație. Avem: $v = 2a\cos\frac{\theta}{2}\,\dot{\theta}$. Ecuația energiei ne dă:

$$\frac{\sqrt{2}}{k}\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos\frac{\theta}{2}\,d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{t}}} = t.$$

Prin substituția $\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi$ se obține:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\,t\right);$$

deci, obținem pe $\theta = \theta(t)$, etc.

63. *Un punct material* ($m = 1$) *se mișcă fără frecare pe curba plană:*

$$x = 30\omega - 41 \sin \omega + 10 \sin \omega \cos \omega ; \quad y = \frac{3}{8}(5 - 4 \cos \omega)^2,$$

axa Oy fiind verticală descendentă. La $t = 0$, *punctul are viteza minimă* $\frac{\sqrt{3g}}{2}$. *Se cere* 1): *să se afle lungimea pendulului simplu având perioada unei oscilații simple egale cu timpul dintre două poziții consecutive de viteză maximă a punctului* M *pe curbă*; 2) *să se calculeze reacțiunea.*

Indicație. $v^2 = (5 - 4 \cos \omega)^4 \omega^2$, este minimă când $\omega = 0$. Ecuația energiei ne dă $\omega = f(t)$.

64. *Un punct greu* ($m = 1$) *descrie curba* $y^3 = ax^2$, *axa Oy fiind verticală și descendentă. La* $t = 0$, *punctul se află în origină și are* $v_0 = \frac{2}{3}\sqrt{2ag}$. *Se cere*: 1) *să se calculeze componentele vitezei în funcție de timp*; 2) *să se studieze problema inversă.*

Indicație. 1) Punînd ecuația curbei sub forma parametrică: $y = \alpha t$; $x = \frac{2}{3}\beta t^{3/2}$, se găsește: $\dot{y} = v_0$; $\dot{x} = \sqrt{2gv_0 t}$. 2) Din $\dot{y} = v_0$ (const) avem $v\, dv/ds = v_0$. Ecuația energiei dă $v^2 = 2gy + v_0^2$. Se obține:

$$x = 2\sqrt{gv_0}\, t^{3/2} ; \quad y = v_0 t.$$ Ecuația curbei este: $8gy^3 = v_0^2 x^2$.

65. *Un punct material* ($m = 1$) *se mișcă, fără frecare, pe curba* $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$, *fiind atras invers proporțional cu cubul distanței de punctele* $F(a, 0)$ *și* $F(-a, 0)$. *La unitatea de distanță forța are valoarea* k. *Să se studieze mișcarea știind că în origină mobilul are viteza* $v_0 = \frac{2\sqrt{k}}{a}$. *Să se afle timpul în care se parcurge o buclă a curbei.*

Indicație. $v^2 = \frac{2a^2\dot{\theta}^2}{\cos 2\theta}$. Funcția forțelor este:

$$U = \int \bar{F}\, d\bar{r} = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta} + \frac{1}{r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta}\right) = \frac{k(a^2 + r^2)}{a^4}.$$

Ecuația energiei este:

$$\frac{2a^2\dot{\theta}^2}{\cos 2\theta} = \frac{2k}{a^2}(1 + 2\cos 2\theta) + h.$$

Condiția inițială pentru $\theta = \frac{\pi}{4}$, $v_0 = \frac{2\sqrt{k}}{a}$; deci $a^4\dot{\theta}^2 = 4k\cos^2\theta(2\cos^2\theta - 1)$, care dă perioada:

$$T = \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \frac{a^2\, d\theta}{2\sqrt{k}\cos\theta\sqrt{2\cos^2\theta - 1}} = \frac{\pi a^2}{2\sqrt{k}}.$$

66. *Un punct material* P ($m = 1$) *se mișcă pe un cerc fiind atras de un punct fix din planul cercului, proporțional cu distanța. Să se studieze mișcarea.*

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Fie A punctul fix ($OA = a$); $\sphericalangle AOP = \theta$; $v^2 = R^2\dot{\theta}^2$, R fiind raza cercului:

$$U = \int \bar{F}\, d\bar{r} = -\frac{k}{2}(R^2 + a^2 - 2a\,R\cos\theta).$$

Ecuația de mișcare este $\ddot{\theta} + \frac{ak}{R}\sin\theta = 0$, adică ecuația unei mișcări pendulare. Dacă la $t = 0$, $\theta = 0$, atunci avem:

$$\frac{Rd\theta}{\sqrt{v_0^2 - 4ak\,\sin^2\frac{\theta}{2}}} = dt.$$

Pentru ca mișcarea să fie oscilatorie trebuie ca $v_0^2 < 4ak\,R$; în acest caz perioada este:

$$T = 4\frac{R}{ak}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\mu^2\sin^2\varphi}},$$

unde $\mu = \frac{v_0}{2\sqrt{ak\,R}} < 1$ și $\sin\frac{\theta}{2} = \mu\sin\varphi$.

67. *Un punct material M se mișcă pe o epicicloidă și este solicitat de un centru O al cercului de bază cu o forță proporțională cu distanța.*

Indicație. Fie a, b, razele cercurilor; C centrul mobil (generator) $\sphericalangle xOC = \theta$, $\sphericalangle OCM = \varphi$.

Avem: $a\theta = b\varphi$; $v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{4b^2}{a^2}(a+b)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\dot{\varphi}^2$, deci:

$$s = -\frac{4b}{a}(a+b)\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Funcția forțelor $U = \frac{\mu}{2}\overrightarrow{OC}^2 = -\frac{\mu a^2 s^2}{8b(a+b)} + \text{const.}$ Ecuația energiei dă:

$$\dot{s}^2 + \frac{\mu a^2 s^2}{8b(a+b)} = h\ ;$$

deci:

$$\ddot{s} + \frac{\mu a^2}{8b(a+b)}s = 0 \text{ (pentru epicicloidă).}$$

68. *Să se studieze mișcarea pendulului simplu într-un mediu rezistent.*

Indicație. Pe lîngă greutatea $m\bar{g}$, reacțiunea normală $\bar{N}$, se adaugă rezistența $\bar{R}$. Ecuația mișcării devine: $ml\,\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - R$, unde: l este lungimea pendulului. θ — unghiul de elongație.

În cazul oscilațiilor mici, $\theta \ll 1$, și rezistența proporțională cu viteza $R = ml\varkappa\,\dot{\theta}$; se obține ecuația oscilațiilor cu amortizare:

$$\ddot{\theta} + \varkappa\,\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0;$$

care ne conduce la o integrală de forma $\theta = e^{-\frac{\varkappa}{2}t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$, unde $\omega^2 = \frac{g}{l} - \frac{\varkappa^2}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

69. *Un punct material greu* ($m = 1$) *descrie curba* $r^2 = a^2 \sin 2\theta$, *axa polară fiind verticală și descendentă. El pornește fără viteză inițială din origină, pe ramura verticală. Să se arate că pentru a ajunge într-un punct P al curbei, mobilul întrebuințează același timp, fie că parcurge coarda OP, fie arcul de curbă OP.*

Indicație. Fie Oy axa polară. Ecuația energiei este $v^2 = 2gy$. Dacă $\sphericalangle yOP = \alpha$, atunci timpul întrebuințat de mobil ca să parcurgă coarda OP este: $T_1 = \sqrt{\frac{2a}{g}}\sqrt{\frac{\sqrt{\sin 2\alpha}}{\cos\alpha}}$. Pentru a afla timpul necesar să parcurgă arcul OP, teorema energiei se scrie: $\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = 2gr\cos\theta$; sau, ținînd seamă de ecuația curbei: $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}\sin\theta\,(\sin 2\theta)^2$.

70. *Problema inversă: Un punct greu cade pe o curbă pornind din repaus și descrie arcul OM în același timp în care ar fi descris coarda OM (M fiind un punct oarecare al curbei). Să se găsească curba.*

Indicație. Fie $M(r, \theta)$ un punct oarecare al curbei, axa polară fiind verticală descendentă. Din ecuația $v^2 = 2gy$, scoatem $t = \int\frac{ds}{\sqrt{2gy}}$. Pentru coarda OM, $y = r\cos\theta$, deci $t = \sqrt{\frac{2r}{g\cos\theta}}$. Pentru arcul OM:

$$t = \int_0^r \frac{\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}}{\sqrt{2gr\cos\theta}}\,dr.$$

Egalînd și derivînd în raport cu r, avem ecuația diferențială:

$$r\frac{d\theta}{dr}(1 - \operatorname{tg}^2\theta) - 2\operatorname{tg}\theta = 0,$$

care integrată ne dă: $r^2 = a^2\sin 2\theta$; (o lemniscată).

71. *Să se găsească în planul vertical o curbă pe care un punct greu să se miște astfel încît raportul dintre reacțiunea curbei și componenta normală a greutății să fie constant.*

Indicație. Se găsește: $v\dot{\theta} = k\cos\theta$; $\dot{v} = g\sin\theta$. Deci:

$$\theta = \alpha t \quad \text{și} \quad x = \beta\cos^2\alpha t;\ y = \beta\sin\alpha t\cos\alpha t \text{ etc.}$$

72. *Un punct material M se mișcă pe un cerc, fiind atras de un punct fix al cercului cu o forță funcție de distanță. Să se determine expresia forței așa ca reacțiunea curbei să fie constantă.*

Indicație. Fie $f(r)$ funcția căutată. Ecuațiile de mișcare dau: $\ddot{\theta} = f(r)\sin\theta$; $2a\dot{\theta}^2 + f(r) = \text{const}$. Ecuația cercului $r = 2a\cos\theta$. Se obține $f(r) = \alpha r$.

Scanned with OKEN Scanner

73. *Un punct material de masă m este supus forței elastice* $F = -m\omega^2 r$. *Să se determine suprafețele de nivel și liniile de cîmp.*

Indicație. $-mgz - m\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2+z^2) = \text{const}$; $c_1 x = c_2 y = \omega^2 z + g$.

74. *Un punct greu se poate mișca, fără frecare, pe partea interioară a unui cerc vertical de rază R. Mobilul este lansat din punctul cel mai de jos, cu viteza inițială orizontală* v_0. *La ce condiție trebuie să satisfacă* v_0 *pentru ca punctul să descrie cercul întreg?*

Indicație. Avem:

$$m\frac{v^2}{R} = N - mg\cos\theta\,;\quad \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = mgR(\cos\theta - 1).$$

Deducem: $$N = \frac{m}{R}\left[v_0^2 + gR(3\cos\theta - 2)\right].$$

Condițiile sînt: $v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta) > 0$; $v_0^2 + gR(3\cos\theta - 2) > 0$; sau, cu siguranță cînd $v_0 > \sqrt{5gR}$ (pentru $\theta = \pi$).

75. *Un punct greu se poate mișca fără frecare pe partea exterioară a unui cerc vertical de rază R. Punctul este lansat din poziția cea mai de sus a cercului, cu viteza orizontală* $\bar{v}_0$. *Sub ce condiții părăsește cercul și pornește pe o traiectorie parabolică?*

Indicație. Avem relații similare ca în cazul precedent $N = \frac{m}{R}\left[gR(3\cos\theta - 2) - v_0^2\right]$. Reacțiunea naturală se anulează deci pentru $\cos\theta = (2gR + v_0^2)/3gR$.

76. *Aplicînd legile de mișcare a unui punct material* ($m = 1$), *fără frecare, pe un con de rotație (nefiind solicitat de nici o forță), să se determine liniile geodezice ale conului. Unghiul de la vîrf este* α.

Indicație. Plasăm conul cu axa sa drept axa z. Singura forță care solicită punctul este reacțiunea normală. Momentul ei față de axa conului (axa z) este nul; deci legea ariilor este satisfăcută în planul orizontal (x, y). Avem: $r^2\dot{\varphi} = c = \text{const}$. Integrala energiei, dă: $v^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = a^2 = \text{const}$. Eliminînd t între cele două ecuații rezultă:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{c}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2} = a^2.$$

Integrînd, obținem: $\frac{1}{r} = A\cos(\varphi\sin\alpha) + B\sin(\varphi\sin\alpha)$, care este proiecția geodezicei pe planul (x, y).

77. *Să se determine înălțimea terasamentului șinei exterioare a trenului la curbă, spre a nu sări de pe linie.*

Indicație. Fie v viteza; ρ raza de curbură; θ înclinarea față de planul orizontal. Ca reacțiunea $R = m(v^2/\rho\cos\theta - g\sin\theta)$ să fie nulă,

trebuie ca $\operatorname{tg}\theta = v^2/\rho g$. Fie h înălțimea terasamentului și s distanța dintre roți. Avem: $\operatorname{tg}\theta = h/\sqrt{s^2 - h^2}$; $h \ll s$; în practică $\operatorname{tg}\theta = h/s$. Așadar, se găsește $h = v^2 s/g\rho$.

78. *Ca aplicație a considerațiilor de la* § 93 (*linii geodezice*) *să se afle liniile geodezice ale elipsoidului.*

Indicație. Ecuația suprafeței este:

$$f \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

După § 93 ecuațiile mișcării sînt date de ecuația: $\ddot{m}\,\ddot{r} = \lambda \operatorname{grad} f$ (2)

unde λ este un parametru arbitrar. O integrală primă este $v = v_0$ (viteza constantă). Pentru a se găsi o a doua integrală, se derivează de două ori ecuația (1) și se ține seamă de (2).

Se deduce ecuația diferențială a liniilor geodezice ale elipsoidului:

$$\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right] = \text{const.}$$

Am pus $v = v_0 = \dot{s}$.

IV. Dinamica sistemelor de puncte materiale

79. *Două puncte materiale grele A și B, de aceeași masă, sînt legate solidar printr-o bară rigidă de lungime l fără masă. Unul dintre puncte se mișcă fără frecare pe o orizontală, celălalt pe o verticală, situată în același plan. Să se studieze mișcarea sistemului.*

Indicație. Alegem cele două drepte (orizontala și verticala) ca axe de coordonate. Notăm cu θ unghiul format de bara AB cu axa verticală. Reacțiunile R_A și R_B sînt normale la axe. Avem nevoie de trei ecuații:

1. Mișcarea centrului G de greutate al sistemului:

$$G\left(\xi = \frac{l}{2}\sin\theta,\ \eta = \frac{l}{2}\cos\theta\right)$$

este dată de două ecuații: $2m\ddot{\xi} = R_B$; $2m\ddot{\eta} = 2mg + R_A$; deci:

$$lm\,(\cos\theta\cdot\ddot{\theta} - \sin\theta\cdot\dot{\theta}^2) = R_B;$$

$$lm\,(-\sin\theta\cdot\ddot{\theta} - \cos\theta\cdot\dot{\theta}^2) = 2mg + R_A.$$

2. Teorema momentului cinetic ne dă (momentul cinetic total față de origine fiind nul):

$$l\sin\theta\,(R_A + mg) - R_B\, l\cos\theta = 0.$$

Înlocuind din (1) reacțiunile, se găsește: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$.

Sistemul oscilează deci ca un pendul simplu. Cunoscîndu-se:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l}\sin\theta \quad \text{și} \quad \dot{\theta}^2 = -\frac{2g}{l}\cos\theta + h$$

Scanned with OKEN Scanner

(h se determină prin datele inițiale) putem calcula, din (1), reacțiunile. Ecuația de mișcare se poate obține și prin aplicarea teoremei energiei.

80. *Să se studieze mișcarea unui sistem constituit din două puncte grele, de masă m, legate între ele invariabil și mobile într-un plan vertical. Unul dintre puncte este obligat să se miște, fără frecare, pe un ax orizontal.*

Indicație. Fie A și B cele două puncte. Se alege ca Ox dreapta descrisă de A, ca Oy verticala descendentă prin O. Fie $OA = \alpha$ și $\widehat{xAB} = \theta$. Reacțiunea în A este normală la Ox. $AB = l$. Coordonatele punctelor sînt:

$$A\,(\alpha, 0) \quad \text{și} \quad B\,(\alpha + l\cos\theta,\ l\sin\theta).$$

Exprimînd mișcarea centrului de greutate și teorema momentului cinetic, obținem trei ecuații:

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha + \frac{l}{2}\cos\theta\right) = C,$$

$$R = -2mg + ml\,(\cos\theta\cdot\ddot{\theta} - \sin\theta\cdot\dot{\theta}^2),$$

$$l\ddot{\theta} - \ddot{\alpha}\sin\theta = g\sin\theta.$$

Din aceste ecuații se obține mișcarea și reacțiunea.

81. *Un punct material A se mișcă, fără frecare, pe o dreaptă Ox. Un al doilea punct B de aceeași masă, invariabil legat de primul, este mobil în planul xOy, atras de Ox proporțional cu distanța. Să se studieze mișcarea sistemului.*

Indicație. $A\,(\alpha, 0)$; $B\,(\alpha + l\cos\theta,\ l\sin\theta)$. Reacțiunea R din A este normală la Ox. Forța $\bar{F} = -mk^2 l\sin\theta\,\bar{j}$. Mișcarea centrului de greutate dă ecuațiile:

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha + \frac{l}{2}\cos\theta\right) = \text{const} \quad \text{și} \quad R = mk^2\,l\sin\theta + ml\,(\cos\theta\cdot\ddot{\theta} - \sin\theta\cdot\dot{\theta}^2)$$

iar teorema momentului cinetic dă:

$$ml\frac{d}{dt}(\alpha\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\alpha}\sin\theta + l\dot{\theta}) = \alpha R - mk^2\,l\sin\theta\,(\alpha + l\cos\theta)$$

adică:
$$l\ddot{\theta} - \ddot{\alpha}\sin\theta + k^2 l\sin\theta\cos\theta = 0.$$

82. *Două particule grele m și m' sînt legate de punctele A și B cu un fir puțin elastic. Firul se fixează la partea superioară O astfel încît să rămînă în echilibru. Se aplică o mică perturbare verticală. Să se găsească oscilațiile.*

Indicație. Fie $OA = a$, $AB = b$ și E coeficientul de elasticitate, x și y altitudinile punctelor m și m'. Ecuațiile de mișcare sînt:

$$m\ddot{x} + E\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x - \frac{E}{b}y = mg; \qquad -\frac{E}{b}x + m'\ddot{y} + \frac{E}{b}y = m'g + E.$$

Pentru integrare punem:

$$x - h = A\sin(\omega t + a),\quad y - k = B\sin(\omega t + a);$$

Scanned with OKEN Scanner

unde h și k sînt niște constante de integrare. Pentru: $x = h$, $y = k$ avem: $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$. Deci, aceste constante dau pozițiile de echilibru.

Găsim :

$$\left(m\omega^2 - \frac{E}{a} - \frac{E}{b}\right)\left(m'\omega^2 - \frac{E}{\omega}\right) = \frac{E^2}{b^2}, \quad \frac{A}{B} = 1 - \frac{m'b}{E}\omega^2.$$

Oscilația principală este dată de soluția scrisă mai sus.

83. *Să se studieze mișcarea unui sistem format din două puncte materiale grele, invariabil legate între ele, unul dintre puncte descriind o verticală Oz iar celălalt un plan orizontal xOy.*

Indicație. Fie cele două puncte:

$$A\ (l \sin\theta \cos\varphi,\ l \sin\theta \sin\varphi,\ 0) \text{ și } B\ (0, 0, l\cos\theta).$$

Reacțiunea R din A este paralelă cu Oz, cea din B este normală la Oz avînd pe Ox și Oy proiecțiile R' și R''. Avem nevoie de cinci ecuații.

1) Mișcarea centrului de greutate:

$$2m\ddot{\xi} = R',\ 2m\ddot{\eta} = R'',\ 2m\ddot{\zeta} = 2mg + R.$$

2) Teorema momentului cinetic dă ecuațiile:

α) $0 = (mg + R)\sin\theta\sin\varphi - R''\cos\theta$;

β) $0 = (mg + R)\sin\theta\cos\theta\cos\varphi - R'\cos\theta$ și

γ) $\frac{d}{dt}(\sin^2\theta\,\dot{\varphi}) = 0.$

Din (α) și (β) se deduce $R'\sin\varphi = R''\cos\varphi$, deci reacțiunea din B este situată în planul OBA. Ecuația (γ) dă $\sin^2\theta\,\dot{\varphi} = \text{const}$, care este ecuația ariilor proiectate pe xOy. Această ecuație se putea scrie de la început, observînd că forțele sistemului întîlnesc Oz.

3) Ecuația energiei dă:

$$\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}\cos\theta + h.$$

Se vede că sistemul oscilează ca un pendul sferic.

84. *Să se calculeze momentul de inerție al unui rigid omogen de rotație, limitat de două plane paralele perpendiculare pe axă, în raport cu axa de rotație.*

Indicație. Fie $z = \varphi(z)$, ecuația curbei meridiane a suprafeței care limitează corpul de rotație în jurul lui Oz. Descompunînd rigidul în cilindrii elementari prin plane perpendiculare pe axă, momentul de inerție al unui cilindru este $\frac{1}{2}\pi r^4 \rho\, dz$. Dacă z_0 și z_1 sînt cotele paralelelor extreme momentul de inerție total va fi dat de:

$$\frac{\pi\rho}{2}\int_{z_0}^{z_1} r^4\, dz,$$

r fiind legat de z prin ecuația $z = \varphi(r)$.

Scanned with OKEN Scanner

85. *Problema lui Binet: să se găsească înfășurătoarea planelor față de care momentul de inerție al unui sistem material are o valoare dată* Mk^2.

Indicație. Raportăm sistemul material la axele principale de inerție Gx, Gy, Gz relative la centrul său de greutate. Fie Ma^2, Mb^2 Mc^2 momentele de inerție față de planele de coordonate. Momentul de inerție față de un plan oarecare: $ux + vy + wz + 1 = 0$ este:

$$\sum mr^2 = \sum \frac{m\,(ux + vy + wz + 1)}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Dezvoltînd această expresie și observînd că:

$$\sum mx = \sum my = \sum mz = \sum myz = \sum mzx = \sum mxy = 0$$

găsim relația:

$$Mk^2 = \frac{u^2 Ma^2 + v^2 Mb^2 + w^2 Mc^2 + M}{u^2 + v^2 + w^2}$$

sau:

$$u^2 (a^2 - k^2) + v^2 (b^2 - k^2) + w^2 (c^2 - k^2) + 1 = 0,$$

care este ecuația tangențială a suprafeței căutate. Se vede că obținem un fascicul de suprafețe de ordinul al doilea, omofocale. Să se treacă la coordonate punctuale.

86. *Servindu-se de rezultatul precedent să se demonstreze teorema: planele principale de inerție relative la un punct oarecare* O' *sînt planele tangente la cele trei suprafețe omofocale a lui Binet ce trec prin acel punct. Momentele de inerție ale sistemului față de aceste plane sînt:* $M\alpha^2$; $M\beta^2$; $M\gamma^2$, M *fiind masa totală a sistemului iar* α^2, β^2, γ^2 *rădăcinile ecuației în* k^2:

$$\frac{x'^2}{a^2 - k^2} + \frac{y'^2}{b^2 - k^2} + \frac{z'^2}{c^2 - k^2} + 1 = 0 \text{ cu } O'(x', y', z').$$

87. *Să se găsească condiția necesară și suficientă ca o dreaptă (axa* z*) să fie axă principală de inerție pentru orice punct de pe ea.*

Indicație. Fie O originea sistemului de axe de rotație, așezat pe axa z și un alt punct C de pe Oz; fie Cx', Cy' celelalte două axe de inerție. Punem $\overline{CO} = h$, și $\sphericalangle\, \theta = \sphericalangle\, (Cx', Ox)$. Avem:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta,\quad y' = -x\sin\theta + y\cos\theta,\quad z' = z - h.$$

$$\sum mx'z' = \cos\theta \sum mxz + \sin\theta \sum myz - h\,(\cos\theta \sum mx + \sin\theta \sum my) = 0;$$

$$\sum my'z' = -\sin\theta \sum mxz + \cos\theta \sum myz - h\,(-\sin\theta \sum mx + \cos\theta \sum my) = 0;$$

$$\sum mx'y' = \sum m\,(y^2 - x^2)\frac{\sin 2\theta}{2} + \sum mxy\cos 2\theta = 0.$$

Rezultă: $\operatorname{tg} 2\theta = \dfrac{2\Sigma mxy}{\Sigma m\,(x^2 - y^2)}$. Eliminînd pe h se obține:

$$h = \frac{\Sigma myz}{\Sigma my} = \frac{\Sigma mxz}{\Sigma mx}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca și axele Cx', Cy' să fie axe principale de inerție este necesar și suficient ca $h = 0$, adică: $\sum myz = 0$; $\sum mxz = 0$.

88. *Să se calculeze momentele de inerție ale unui paralelipiped omogen; dreptunghi omogen; segment de dreaptă.*

Indicație. Axele corpului sînt și axe principale de inerție. Fie $2a$, $2b$, $2c$ dimensiunile, și C centrul de masă. Avem:

$$J_1 = \mu \int x^2\, dx\, dy\, dz = \frac{8}{3}\mu a^3 bc;$$

masa totală $m = 8\mu abc$. Rezultă:

$$J_1 = m\frac{a^2}{3};\ J_2 = m\frac{b^2}{3};\ J_3 = m\frac{c^2}{3} \text{ etc.}$$

Momentul relativ la o diagonală este: $A'\alpha^2 + B'\beta^2 + C'\gamma^2$, unde:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} = \frac{\beta^2}{b^2} = \frac{\gamma^2}{c^2} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Deci:
$$J = \frac{2m}{3}\,\frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Pentru dreptunghi facem ca una dintre dimensiunile paralelipipedului să tindă spre zero, de exemplu $c \to 0$. Găsim:

$$A' = \frac{mb^2}{3};\ B' = \frac{ma^2}{3};\ C' = \frac{m(a^2 + l^2)}{3}.$$

Pentru segmentul de dreaptă facem încă o dimensiune să tindă spre zero; de exemplu, $b \to 0$. Avem:

$$A' = 0;\ B' = C' = \frac{ma^2}{3}.$$

89. *Să se calculeze momentele de inerție pentru o placă eliptică omogenă.*

Indicație. Axele elipsei sînt axe principale centrale de inerție. Cum $z = 0$, avem:

$$A' = \mu \int y^2\, dx\, dy;\ B' = \mu \int x^2\, dx\, dy;\ C' = A' + B'.$$

Prin substituția: $x = ar\cos\varphi$; $b = br\cos\varphi$, se găsește:

$$A' = \frac{mb^2}{4};\ B' = \frac{ma^2}{4}.$$

90. *Fie un semicerc omogen de masă M și diametru $OA = 2R$. Se dă o dreaptă Δ ce trece prin O și face unghiul φ cu OA.*

Se cere: 1) *Momentul de inerție al semicercului în raport cu dreapta Δ.* 2) *Să se determine pe tangenta la semicerc în O un punct θ', pentru care această tangentă este o axă principală de inerție.*

Indicație. Cosinusurile directoare ale lui Δ sînt $\alpha = \cos\varphi$; $\beta = \sin\varphi$. Se calculează: $\sum my^2$, $\sum mx^2$ și $\sum mxy$, luînd ca axă x pe OA și ca

Scanned with OKEN Scanner

axă y tangenta în O. $\sum my^2$ = momentul de inerție față de Ox care este egal cu $MR^2/4$; $\sum mx^2 = 5MR^2/4$. Fie r și θ coordonatele polare ale unui punct de pe semicerc. Densitatea superficială este $2M/\pi R^2$. Așadar se găsește:

$$\sum mxy = \frac{2M}{\pi R^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2R\cos\theta} \cos\theta \sin\theta r^2 \, dr \, d\theta = \frac{4MR^2}{3\pi}.$$

Momentul de inerție este:

$$J = MR^2 \left(\frac{1}{4} \cos^2\varphi + \frac{5}{4} \sin^2\varphi - \frac{8}{3\pi} \cos\varphi \sin\varphi \right).$$

Punctul O' are ordonata: $\sum \frac{mxy}{Mx_0} = \frac{4R}{3\pi}$.

91. *Dîndu-se o arie plană situată în planul xOy, privită ca locul elementelor materiale cu z nul, să se arate că:*

1) *orice axă situată în planul ariei este principală pentru unul dintre punctele sale; să se găsească coordonatele punctului;*

2) *momentul de inerție al ariei în raport cu Oz este egal cu suma momentelor de inerție în raport cu Oz și Oy.*

92. *Să se găsească locul punctelor față de care elipsoizii de inerție ale unui sistem material dat sînt de rotație.*

Indicație. Trebuie ca ecuația din exercițiul (87) să admită două rădăcini egale; se găsește o elipsă și o hiperbolă situate în două plane principale relative la centrul de greutate.

93. *Să se găsească momentele de inerție față de axa Oz pentru următoarele corpuri:*

1) *cilindrul generat prin rotația în jurul lui Oz a unui drepunghi de latură a și înălțime h;*

2) *con generat de dreapta $x = az$ și limitat prin planul $x = h$;*

3) *segment de paraboloid generat de parabola $x^2 = 2pz$ și cuprins între planele Oxy și $z = h$;*

4) *segment sferic, cu centrul în origine;*

5) *semitor generat de un cerc de raza r, în planul xz, cu centrul la distanța R de origine $(OR \geqslant r)$;*

6) *trunchi de con generat de dreapta $y = z \operatorname{tg}\alpha$.*

94. *Orice sistem de coordonate ale cărui axe sînt paralelele cu axele principale centrale de inerție și care are originea așezată pe una dintre aceste axe, este el însuși un sistem de axe principale de inerție.*

Indicație. Fie (G, x, y, z) sistem principal de inerție central; (O, x', y', z') sistem cu centrul în O $(0, a, 0)$ și axele paralele cu sistemul G. Momentele centrifugale relative la noile axe sînt:

$$\sum m_i y'_i z'_i = \sum m_i (y_i - a) z_i = \sum m_i y_i z_i - a \sum m_i z_i = 0;$$

$$\sum m_i z'_i x'_i = \sum m_i z_i x_i = 0;$$

$$\sum m_i x'_i y'_i = \sum m_i (y_i - a) x_i = \sum m_i x_i y_i - a \sum m_i x_i = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

95. *Să se studieze mișcarea unei bare AB omogene, grele, care se mișcă într-un plan vertical, presupunînd că extremitățile barei descriu fără frecare o dreaptă orizontală Ox și o dreaptă verticală Oy.*

Indicație. $A(l\sin\theta, 0)$, $B(0, l\cos\theta)$, $AB = l$,

$$G\left(\xi = \frac{l}{2}\sin\theta, \eta = \frac{l}{2}\cos\theta\right).$$

Aplicăm teorema energiei. După teorema lui König avem:

$$T = T_G + \frac{m}{2}v_G^2, \quad T_G = \frac{m}{2}k^2\dot{\theta}^2,$$

k fiind raza de girație a barei față de centrul de greutate G; găsim:

$$T = \frac{m}{6}l^2\dot{\theta}^2. \text{ Apoi: } U = -\int \bar{F}\,d\bar{r} = -mg\frac{l}{2}\cos\theta,$$

deci, din ecuația energiei găsim: $\ddot{\theta} + \frac{3g}{l}\sin\theta = 0$.

Bara se mișcă deci ca un pendul simplu. Reacțiunile se găsesc aplicînd teorema mișcării centrului de greutate.

96. *Să se studieze mișcarea unei bare omogene grele de lungime $2l$ și masă m ale cărei extremități se mișcă fără frecare pe un cerc vertical de rază a.*

Indicație. Ecuația energiei se scrie:

$$\frac{1}{2}m\left(a^2 + \frac{l^2}{3}\right)\dot{\theta}^2 = mga\sin\theta,$$

unde θ este unghiul făcut de diametrul vertical cu OG (distanța de la centrul cercului la centrul de greutate al barei).

97. *O bară AB omogenă, grea, de masă m și lungime $a\sqrt{3}$ se mișcă avînd extremitățile pe un cerc O vertical, de rază a. Mijlocul C al barei este respins de diametrul vertical al cercului cu o forță proporțională cu distanța. La unitatea de distanță, valoarea forței este $4mg/a$. La $t = 0$ bara este verticală și n-are viteză unghiulară. Să se studieze mișcarea.*

Indicație. Fie θ unghiul format de diametrul vertical cu OGx. Teorema energiei dă:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}\cos\theta(1 - \cos\theta), \text{ deci: } c\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \mathrm{ch}\sqrt{\frac{g}{a}}t.$$

98. *Să se studieze mișcarea unei bare omogene AB situată într-un plan, fiind obligată să treacă tot timpul printr-un punct fix al planului.*

Indicație. $AB = 2l$, $OG = r$, unghiul $xOG = \theta$. Reacțiunea punctului O este normală pe AB. Neexistînd nici o forță, ecuația energiei se reduce la $T = h$, adică:

$$\dot{r}^2 + \left(r^2 + \frac{l^2}{3}\right)\dot{\theta}^2 = h.$$

Scanned with OKEN Scanner

Teorema momentului cinetic față de O ne dă integrala ariilor $\left(r^2 + \frac{l^2}{3}\right)\dot{\theta} = \text{const}$. Prin eliminarea lui t se obține ecuația diferențială a traiectoriei lui G:

$$\pm \frac{\sqrt{h}}{c}\, d\theta = \frac{dr}{\sqrt{\left(r^2 + \frac{l^2}{3}\right)\left(r^2 + \frac{l^2}{3} - \frac{c^2}{h}\right)}}.$$

Se vede că r crește mereu, bara scăpînd de la un moment dat din legătura punctului O. Să se discute și cazul excepțional cînd $\frac{l^3}{3} = \frac{c^2}{h}$.

99. *Să se studieze mișcarea unui disc greu, circular, neomogen, care se mișcă într-un plan vertical, rostogolindu-se fără alunecare pe o orizontală Ox a planului.*

Indicație. Fie a raza discului și d distanța de la centrul său de greutate G la punctul C al cercului. Considerăm că la $t = 0$ discul este tangent la Ox în O. Fie unghiul $ACG = \theta$, A fiind punctul de contact al discului cu Ox, într-o altă poziție.

Condiția de rostogolire fără alunecare se exprimă prin $OA = a\theta$. În A avem o forță de reacțiune cu proiecțiile R' și R'' pe Ox și Oy. Mișcarea este dată de teorema energiei, iar reacțiunile de teorema mișcării centrului de greutate.

100. *O bară omogenă grea AB de lungime $2l$ și masă m se poate mișca într-un plan vertical în jurul extremității A care este fixă. De cealaltă extremitate B este legat un fir inextensibil, trecut pe după un scripete C punctiform, avînd la capăt o greutate G de masă m'. Punctul C se află pe orizontala lui A la distanța $\overline{AC} = 2l$. Să se studieze mișcarea, viteza inițială fiind nulă.*

Indicație. Însemnăm cu θ unghiul făcut de bară în momentul t cu verticala descendentă care trece prin A. Se aplică ecuația (9) § 192. Observăm că triunghiul ABC este isoscel: $AC = AB = 2l$. Se găsește ecuația:

$$J\ddot{\theta} = gl\,(m' - m)\sin\theta + m'gl;$$

sau:

$$\dot{\theta}^2 = 2gl\,(m - m')\cos\theta + m'gl\,\theta - 2gl\,(m - m').$$

Integrarea se continuă ușor pentru $m = m'$. Reacțiunea în A se calculează după § 191. J este momentul de inerție față de axa de rotație.

101. *Să se studieze mișcarea unei bare AB omogene, grele, știind că extremitatea A descrie fără frecare o verticală, iar cealaltă extremitate descrie un plan orizontal.*

Indicație. $x = (l - r)\sin\theta\cos\varphi$; $y = (l - r)\sin\theta\sin\varphi$; $z = r\cos\theta$ sînt coordonatele lui B în plan orizontal.

102. *Problema metronomului. Se consideră un pendul fizic constituit dintr-o bară omogenă, mobilă într-un plan vertical, în jurul unui ax O perpendicular pe plan. Partea superioară a barei este mai scurtă și este prevă-*

zută cu o greutate mare. Partea inferioară a barei este prevăzută cu o greutate mică care poate aluneca de-a lungul barei, putîndu-se fixa în oricare punct al acesteia. Să se studieze durata oscilațiilor infinit mici în funcție de poziția greutății deplasabile.

Indicație. Se aplică teoria pendulului fizic, observînd că momentul de inerție variază cu poziția greutății deplasabile.

103. *Un tub rectiliniu, omogen, de secțiune infinitesimală și de lungime 2a alunecă fără frecare pe un plan orizontal; un punct material M avînd masa egală cu masa tubului este mobil, fără frecare, în interiorul acestuia. Să se găsească mișcarea sistemului și presiunea punctului M pe tub.*

Indicație. Fie θ unghiul făcut de AB cu o axă fixă Ox din plan, $2r$ = segmentul CM socotit de la centrul C al tubului. Cele două teoreme ne dau:

$$\left(r^2+\frac{k^2}{2}\right)\dot{\theta}=C \quad \text{și} \quad \dot{r}^2+\left(r^2+\frac{k^2}{2}\right)\dot{\theta}^2=h;$$

eliminînd timpul putem exprima r în funcție de θ cu ajutorul funcțiilor eliptice (traiectoria punctului M). Să se determine valorile inițiale astfel ca traiectoria lui M să fie o curbă algebrică.

104. *Un disc omogen greu, situat într-un plan vertical, se rostogolește fără alunecare pe o dreaptă Ox, fixă, din plan. Centrul discului este atras proporțional cu distanța de un punct fix O al dreptei. Se cere mișcarea discului, viteza inițială fiind nulă.*

Indicație. Centrul discului este centrul de greutate $C(\xi, \eta=R,$ unde R = raza). Ecuația: $\ddot{\bar{M}}\bar{r}=-k^2\bar{r}+\bar{T}_A$ (unde $\bar{T}_A$ este reacțiunea în punctul de contact A cu axa fixă Ox). Avem:

$$M\ddot{\xi}=-k^2\xi; \qquad 0=-k^2R+T.$$

Rezultă:

$$\xi=\xi_0 e^{\sqrt{-\frac{k^2}{Mt}}}.$$

Punctul A este centrul instantaneu de rotație în jurul axei care trece prin C. Deci, viteza unghiulară de rotație este dată de relația $R\omega=v$ (viteza lui C). Ultima relație se obține și din teorema momentului cinetic. Observînd că momentul cinetic față de O este: $M\bar{r}\times\dot{\bar{r}}+J\bar{\omega}$, unde $J=MR^2$.

105. *Un triunghi echilateral material OAB poate să alunece pe un plan orizontal fix xOy (fără frecare); vîrful O rămîne fix. Un punct material M de masă 1 este obligat să alunece fără frecare pe latura AB, fiind legat de vîrful fix O printr-un fir OM elastic și fără masă, a cărui lungime naturală (cînd nu este întins) este egală cu înălțimea OH = a a triunchiului. Presupunem că tensiunea firului este proporțională cu lungirea sa, astfel încît atunci cînd firul are lungimea r, tensiunea sa este $2k(r-a)$, k fiind o constantă pozitivă. Să se studieze mișcarea sistemului.*

Indicație. Fie $OM=r$, $\sphericalangle HOM=\alpha$, $\sphericalangle xOH=\varphi$, J este momentul de inerție al triunghiului în raport cu O. Dar: $\cos\alpha=a/r$.

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm drept parametri independenţi r şi φ. Admitem că la $t = 0$ sistemul pleacă din repaus, M fiind în A. Aplicăm teorema momentului cinetic faţă de O şi teorema energiei. Obţinem două ecuaţii:

$$J\dot{\varphi} + r^2(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) = 0 \quad \text{şi} \quad J\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 + r^2(\dot{\varphi} + \dot{\alpha})^2 = -k(r - a)^2 + h,$$

unde h are valoarea: $h = ka^2 \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{3}$ (datele iniţiale fiind cele admise). Eliminînd pe α şi φ, găsim pentru r:

$$\psi(r)\dot{r}^2 + k(r - a)^2 = h$$

unde $\psi(r) > 0$ pentru toate valorile posibile ale lui $r < \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Să se găsească, sub formă finită, relaţia dintre r şi φ. Să se discute mişcarea.

106. *Un corp rigid, mobil în jurul unui punct fix este solicitat de un cuplu a cărei axă este mereu paralelă şi egală cu momentul cinetic înmulţit cu o constantă* λ. *Să se studieze mişcarea (cazul Greenhill-Padova).*

Indicaţie. Ecuaţiile lui Euler devin în acest caz:

$$A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z + \lambda A\omega_x = 0, \ldots$$

Făcînd substituţia: $\omega_x = e^{-\lambda t}\omega'_x, \ldots$; $\lambda t' = 1 - e^{\lambda t}$;
ecuaţiile se reduc la: $A\ddot{\omega}'_x + (C - B)\omega'_y\omega'_z = 0, \ldots,$
în care punctul înseamnă derivata în raport cu t'. Problema se reduce astfel la cazul lui Euler.

107. *Să se studieze mişcarea în jurul centrului său a unei sfere omogene, într-un mediu rezistent. Sfera este prevăzută cu aripioare plane de formă oarecare, planele lor trecînd prin centrul fix al sferei. Rezistenţa este o forţă normală pe fiecare aripioară, proporţională cu componenta vitezei normală pe planul ei.*

Indicaţie. Ecuaţiile lui Euler sînt în acest caz ecuaţii liniare cu coeficienţi constanţi. Să se formeze aceste ecuaţii, să se integreze şi să se discute mişcarea.

108. *Să se integreze ecuaţiile de mişcare ale unui rigid mobil în jurul unui punct fix, în cazul cînd aceste ecuaţii sînt de forma:*

$$A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z + c\omega_y - b\omega_z = 0$$
$$B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_z\omega_x + a\omega_z - c\omega_x = 0$$
$$C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y + b\omega_x - a\omega_y = 0$$

(cazul Volterra).

Indicaţie. Se formează imediat integralele prime:

$$A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = 2h;$$
$$(A\omega_x + a)^2 + (B\omega_y + b)^2 + (C\omega_z + c)^2 = k^2;$$

cu ajutorul cărora problema se reduce la cuadraturi.

Scanned with OKEN Scanner

109. *Să se integreze ecuațiile lui Euler în cazul unui rigid de rotație, mobil în jurul unui punct fix, acționat de o forță aplicată într-un punct al rigidului și având direcție fixă față de rigid.*

Indicație. Alegînd convenabil axele legate de corp, ecuațiile lui Euler devin:

$$A\dot{\omega}_x + (C - A)\,\omega_y\omega_z = M_x(t)$$
$$A\dot{\omega}_y + (A - C)\,\omega_z\omega_x = M_y(t)$$
$$C\dot{\omega}_z = M_z(t).$$

Ultima ecuație integrală ne dă: $\omega_z = \frac{1}{2}\int M_z\,dt + \text{const.}$

Eliminînd pe ω_y între primele două, găsim ecuația diferențială pentru ω_x:

$$\frac{A^2}{(C-A)^2}\frac{1}{\omega_x^2}\ddot{\omega}_x + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{A^2}{(C-A)^2\omega_z^2}\right]\dot{\omega}_x + \omega_x = \Phi(t),$$

în care: $\omega_z(t)$ este calculat mai înainte;
$\Phi(t)$ este o funcție cunoscută de t.

Considerăm ecuația fără membrul al doilea și observăm că o putem reduce la o ecuație cu coeficienți constanți prin substituția:

$$t_1 = \frac{C-A}{A}\int \omega_z(t)\,dt.$$

Ecuația neomogenă se integrează apoi prin metoda variației constantei arbitrare. Avînd expresia lui $\omega_x(t)$, vom calcula pe $\omega_y(t)$, din sistemul inițial, prin derivări. Pentru a găsi, în sfîrșit, mișcarea rigidului față de sistemul fix în spațiu, considerăm relațiile § 163. Eliminînd pe θ și φ între aceste ecuații, obținem pentru ψ o ecuație diferențială de ordinul al doilea. Observăm că:

$$\psi = \int \omega_z\,dt + \text{const},$$

este o integrală a acestei ecuații. Avînd pe ψ putem calcula ușor pe θ și φ prin cuadraturi.

110. *Să se studieze mișcarea unui cilindru greu, circular, neomogen, care se poate rostogoli fără alunecare pe un plan orizontal. Cazul amplitudinilor foarte mici.*

Indicație. Fie C centrul de greutate, O centrul cercului de secțiune dreaptă, A punctul de contact cu planul orizontal, h = distanța OC, a = raza; m = masa, mk^2 = momentul de inerție față de o paralelă prin C la axa cilindrului, $\varphi = \sphericalangle AOC$. Momentul de inerție relativ la o axă care trece prin A și paralelă cu axa cilindrului este:

$$mh^2 = mk^2 + m(a^2 + l^2 - 2al\cos\varphi).$$

Forța aplicată în C este mg. Ecuația mișcării este:

$$(k^2 + a^2 + l^2 - 2al\cos\varphi)\ddot{\varphi} + al\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + gl\sin\varphi = 0;$$

Scanned with OKEN Scanner

care se integrează prin cuadraturi eliptice. Pentru amplitudini foarte mici în jurul poziției de echilibru $\varphi = 0$, avem: $[k^2 + (a-l)^2]\ddot{\varphi} + gl\varphi = 0$; deci, oscilații pendulare de perioadă:

$$2\pi\sqrt{\frac{k^2+(a-l)^2}{gl}}.$$

111. *Să se studieze mișcarea unei sfere care se rostogolește fără frecare, pornind din repaus, pe linia de cea mai mare pantă a unui plan înclinat.*

Indicație. Fie α = unghiul liniei de cea mai mare pantă Ox cu orizontul, r = raza sferei, x = distanța parcursă, φ = unghiul cu care s-a rostogolit sfera în jurul diametrului orizontal, perpendicular pe Ox. Avem $x = r\varphi$. Teorema lui König ne dă:

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{mr^2}{5}\dot{\varphi}^2 = \frac{7}{10}mr^2\dot{\varphi}^2 = \frac{7}{10}m\dot{x}^2.$$

Ecuația mișcării este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{7}{5}m\dot{x}\right) = mg\sin\alpha; \quad \ddot{x} = \frac{5}{7}g\sin\alpha \text{ etc.}$$

112. *Să se analizeze efectul girostatic, care mărește stabilitatea proiectilului, pe traiectorie, la armele cu ghivent.*

Indicație. Proiectilul este un corp de rotație în jurul axei D care trece prin centrul său de greutate G. Fie ω viteza unghiulară de rotație proprie; R = rezistența aerului aplicată într-un punct A deasupra lui G, la distanța $GA = l$, pe axa de rotație. Fie θ unghiul făcut de R cu D, J = momentul de inerție în jurul lui D. Cuplul care deviază proiectilul este $Rl\sin\theta$. După § 199—201, viteza de precesie este dată de relația $\Omega = Rl\sin\theta/J\omega\sin\theta_0$; deci, cu cît rotația proprie ω este mai mare, cu atît deviația Ω este mai mică. Dacă axa proiectilului ar avea o direcție fixă ($\theta = 0$), deviația ar fi nulă.

113. *Să se studieze mișcarea unei sfere grele omogene, alunecînd fără frecare pe un elipsoid de rotație cu o axă verticală Oz (Painlevé).*

Indicație. Forțele aplicate sferei sînt: greutatea și reacțiunea normală ale elipsoidului. Aceste forțe trec prin centrul sferei — deci mișcarea sferei în jurul centrului este o mișcare de rotație uniformă în jurul unei axe fixe în spațiu și în sferă. Mișcarea centrului de greutate este mișcarea unui punct greu mobil pe o suprafață de revoluție paralelă cu elipsoidul dat. Teorema energiei și teorema momentelor în raport cu Oz ne dau două integrale prime care determină mișcarea.

114. *Să se studieze mișcarea unui rigid avînd două puncte A și B care pot aluneca pe două drepte fixe, paralelele L și L'. Rigidul este greu și legăturile fără frecare (Painlevé).*

Indicație. Fie P piciorul perpendicularei dusă din centrul de greutate G pe dreapta AB. P descrie o paralelă la L, L' pe care o luăm ca axă z. Ox este perpendiculară la LL' dusă în planul lor. Parametrii care determină poziția rigidului sînt: cota ζ a lui G și unghiul ψ făcut

de semiplanul ABG cu semiplanul ABZ, socotit pozitiv de la stînga la dreapta în jurul lui AB. Notînd cu M masa rigidului şi cu α, β, γ componentele greutăţii Ox, Oy, Oz, mişcarea lui G este dată de ecuaţia diferenţială:

$$M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = M\gamma,$$

care se integrează imediat. Teorema energiei ne dă o altă integrală în care intră ψ, ψ', ζ şi ζ'. Înlocuind pe ζ şi ζ' în funcţie de timp, putem găsi pe $\psi = \psi(t)$ printr-o cuadratură.

115. *Să se studieze mişcarea unei bare rectilinii, omogene, grea, zvîrlită în spaţiu, oricum.*

Indicaţie. Fie AB bara, M = masa, G = centrul de greutate (ξ, η, ζ) faţă de un sistem fix în spaţiu $Oxyz$. Fie $G(x_1, y_1, z_1)$ sistemul legat de bară. Ecuaţiile de mişcare ale centrului de greutate sînt:

$$M\ddot{\xi} = 0; \quad M\ddot{\eta} = 0; \quad M\ddot{\zeta} = -Mg.$$

Fie α, β, γ cosinusurile directoare ale direcţiei BA faţă de axele mobile; ρ = vectorul de poziţie al unui punct de pe bară faţă de G. Avem: $x_1 = \alpha\rho$; $y_1 = \beta\rho$; $z_1 = \gamma\rho$. Momentul cinetic în raport cu Gx_1 este (punînd $Mk^2 = \Sigma m\rho^2$); $Mk^2(\beta\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta})$ etc. Teorema momentului cinetic dă $\zeta = 0$; aşadar, $Mk^2(\beta\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta}) = a$; $Mk^2(\gamma\dot{\alpha} - \alpha\dot{\gamma}) = b$; $Mk^2(\alpha\dot{\beta} - \beta\dot{\alpha}) = c$; unde a, b, c, sînt constante de integrare. Se obţine $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$; deci, direcţia α, β, γ este ortogonală direcţiei fixe a, b, c. Bara în mişcarea ei absolută rămîne paralelă cu un plan fix. Fie ω viteza unghiulară în mişcarea relativă. Energia cinetică $Mk^2\omega^2 = \text{const}$. Deci bara se roteşte uniform în jurul centrului ei de greutate.

116. *O bară grea de masă m şi lungime $AB = 2l$ este, la începutul mişcării, aşezată vertical pe un plan orizontal; apoi cade, fără viteză iniţială, din cauza poziţiei iniţiale de echilibru nestabil. Să se studieze mişcarea.*

Indicaţie. Fie R reacţiunea în punctul de sprijin A; ξ, η coordonatele centrului de greutate ($\xi_0 = 0$; $\eta_0 = l$). Avem $m\ddot{\xi} = 0$; $m\ddot{\eta} = mg - R$. Fie θ unghiul direcţiei momentane cu verticala în timpul căderii. Mişcarea în jurul centrului de greutate este dată de $J\ddot{\theta} = lR\sin\theta$; unde $J = m\frac{l^2}{3}$. Apoi din $l - \eta = l\cos\theta$, rezultă:

$$\ddot{\theta}\left(\frac{J}{\sin\theta} + mg\sin\theta\right) + ml\cos\theta\,\dot{\theta}^2 = mg.$$

Ecuaţia energiei în momentul iniţial cînd începe căderea, ne dă:

$$mgl = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{J}{2}\omega_0^2, \quad \text{cu} \quad v_0 = l\omega_0, \quad \text{şi cu} \quad \omega_0^2 = \frac{3g}{2l}.$$

117. *O bară grea m de lungime $OA = l$ este articulată în O pe planul orizontal şi se reazemă cu extremitatea A pe o prismă BCD, de masă M (forma unui triunghi isoscel cu unghiul de la baza CD egal cu α), care poate aluneca pe planul orizontal, de-a lungul dreptei Ox. Mişcarea este fără frecare. Să se studieze mişcarea.*

Scanned with OKEN Scanner

Indicaţie. Fie θ poziţia momentană a barei, egală cu unghiul dintre OA şi dreapta Ox, şi x poziţia punctului C pe Ox, în acest moment. Fie R reacţiunea în A, perpendiculară pe BC. Avem:

$$M\ddot{x} = R \sin \alpha; \quad mk^2 \ddot{\theta} = Rl \cos(\alpha - \theta) - \frac{mgl}{2} \cos \theta; \quad x \sin \alpha = l \sin(\alpha - \theta).$$

118. *Pe o dreaptă POM sînt aşezate două puncte materiale P (m_0) fix pe bară şi M (m) mobil pe bară. Distanţa $OP = a = const.$ Bara este aşezată într-un plan orizontal, fiind lansată cu viteza unghiulară ω. Să se studieze mişcarea punctului M.*

Indicaţie. Se notează $OM = r$. Teorema ariilor ne dă:

$$(mr^2 + m_0 a^2)\,\dot{\theta} = C = \text{const.}$$

Teorema energiei este: $m(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2) + m_0 a^2 \dot{\theta}^2 = h = \text{const.}$ etc.

119. *Un pendul este compus dintr-un şir de n bare de masă m, diametru d şi lungime l, fiecare aşezate într-un plan vertical, legate între ele şi suspendate pe bara cea mai de sus (dispozitivul unui oblon). Să se studieze oscilaţiile infinit mici.*

Indicaţie. Momentul de inerţie al unei bare în raport cu axa sa este $\frac{md^2}{4}$; distanţele de la bare pînă la baza de suspensie sînt:

$$\frac{d}{2}; \frac{d}{2} + d; \frac{d}{2} + 2d; \ldots; \frac{d}{2} + (n-1)\,d.$$

Momentul de inerţie total:

$$\sum_{r=1}^{n} \left\{ m \frac{d^2}{4} + m \left[\frac{d}{2} + (r-1)\,d \right]^2 \right\} = \frac{md^2 n\,(2n^2+1)}{6}.$$

Masa totală este nm. Distanţa la centrul de greutate $a = nd/2$. Durata oscilaţiilor este:

$$2\pi \sqrt{\frac{l}{n\,gam}} = 2\pi \sqrt{\frac{(2n^2+1)\,d}{3ng}}.$$

120. *O sferă grea de masă m şi rază r alunecă, cu frecare, pe suprafaţa exterioară a unei alte sfere fixe, de rază R. Să se studieze mişcarea. Să se studieze aceeaşi problemă cînd sfera mică se mişcă pe suprafaţa interioară a sferei mari (Routh).*

Indicaţie. 1) Fie T şi N reacţiunea tangenţială şi normală în punctul de contact M, O centrul sferei fixe şi fie φ unghiul format de OM cu verticala ascendentă în O. Avem:

$$(r + R)\,\ddot{\varphi} = g \sin \varphi - T/m; \quad (1) \qquad (r + R)\,\dot{\varphi}^2 = g \cos \varphi - N/m. \quad (2)$$

Mişcarea în jurul centrului de greutate este dată de ecuaţiile:

$$\ddot{\theta} = \frac{Tr}{mk^2}; \quad k^2 = \frac{2}{5} r^2; \quad (3) \qquad r(\theta - \varphi) = R\varphi. \quad (4)$$

Se obține:

$$T = \frac{2}{7} mg \sin \varphi, \tag{5}$$

apoi:

$$N = \frac{mg}{7} (17 \cos \varphi - 10); \; C = \frac{10}{7} \frac{g}{r + R} \tag{6}$$

[C este constanta de integrare a ecuației (1), în care înlocuim pe (5) cu condiția inițială $t = 0, \varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$. Din (2) rezultă (6)].

2) $\ddot{ms} = -T + mg \cos \theta$; $mk^2 \ddot{\varphi} = Tr$, unde:

$$\frac{R - r}{r} (\theta - \alpha) = \varphi; \; s = (R - r)(\theta - \alpha); \; m(R - r) \ddot{\theta} = -T + mg \cos \theta;$$

$$\left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right)(R - r) \ddot{\theta} = g \cos \theta; \; k^2 = \frac{2}{5} r^2.$$

Se găsește în definitiv:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{10}{7} g \frac{\sin \theta - \sin \alpha}{R - r}; \; s^2 = \frac{10}{7} g (R - r) (\sin \theta - \sin \alpha);$$

$$T = \frac{mk^2}{r^2} (R - r); \; \ddot{\theta} = \frac{3}{7} mg \cos \theta.$$

VI. Mișcarea relativă

121. *Un punct material de masă 1 cade fără viteză inițială de la înălțimea $z = h$, rezistența aerului fiind $\varkappa v$, unde v este viteza și $\varkappa$ o constantă foarte mică. Să se calculeze efectul deviației spre est, ținînd seama de rotația pămîntului.*

Indicație. Măsurăm pe z în sus. Observăm că $\dot{\varkappa} \omega \sin \varphi$ și $\dot{y} \omega \cos \varphi$ sînt de ordinul lui ω^2 (v. §§ 114 și 115). Ecuațiile mișcării sînt:

$$\ddot{y} - 2\omega \cos \varphi \cdot \dot{z} = -\varkappa \dot{y}; \quad \ddot{z} = -g - \varkappa \dot{z}.$$

Rezultă: $\dot{z} = -gt$ și deci:

$$\ddot{y} + \varkappa \dot{y} = -2g \omega \cos \varphi \cdot t; \quad \dot{y} + \varkappa y = -g\omega \cos \varphi \cdot t^2;$$

$$y + \int_0^t y \, dy = -\frac{1}{3} g\omega \cos \varphi \cdot t^3.$$

Integrînd pînă la aproximația în $\varkappa$ deducem:

$$y = -\frac{1}{3} g\omega \cos \varphi \, t^3 \left(1 - \frac{\varkappa}{4} t\right).$$

122. *Să se studieze mișcarea unui punct material greu obligat să se miște fără frecare pe un plan orizontal, ținîndu-se seamă de mișcarea pămîntului.*

Scanned with OKEN Scanner

Indicaţie. Fie N reacţiunea normală a planului. Ecuaţiile de mişcare sînt (φ fiind latitudinea locului):

$$\ddot{x} = 2\omega \sin\varphi\, \dot{y};\quad \ddot{y} = -2\omega \sin\varphi\, \dot{x};\quad 0 = mg - N - 2m\,\omega\cos\varphi\, \dot{y}.$$

Ultima ecuaţie ne dă reacţiunea, iar primele două mişcarea punctului în planul (x,y). Aplicînd teorema energiei se găseşte că viteza relativă a mobilului este constantă şi egală cu v_0. Notînd cu α unghiul vitezei cu Ox, avem: $\dot{x} = v_0 \cos\alpha$, $\dot{y} = v_0 \sin\alpha$.

Înlocuind în ecuaţiile de mişcare avem $\alpha = -2\omega \sin\varphi$. Cum $\dot{s} = v_0$ (s fiind arcul traiectoriei), avem:

$$-\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{v_0}{2\omega \sin\varphi}.$$

Raza de curbură a traiectoriei este deci constantă. Traiectoria este un cerc de rază foarte mare.

123. *Mişcarea relativă a unui punct greu care alunecă pe o dreaptă care se roteşte uniform în jurul unei axe verticale fixe Oz, pe care nu o întîlneşte.*

Indicaţie. Fie OC perpendiculara comună a axei Oz şi a dreptei; $CM = r$ distanţa mobilului de punctul C şi α unghiul dreptei cu axa. Ecuaţia de mişcare este

$$\ddot{r} - \omega^2 r \sin^2\alpha = -g\cos\alpha$$

şi se integrează imediat. Punctul se mişcă ca şi cum dreapta ar fi fixă, mobilul fiind respins proporţional cu distanţa din poziţia de echilibru relativ.

124. *Să se studieze căderea unui punct greu la suprafaţa pămîntului, acesta fiind considerat ca un elipsoid de revoluţie omogen turtit, în rotaţie uniformă în jurul axei polilor.*

Indicaţie. Se va avea în vedere § 118. Fie $h = \frac{1}{2} gt^2$ înălţimea de cădere. Avem

$$y = \frac{\omega}{3}\sqrt{8h^3/g}\cos\lambda.$$

La Bucureşti: $h = 100$ m, $y = 15$ mm etc.

125. *Un tor greu şi omogen T este mobil în jurul unui diametru ecuatorial $\xi O\xi'$ orizontal. Acest diametru are o rotaţie uniformă ω în jurul verticalei centrului O. Într-un punct M al diametrului ecuatorial perpendicular pe $\xi O\xi'$ se fixează o greutate adiţională m. Să se studieze mişcarea torului în jurul diametrului $\xi O\xi'$.*

Indicaţie. Fie $OM = d$, iar A şi C momentele de inerţie ale torului în raport cu un diametru ecuatorial şi în raport cu axa de revoluţie. Mişcarea este definită prin variaţia unghiului θ făcut de OM cu verticala descendentă. Ecuaţia mişcării este:

$$(A + md^2)\,\ddot{\theta} - \omega^2 (C - A + md^2)\sin\theta\cos\theta + mgd\sin\theta = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

126. *Un cerc de rază R se rotește uniform, cu viteza unghiulară ω în jurul unui diametru Ox vertical. Să se studieze mișcarea relativă a unei bare omogene grele AB, ale cărei extremități alunecă pe cerc, fără frecare.*

Indicație. C fiind mijlocul barei, fie $OC = a$, θ unghiul făcut de OC cu Ox descendent și Mk^2 momentul de inerție al barei față de C. Teorema energiei ne dă:

$$M(k^2 + a^2)\dot{\theta}^2 = 2Mga\cos\theta + \omega^2 \sum mr^2 + h,$$

unde r este distanța punctului m al barei față de Ox. Avem

$$\sum mr^2 = Ma^2 \sin^2\theta + Mk^2 \cos^2\theta.$$

Înlocuind obținem ecuația de mișcare. $\cos\theta$ este dat în funcție de t printr-o integrală eliptică. Dacă $a^2 = k^2$ avem o mișcare pendulară.

Pozițiile de echilibru relativ se obțin egalînd cu zero expresia lui θ.

127. *Un punct greu se mișcă pe partea interioară a unui cerc vertical, fără frecare. Cercul se rotește uniform în jurul unei axe verticale care trece prin centru. Să se scrie ecuația de mișcare a punctului; să se studieze micile oscilații în jurul punctului cel mai de jos al cercului. Cînd se oprește punctul pe cerc, în echilibru relativ?*

Indicație. Forțele care solicită punctul sînt: greutatea mg paralelă cu Oz. Fie θ unghiul poziției momentane a punctului cu Oz. Reacțiunea este perpendiculară pe tangentă la cerc în M. Forța inerțială de antrenament este: $m\omega^2 x = m\omega^2 R\sin\theta$.

Forța centrifugă: $(0, -2m\omega\dot{x}, 0)$. Ecuația de mișcare se scrie:

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta\cos\theta + \frac{g}{R}\sin\theta = 0.$$

Micile oscilații sînt date de ecuația:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)\theta = 0.$$

Echilibru relativ: $\cos\theta = g/\omega^2 R$. Condiția de realitate: $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$.

128. *Un punct material ($m = 1$) se mișcă, fără frecare, pe un disc plan, orizontal, care se rotește în jurul unei axe normală la planul discului în punctul O, cu viteza unghiulară $\omega = const$. Punctul pornește cu viteza $v = const$ din O, într-o direcție definită prin unghiul α față de un sistem legat de disc, cu originea în O. Se cere mișcarea punctului.*

Indicație. $\dot{x} = v\cos\alpha$; $\dot{y} = v\sin\alpha$. Forța *Coriolis* este perpendiculară pe direcția considerată. Avem: $\ddot{x} = 2v\omega\sin\alpha$; $\ddot{y} = -2v\omega\cos\alpha$. Eliminăm α: $\dot{x} = 2\omega y + C_1$; $\dot{y} = -2\omega x + C_2$. Condiții inițiale: $x = y = 0$; $C_1 = v\cos\alpha$, $C_2 = v\sin\alpha$. Se găsește, în definitiv, traiectoria circulară:

$$\left(x - \frac{v\sin\alpha}{2\omega}\right)^2 + \left(y + \frac{v\cos\alpha}{2\omega}\right)^2 = \left(\frac{v}{2\omega}\right)^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

129. *Un punct material greu* ($m = 1$) *este obligat să se miște pe un plan* P, *care se rotește uniform în jurul unei orizontale. Să se studieze mișcarea.*

Indicație. Fie θ unghiul făcut de P cu planul xOy (Ox este axa de rotație). Avem $\theta = \omega t$ ($\omega = \text{const}$). Punctul este solicitat de forțele: greutatea $G\,(0, 0, -mg)$; reacțiunea $R\,(0, -R\sin\theta, R\cos\theta)$. Ecuația de mișcare a punctului este $m\ddot{\overline{r}} = \overline{G} + \overline{R}$; cu proiecțiile $m\ddot{x} = 0$; $m\ddot{y} = -R\sin\omega t$; $m\ddot{z} = -mg + R\cos\omega t$. Relația de legătură: $z = y\,\mathrm{tg}\,\omega t$. Fie $O\rho$ intersecția lui P cu yOz. Avem: $x = x$; $y = \rho\cos\omega t$; $z = \rho\sin\omega t$.

Rezultă:

$$\ddot{x} = 0;\quad m(\ddot{\rho}\cos\omega t - 2\dot{\rho}\omega t\sin\omega t - \rho\omega^2\cos\omega t) = -R\sin\omega t;$$
$$m(\ddot{\rho}\sin\omega t + 2\dot{\rho}\omega\cos\omega t - \rho\omega^2\sin\omega t) = -mg + R\cos\omega t.$$

Eliminînd pe R rezultă: $\ddot{\rho} - \rho\omega^2 = -g\sin\omega t$.

Deci:

$$\rho = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t;\quad x = at + b.$$

Constantele de integrare A, B, a, b se determină prin condițiile inițiale.

130. *Un punct material* m *se mișcă pe o bară rectilinie* AB *de masă* M, *care poate aluneca, fără frecare, de-a lungul orizontalei* Ox. *Cunoscînd viteza* u *a punctului* m *față de bară, să se studieze mișcarea sistemului.* (*Problema smunciturii armelor de foc; a mișcării unei persoane într-o barcă etc.*).

Indicație. Fie x și ξ distanța lui A, respectiv m, de O. Teorema impulsului ne dă $M\dot{x} + m\dot{\xi} = C = \text{const} = 0$. Deci $MV + mv = 0$. Dar $v = V + u$ (cunoscută). Rezultă $V = -\frac{mv}{M+m}$, deci bara AB are o mișcare de sens contrar mișcării punctului. Centrul de greutate al sistemului este fix: $Mx + m\xi = \text{const}$.

131. *Un punct greu* ($m = 1$) *se mișcă pe un cerc de rază* a *care se rotește uniform în jurul unei axe fixe verticale* (*în jos*), *făcînd unghiul constant* α *cu planul cercului. Să se arate că soluția problemei este dată de ecuația:*

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{a\omega^2\cos\alpha}{6g} + \mathfrak{P}\sqrt{\frac{g\cos\alpha}{2a}}\,(t - t_0);$$

unde θ *este unghiul făcut de poziția punctului pe cerc cu punctul cel mai de jos* A *al cercului,* $\mathfrak{P}$ *este funcția eliptică a lui Weierstrass, cu rădăcinile:*

$$e_1 = 1 - \frac{a\omega^2\cos\alpha}{6g};\quad e_2 = -1 - \frac{a\omega^2\cos\alpha}{6g};\quad e_3 = \frac{a\omega^2\cos\alpha}{3g};$$

iar t_0 este o *constantă de integrare.*

Indicație. Punctul A se găsește pe linia de cea mai mare pantă Oz' care, trece în planul cercului, prin centrul său. Se duce prin M planul perpendicular pe planul (Oz, Oz'); el taie pe Oz în M_2, așa ca

$\overline{MM_2} \perp Oz$; pe Oz' o taie în M, iar $MM_1 \perp Oz'$. Deci, $M_1M_2 \perp Oz$. Fie φ unghiul lui OM cu Oz; avem: $z = a\cos\varphi$; $r = a\sin\varphi$. Apoi:

$$\cos\varphi = -\cos\theta\cos\alpha;\ \sin^2\varphi = 1 - \cos^2\theta\cos^2\alpha.$$

Avem, pe de altă parte; $s = a\theta$. Potențialul greutății este: $+gz$ (z este vertical, în sus). Deci: $V = -ga\cos\theta\cos\alpha$.

Forța centrifugă are potențialul:

$$-\frac{1}{2}\omega^2r^2 = \frac{1}{2}\omega^2a^2(1-\cos^2\theta\cos^2\alpha).$$

Ecuația mișcării este:

$$a^2\frac{1}{2}\dot\theta^2 = \frac{1}{2}\omega^2a^2(1-\cos^2\theta\cos^2\alpha) + ag\cos\alpha\cos\theta + C, \qquad (1)$$

unde C este o constantă de integrare determinată de condițiile inițiale $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\dot\theta\,\pi/2 = \theta_0$. Ecuația (1) se scrie:

$$\dot\theta^2 = -\omega^2\cos^2\alpha\cos^2\theta + \frac{4g\cos\alpha}{2a}\cos\theta + \omega^2 + C,$$

sau:
$$\dot\theta^2 = -\omega^2\cos^2\alpha\cos^2\theta + \frac{2g\cos\alpha}{a}\cos\theta,$$

care trebuie integrată. Pentru aceasta, se observă că putem pune: $\varphi = 1/\cos\theta + \gamma$; ($\gamma = \text{const}$, care trebuie determinată).

Ecuația precedentă se scrie:

$$\frac{2a}{g\cos\alpha}\dot\varphi^2 = -\frac{2a\omega^2\cos\alpha}{g}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right) + 4\left(\frac{1}{\cos^3\theta}-\frac{1}{\cos\theta}\right).$$

Membrul al doilea se identifică cu expresia $4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3$. Se găsește:

$$\gamma = -a\omega^2\cos\alpha/6g;\ g_2 = 4 + 12\,a^2\omega^4\cos^2\alpha/6^2g^2;$$

$$g_3 = 4\cos^2\alpha\left(1 - \frac{a^2\omega^4\cos^2\alpha}{6^2g^2}\right)/3\,g,$$

ceea ce ne conduce la ecuația diferențială:

$$\left\{\frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{g\cos\alpha}{2a}}\,dt}\right\}^2 = 4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3,$$

care se integrează prin funcția lui Weierstrass, din enunț.

132. *O placă în formă de triunghi dreptunghi isoscel $AB = AC = a$ este astfel prinsă în planul vertical, încît se poate roti în jurul axei verticale descendente AB. Cu ce viteză unghiulară ω se poate roti pentru a nu produce nici o presiune în B?*

Scanned with OKEN Scanner

Indicaţie. Centrul de greutate se află pe mediana din A la 2/3 de la A. Avem:

$$\int_0^a m\omega^2 y\, dy \int_0^{a-y} x\, dx = \frac{1}{24} m\omega^2 a^4.$$

Apoi:

$$\frac{1}{2} ma^2 g \frac{1}{3} a = \frac{1}{24} m\omega^2 a^4 \omega = 2\sqrt{g/a}.$$

133. *Un punct se poate mişca pe un cerc de rază R aşezat într-un plan orizontal, în care se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unui punct O de pe circumferinţă. Să se studieze mişcarea punctului.*

Indicaţie. Fie M poziţia momentană a mobilului pe circumferinţă. Punem: $\overrightarrow{OP} = \bar{r}$; $OC = R$ (unde C este centrul cercului). Axele sînt Ox, Oy. Ecuaţiile mişcării sînt:

$$\ddot{x} = -N\cos(\theta - \varphi); \quad \ddot{y} = -N\sin(\theta - \varphi),$$

unde N este reacţiunea normală, θ unghiul lui OM cu Ox, iar φ unghiul lui OM cu OC. Obţinem:

$$r = 4R/(e^{\psi} + e^{-\psi}),$$

unde ψ este unghiul lui Ox cu OC; apoi:

$$N = 2\omega^2 R\cos(3\cos\varphi - 2).$$

134. *Într-un plan vertical, o dreaptă OD se roteşte fără frecare, cu viteza unghiulară constantă ω, în jurul punctului fix O. Un punct material M de masă m este legat cu un fir elastic OM de O şi obligat să se mişte pe dreapta OD, a cărei masă se neglijează. Lungimea iniţială a firului este l. Tensiunea înir este proporţională cu lungimea lui. Să se studieze mişcarea.*

Indicaţie. Punem $OM = r$. Ecuaţia de mişcare este:

$$m\ddot{r} = mr\omega^2 - mg\sin\omega t - k(r - l).$$

VII. Centre de greutate

135. *Să se găsească centrul de greutate al unui arc de spirală logaritmică $r = ae^{\theta}$, presupunînd că densitatea într-un punct al arcului este proporţională cu raza de curbură.*

Indicaţie. Masa arcului este dată de relaţia:

$$M = \int_{\theta_0}^{\theta_1} ds\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = \theta_1 - \theta.$$

Notăm cu ξ şi η coordonatele cartesiene ale centrului de greutate:

$$M\xi = \xi(\theta_1 - \theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} r\cos\theta\, d\theta; \quad M\eta = \eta(\theta_1 - \theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} r\sin\theta\, d\theta.$$

Scanned with OKEN Scanner

136. *Să se afle centrul de greutate al unui arc omogen de lemniscată* $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

Indicaţie.

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = \frac{a\, d\theta}{\sqrt{1 - 2\sin^2\theta}}.$$

Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{2}\sin\theta = \sin\psi$; avem:

$$ds = \frac{a\, d\psi}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{\sin^2\psi}{2}}}, \quad l = \int_0^{\psi} \frac{a\, d\psi}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{\sin^2\psi}{2}}}.$$

Apoi:

$$l\xi = \int_0^{\theta} x\, ds = \int_0^{\theta} r\cos\theta\, ds = a^2 \int_0^{\theta} \cos\theta\, d\theta = a^2 \sin\theta,$$

şi analog:

$$l\eta = \int_0^{\theta} y\, ds = a^2 (1 - \cos\theta).$$

Pentru semibucla din primul cadran avem:

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad \psi = \frac{\pi}{2}, \quad l = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin 30^\circ \sin^2\psi}}.$$

Întrebuinţînd tabelele de funcţii eliptice, găsim:

$$l = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot 1{,}68575\ldots, \quad l\xi = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}, \quad l\eta = a^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

137. *Aceeaşi chestiune pentru un arc omogen de sinusoidă* $y = \sin x$.

Indicaţie. $l = \int_0^x \sqrt{2\sin^2 x}\, dx$. Avem:

$$l\xi = \int_0^x x\sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx = lx - \int_0^x l\, dx,$$

$$l\eta = \int_0^x \sqrt{1 + \cos^2 x}\sin x\, dx.$$

Integrînd prin părţi, se găseşte:

$$l\eta = \frac{1}{2}\ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}) -$$

$$- \frac{1}{2}\cos x\sqrt{1 + \cos^2 x}.$$

Scanned with OKEN Scanner

138. *Aceeași chestiune pentru un arc omogen de elice* $(z = 0 \to \infty)$:

$$x = a\cos\varphi;\quad y = a\sin\varphi;\quad z = b\varphi.$$

Să se determine masa, știind că densitatea este dată ca funcție de arc $\rho = e^{-ks}$.

Indicație. $ds = \sqrt{a^2 + b^2}\, d\varphi$; $M = \int_0^{\varphi} \sqrt{a^2 + b^2}\, d\varphi = \frac{z}{b}\sqrt{a^2 + b^2}$.

Se găsește ușor:

$$M\xi = y\sqrt{a^2 + b^2};\quad M\eta = (a - x)\sqrt{a^2 + b^2};\quad M\zeta = \frac{z^2}{2b}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

139. *Aceeași problemă pentru un arc de spirala lui Archimede, de hiperbolă echilaterală și pentru curba:*

$$r^3 \sin 3\theta = a^3.$$

Indicație. Se va proceda ca în exemplele de mai sus.

140. *Să se găsească coordonatele centrului de greutate a unei arii omogene determinate de un arc de cicloidă:*

$$x = a(1 - \cos\omega),\ y = a(\omega + \sin\omega),$$

axa y și abscisa x.

Indicație. Aria este dată de:

$$A = \int_0^x y\, dx = |xy|_0^x - \int_0^y x\, dy = xy - \frac{1}{2}a^2\left(\omega - \frac{\sin 2\omega}{2}\right).$$

Găsim apoi ușor:

$$A\xi = \int_0^x xy\, dx = \frac{1}{2}|x^2 y|_0^x - \frac{1}{2}\int_0^y x^2\, dy = \frac{x^2 y}{2} - \frac{a^3}{2}\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\sin 2\omega}{4} - \frac{\sin^3\omega}{2}\right)$$

și

$$A\eta = \frac{xy^2}{2} - a^3\left[\frac{\omega(\omega - \sin 2\omega)}{4} - \frac{3}{4}\cos\omega - \frac{\cos 2\omega}{8} + \frac{\cos 3\omega}{12} + \frac{19}{24}\right].$$

Pentru aria cuprinsă între o buclă și axa Ox avem:

$$x = 0;\ y = 2a\pi;\ \omega = 2\pi;\ \text{deci } \xi = \frac{a}{2};\ \eta = a\pi.$$

141. *Centrul de greutate al ariei unei lemniscate:*

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta.$$

Indicație. $A = \int_0^{\theta}\int_0^{a} \sqrt{2\cos 2\theta}\, r\, dr\, d\theta = \frac{a^2}{2}\sin 2\theta$.

Apoi:

$$A\xi = \int\int r^2 \cos\theta \, dr \, d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta)^{3/2} \cos\theta \, d\theta,$$

sau punînd

$$\sqrt{2}\sin\theta = u,$$

avem:

$$A\xi = \frac{2a^3}{3} \int_0^u (1 - u^2)^{3/2} du.$$

Analog găsim:

$$A\eta = \frac{2a^3}{3} \int_{\sqrt{2}}^v (v^2 - 1)^{3/2} \, du.$$

Ambele integrale se pot calcula prin metode elementare.

142. *Centrul de greutate al ariei unui semielipsoid de rotație* $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, *situat deasupra planului* xOy.

Indicație. Avem:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2\right] dz^2;$$

pentru un punct al curbei meridiane, situat în planul xz,

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right), \quad x = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - z^2}; \quad \frac{dx}{dz} = -\frac{az}{c\sqrt{c^2 - z^2}},$$

deci:

$$ds^2 = \frac{c^4 + (a^2 - c^2)z^2}{c^2(c^2 - z^2)} dz^2$$

și

$$A\zeta = \frac{2\pi a}{c^2} \int_0^c z\sqrt{c^4 + (a^2 - c^2)\, z^2}\, dz = \frac{2\pi ac\,(a^3 - c^3)}{3\,(a^2 - c^2)}.$$

143. *Aceeași chestiune pentru o zonă de paraboloid de rotație în jurul lui* Oz, *limitată de două plane de cote* a *și* b, *perpendiculare pe* Oz.

144. *Centrul de greutate al unei semisfere (volum).*

Indicație. Fie G centrul de greutate, O centrul cercului de bază, V volumul emisferei. Avem:

$$V \cdot OG = \iiint z \, dx \, dy \, dz = \frac{R^4}{4}, \text{ deci } OG = \frac{3}{8} R.$$

145. *Din elipsoidul omogen* $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ *se taie porțiunea cuprinsă între planele* $z = 0$ *și* $z = h$. *Să se determine masa și centrul de greutate al acestui volum, densitatea fiind egală cu* 5.

Scanned with OKEN Scanner

146. *Centrul de greutate al unui cilindru omogen drept de înălțime h, având drept bază un semicerc de rază R.*

Indicație. Distanța centrului de greutate la planul perpendicular pe planul bazei și trecînd prin diametrul care mărginește semicercul este dat de:

$$\frac{1}{2}\pi R^2 x = \int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \frac{2}{3}R^3, \text{ deci } x = \frac{4R}{3\pi}.$$

147. *Centrul de greutate al unui segment de elipsă cuprinsă între arcul AMB și coarda AB, unde A și B sînt extremitățile axei mari și axei mici.*

Indicație.

$$x = y = 2a/3\,(\pi - 2)$$

148. *Să se determine centrul de greutate al unui „nit", format dintr-un cilindru cu raza r și înălțime h și terminat cu o jumătate de sferă de rază R.*

Indicație. Ordonata centrului de greutate este dată de relația

$$y_G\left(\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi R^3\right) = \pi^2 h\frac{h}{2} + \frac{2}{3}\pi R^3\left(\frac{3}{8}R + h\right).$$

149. *Să se determine centrul de greutate al unui trunchi de con circular drept. Se dau: înălțimea conului I, a trunchiului I — i, raza mare R și raza mică r.*

Indicație.

$$y_G = \frac{1}{4}\,\frac{R^2I^2 - r^2i\,(4I - 3i)}{R^2I - r^2i}.$$

150. *Centrul de greutate al unei semisfere de rază r, din care s-a scos o sferă de rază r/2.*

Indicație. Poziția centrului de greutate este determinată de distanța *OC* de la centrul sferei mari, pînă la centrul sferei mici, prin relația:

$$\left[\frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^3\right]\overline{OC} = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi r^3\frac{3}{8}r - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^3\frac{r}{2}.$$

151. *Dintr-o semisferă de rază r se scoate volumul unui elipsoid de rotație având semiaxele r/2, b, b. Se va aplica teorema lui Guldin pentru determinarea centrului de greutate al volumului rămas.*

Indicație. Se înseamnă cu x distanța centrului de greutate pînă la axa de rotație. Această distanță se obține din relația:

$$2\pi x\left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi}{2}\frac{r}{2}b\right) = \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\frac{r}{2}b.$$

Rezultă:

$$x = \frac{4}{3\pi}(r + b).$$

Scanned with OKEN Scanner

152. *Centrul de greutate al volumului generat de un sector parabolic cuprins între axa parabolei, curbă și o ordonată perpendiculară pe axă, sectorul rotindu-se în jurul tangentei în vîrf.*

Indicație. Ecuația parabolei fiind $y^2 = 2px$, avem:

$$y_G = \frac{\int_0^{\sqrt{2pa}} y\,dy \int_{y^2/2p}^{a} x\,dx}{\int_0^{\sqrt{2pa}} dy \int_{y^2/2p}^{a} x\,dx} = \frac{5}{12}\sqrt{2pa}$$

153. *Centrul de greutate al rigidului cuprins între paraboloidul* $y^2 + z^2 = 2px$ *și planele* $x = a$, $y = 0$, $z = 0$.

Centrul de greutate al rigidului cuprins între trei plane de coordonate și planul $x + y + z = a$, *densitatea variind proporțional cu pătratul distanței la origine (A. de Saint-Germain).*

Indicație.

$$M = \int_0^a \int_0^{a-x} \int_0^{a-x-y} \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{\lambda a^5}{20}.$$

De aici: $$\xi = \eta = \zeta = \frac{5a}{18}.$$

154. *Dintr-un cilindru circular drept de rază r și înălțime h se scoate volumul unui con circular drept de aceeași rază și înălțime. Să se determine centrul de greutate al corpului rămas, aplicînd teorema lui Guldin.*

Indicație.

$$\text{Vol} = \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^2 h\,; \quad \text{apoi:} \quad y_G = \frac{5}{8}h.$$

155. *O bărcă metalică este alcătuită dintr-o jumătate de cilindru de rază r și înălțime 2r și dintr-un sfert de sferă de rază r. Se cere centrul de greutate al corpului cuprins între pereții bărcii și un plan orizontal sprijinit pe marginile bărcii.*

Indicație.

$$\left(\frac{\pi}{2} r^2 2r + \frac{1}{4}\frac{4}{3}\pi r^3\right) x_G = \pi r^3 r + \frac{1}{3}\pi r^3 \left(2r + \frac{3}{8}r\right);$$

$$\left(\frac{\pi}{2} r^2 2r + \frac{1}{4}\frac{4}{3}\pi r^3\right) y_G = \pi r^3 \left(r - \frac{4r}{3\pi}\right| + \frac{1}{3}\pi r^3 \left(r - \frac{3}{8}r\right).$$

VIII. Mișcare cu frecare

156. *Un punct material greu este lansat pe o direcție orizontală, coeficientul de frecare al suportului fiind f și viteza inițială* v_0. *Ce drum va parcurge punctul pînă în momentul cînd energia cinetică scade la jumătate din cea ini-*

Scanned with OKEN Scanner

țială? Cînd se va opri punctul și la ce distanță de origine? Aplicație pentru $v_0 = 5$ m/s, $f = 0{,}1$.

Indicație. Avem: $\ddot{x} = -fg$, deci

$$\dot{x} = -fgt + \dot{x}_0 \text{ și } x = -\frac{fg}{2}t^2 + \dot{x}_0 t$$

(dacă punctul este lansat din originea O). Din condiția asupra energiei $\frac{1}{2}\frac{\dot{x}_0^2}{2} = \frac{(\dot{x}_0 - fgt)^2}{2}$ găsim timpul și înlocuind în expresia lui x, distanța. Pentru oprire găsim timpul din $-fgt + \dot{x}_0 = 0$.

157. *Un punct material greu alunecă, cu frecare, de-a lungul unei traiectorii formată dintr-o porțiune rectilinie orizontală AB de lungime l și dintr-un arc de cerc BC care se racordează în B la AB, avînd raza r și unghiul la centru α, situat într-un plan vertical deasupra lui AB, f fiind coeficientul de frecare. Să se determine viteza inițială cu care trebuie lansat punctul pentru ca el să ajungă în extremitatea C a arcului, cu viteză nulă.*

Indicație. Studiind, ca în exemplul precedent, mișcarea rectilinie a punctului, găsim că el ajunge în B cu viteza:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2lg}.$$

Mișcarea pe cerc va fi dată de ecuația:

$$m\ddot{s} = -mg\cos\frac{s}{r} - f\left(mg\sin\frac{s}{r} - m\frac{v^2}{r}\right),$$

s fiind arcul de cerc. Această ecuație se pune sub forma:

$$\frac{dv^2}{ds} - 2\frac{f}{r}v^2 + 2g\left(\cos\frac{s}{r} + f\sin\frac{s}{r}\right) = 0,$$

liniară în v^2, care este variabila independentă. După integrare facem $v = 0$, $\frac{s}{r} = \alpha$ și găsim pe v_B.

158. *În cazul vibrațiilor elastice produse de forța $-mk^2s$ și amortizate de rezistența pasivă $-2m\varkappa\dot{s}$ $(k > \varkappa)$ energia totală descrește indefinit cu timpul.*

Indicație. Energia totală fiind $E = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + k^2 s^2)$, se calculează „funcția disipativă" $= \frac{dE}{dt}$. Se arată că $\frac{dE}{dt} < 0$.

159. *Să se discute mișcarea unui pendul simplu, care oscilează într-un mediu rezistent, rezistența mediului fiind proporțională cu pătratul vitezei.*

Indicație. Ecuația de mișcare se poate pune sub forma:

$$m\ddot{s} = Av^2 + B,$$

unde A și B sînt funcții numai de s. Se reduce la o ecuație diferențială de ordinul întîi în $v^2(s)$.

Scanned with OKEN Scanner

160. *Un punct material de masă* 1, *mobil pe o curbă dată, este solicitat de o forță de atracție* $-\omega^2 s$ *spre origină și este supus din partea mediului la o rezistență proporțională cu pătratul vitezei, cu un factor de proporționalitate* ε *suficient de mic ca să putem neglija pe* ε^2. *Să se studieze mișcarea.*

Indicație. Ecuația mișcării este: $\ddot{s} \pm \varepsilon \dot{s}^2 + \omega^2 s = 0$, luînd pentru ε semnul contrar semnului lui s. Din ecuația energiei rezultă că energia $\frac{1}{2}(s'^2 + \omega^2 s^2)$ descrește într-un interval de timp (t_0, t_1) cu cantitatea $\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \dot{s}^3 \, dt$. Neglijînd pe ε^2 putem înlocui în integrand pe $\dot{s}$ prin expresia sa pentru $\varepsilon = 0$, și care corespunde mișcării armonice $s = r \cos(\omega t + \theta_0)$ cu r și θ_0 constanți. Într-o oscilație completă, s nu-și recapătă valoarea inițială s_0, ci o valoare mai mică s_1. Să se arate că într-o primă aproximație avem $s_1 - s_0 = \varepsilon s_0^2$.

161. *Să se studieze mișcarea rectilinie a unui rigid, într-un mediu rezistent. Mișcarea este întreținută de o forță constantă, iar rezistența mediului are forma* $R = A + Bv + Cv^2$ (V. Vâlcovici).

Indicație. Ecuația de mișcare a centrului de greutate se poate scrie sub forma:

$$\dot{v} + Bv + Cv^2 = g - A,$$

unde A, B, C, g sînt constante. Ecuația se discută transformînd-o într-o ecuație de ordinul al doilea, prin substituția $u = e^{\int cv \, dt}$

162. *O sferă omogenă grea este așezată pe un plan înclinat aspru, coeficientul de frecare fiind* f. *În ce caz mișcarea începe printr-o rostogolire fără alunecare?* (Routh)

Indicație. Notînd înclinarea planului cu α, avem rostogolire fără frecare dacă $f > \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha$, unde α este înclinarea planului. N fiind rezistența normală și F frecarea, rezultă:

$$F = fN > \frac{2}{7} N \operatorname{tg} \alpha.$$

163. *În problema precedentă, să se studieze mișcarea începînd cu alunecarea* $\left(f < \frac{2}{7} N \operatorname{tg} \alpha\right)$.

Indicație. Ecuațiile de mișcare sînt:

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - fN; \; 0 = -mg \cos \theta + N; \; ma\ddot{x} + mk^2\ddot{\theta} = mga \sin \alpha,$$

unde a este raza sferei. Eliminînd N, avem prin integrare:

$$x = \frac{1}{2} gt^2 (\sin \alpha - f \cos \alpha), \quad \theta = \frac{5}{4} f \frac{g}{a} t^2 \cos \alpha.$$

Viteza punctului de contact al sferei cu planul este:

$$\dot{x} - a\dot{\theta} = gt\left(\sin\alpha - \frac{7}{2} f\cos\alpha\right).$$

Prin ipoteză $f < \frac{2}{7}\operatorname{tg}\alpha$; deci viteza nu se poate anula.

164. *Pe un plan înclinat cu unghiul α se așază un corp greu de masă M, solicitat de o forță orizontală F care tinde să ridice corpul pe plan. Se cere să se scrie condițiile ca să existe mișcare: corpul să se urce pe plan.*

Indicație. Condiția de echilibru este $T \leqslant fN$. Pentru ruperea echilibrului este necesar ca $T > fN$, adică:

$$F\cos\alpha - Mg\sin\alpha > f(F\sin\alpha + Mg\cos\alpha).$$

Punînd $f = \operatorname{tg}\varphi$, avem: $F\cos(\alpha+\varphi) > Mg\sin(\alpha+\varphi)$.

Dacă $\alpha+\varphi \geqslant \frac{\pi}{2}$, condiția nu-i realizabilă. Dacă $\alpha+\varphi < \frac{\pi}{2}$, trebuie ca $F > Mg\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)$.

165. *Să se analizeze fenomenul de frecare a unei curele pe un cilindru circular de rază R. Coeficientul de frecare $f = \operatorname{tg}\varphi$.*

Indicație. Cureaua se aplică pe cilindru după arcul AB. În B poate exista o forță de tracțiune F' mai mare ca forța de rezistență F (de sens contrar) din A, fără ca să existe mișcare. Fie ρ reacțiunea într-un punct oarecare M între A și B. Fie T tensiunea în M de sens MO (centrul secțiunii drepte a cilindrului circular). În cazul limită al echilibrului $\rho'' = f\rho'$, unde $\rho' = T/R$ este reacțiunea normală și $\rho'' = dT/ds$ reacțiunea tangențială. Avem: $dT/T = f\,ds/Rf\,d\theta$ (unde $\theta = \sphericalangle AOM$). Fie $\alpha = \sphericalangle AOB$. Se obține relația $F' = Fe^{f\alpha}$.

166. *O bară omogenă grea AB are la extremități două mici inele care alunecă, cu frecare, de-a lungul a două bare orizontale fixe și ortogonale Ox și Oy. Bara grea este lansată cu o viteză unghiulară momentană ω, într-o poziție infinit vecină de Ox. Să se găsească mișcarea barei* (Routh).

Indicație. Vom distinge două cazuri, după cum $f \gtrless \sqrt{2}$.

167. *Două jumătăți identice de cilindru, secționate longitudinal, sînt așezate cu fața plană a secțiunii pe un plan orizontal paralel. Pe ele se așază, tot longitudinal, un alt cilindru. Cît de mare trebuie să fie coeficientul de frecare f dintre semicilindri și planul orizontal, pentru ca sistemul să rămînă în echilibru.*

Indicație. Fie P greutatea unui semicilindru și Q greutatea cilindrului întreg. Fie O_1, O_2 și O centrele cercurilor de secțiune transversală. Punctele O_1 și O_2, centrele secțiunilor, sînt pe planul orizontal. Fie α unghiul făcut de O_1O cu orizontala, egal cu unghiul făcut de O_2O cu orizontala; $N = \frac{Q}{2\sin\alpha}$; $F = f\left(P + \frac{Q}{2\sin\alpha}\sin\alpha\right) = \frac{Q}{2\sin\alpha}\cos\alpha$. N este forța de reazem între cilindri și F forța de frecare la baza unui semicilindru.

168. *O bară omogenă se mișcă într-un plan fix. În momentul t_0 ea lovește un cui fixat în plan într-un punct O; să se găsească distribuția vitezelor după ciocnire, presupunînd că bara rămîne în contact cu cuiul, alunecînd de-a lungul lui fără frecare.*

Indicație. Se aplică teorema momentului cinetic și a impulsului.

169. *Considerăm o bară omogenă ale cărei extremități A și B pot aluneca fără frecare pe două axe fixe Ox și Oy. Bara fiind mobilă este lovită la momentul t_0 de un punct material de masă m, animat de o viteză avînd componentele u și v. Bara și punctul sînt perfect lipsite de elasticitate. Să se găsească viteza unghiulară instantanee a sistemului după ciocnire.*

Indicație. Fie I (a, b) punctul de întîlnire al normalelor în A și B la cele două axe (centrul instantaneu), a', b' coordonatele punctului barei în care se produce ciocnirea și μ momentul de inerție al barei relativ la I. Viteza unghiulară este dată de:

$$\mu\omega = m\,[(a' - a)\,v - (b' - b)\,u].$$

170. *O sferă grea este atîrnată în punctul O de pe suprafața sa la colatitudinea θ pe suprafața pămîntului. Rotația pămîntului se oprește brusc. Să se determine mișcarea sferei* (Routh).

Indicație. Fie G centrul, R raza și M masa sferei; fie C centrul pămîntului și ω viteza unghiulară a pămîntului. Notăm $CG = \mu R$. Sfera se rotește în jurul axei $Op \parallel OP$ (axa pămîntului); centrul sferei are viteza $\mu R \sin\theta \cdot \omega$. Luăm $OC \perp Op$ ca axe x, y. Fie Ω_x, Ω_y, Ω_z vitezele unghiulare ale sferei după oprirea rotației pămîntului. Ecuația momentului în jurul lui Ox ne dă: $MR^2 \cos\theta \cdot \omega = Mk^2\Omega_x$.

Momentul față de Oy este:

$$-Mk^2\omega \sin\theta + M\mu R\omega \sin\theta = M(k^2 + R^2)\,\Omega_y.$$

În sfîrșit, momentul față de Oz (perpendicular pe planul x, y) este: $0 = Mk^2\Omega_z$. Rezolvînd aceste ecuații prin raport cu Ω_x, Ω_y, Ω_z, se deduce:

$$\Omega^2 = \omega^2\left[\cos^2\theta + \left(\frac{-2 + 5\mu}{7}\right)^2 \sin^2\theta\right],$$

unde Ω este viteza unghiulară a sferei în jurul axei sale instantanee.

171. *O bară AB se mișcă oricum într-un plan vertical și cade pe un plan orizontal. Se cere mișcarea barei după ciocnire.*

Indicație. Fie A punctul de contact al barei cu planul în momentul ciocnirii, θ unghiul barei cu orizontala, ω și ω_0 vitezele unghiulare, v și v_0 vitezele de translație ale barei după și înainte de ciocnire, M masa și P impulsia. Avem:

$$Mk^2(\omega - \omega_0) = Pl\cos\alpha$$

(unde $AB = 2l$, iar α este unghiul de rotație în jurul centrului de greutate G).

Apoi:

$$v = l\cos\alpha \cdot \omega\,;\quad v_0 - \frac{P}{M} = l\cos\alpha\left(v_0 + \frac{Pl\cos\alpha}{Mk^2}\right);$$

$$\frac{P}{M}\left(1 + \frac{l^2}{k^2}\cos^2\alpha\right) = v_0 - l\omega_0\cos\alpha\,;\quad P = \frac{3v_0 - l\omega_0\cos\alpha}{l^2\cos^2\alpha + k^2}\,;$$

$$\omega = \frac{3v_0\cos\alpha + l\omega_0}{3l\cos^2\alpha + l}\,;\quad k^2 = \frac{l^2}{3}\,;\quad v = \frac{3v_0\cos^2\alpha - l\omega_0\cos\alpha}{3\cos^2\alpha + 1}\,.$$

172. *Să se determine centrul de impulsie al unei plăci dreptunghiulare omogene, mobilă în jurul uneia dintre laturile mici.*

Indicație. Vom face uz de § 240 și § 241. Centrul de impulsie se află în planul plăcii, pe diametrul perpendicular pe axa de rotație, care este axă principală de inerție. Fie l lungimea laturii mari. Se obține $x_c = 2l/3$.

173. *Să se determine centrul de impulsie al unei plăci triunghiulare ABC, mobile în jurul laturii AB.*

Indicație. Se va determina punctul O' al axei AB, pentru care această axă este principală de inerție. Fie O mijlocul lui AB. Fie $O'x'y'$ și Oxy două sisteme de coordonate cu axe paralele, axele x perpendiculare pe AB și axele y chiar pe direcția AB în sensul $\overrightarrow{BA}$. Fie $\overline{OO'} = d$. Avem:

$$\sum mx'y' = 0;\quad \sum mx(y-d) = 0;\quad \text{deci}\quad d = \sum mxy/\sum mx.$$

Densitatea superficială este M/ab. Rezultă:

$$m = M\,dx\,dy/ab.$$

Se găsește:

$$\sum mxy = 2\frac{Mc}{b^3}\int_0^c x^2(b-x)\,dx = \frac{Mbc}{6}\,,$$

ținînd seama că ecuația dreptei AC este $x(a-c) + by - ab = 0$; unde A are coordonatele $(0, a)$; $B\,(0, -a)$; $C\,(b, c)$. Fie ξ centrul de greutate; se știe că $\xi = b/3$. Pe de altă parte, $\Sigma mx = M\xi = Mb/3$. În definitiv: $d = \Sigma mxy/\Sigma mx = c/2$ este ordonata centrului de impulsie în raport cu axele Ox și Oy. Abscisa centrului de impulsie este $I/M\xi = b/2$, căci $Y = \frac{M}{ab}\int x^2\,dx\,dy = Mb^2/6$. Rezultă că centrul de impulsie se găsește în mijlocul medianei OC.

174. *O bară AB este atîrnată în punctul A și se poate mișca în jurul acestui punct, în plan vertical.*

Bara (omogenă) posedă masa m și lungimea l. Fiind în repaus, un alt corp de masă m lovește bara AB în punctul C, astfel încît $AC = a$, și-i imprimă viteza orizontală v_0.

1) *Să se calculeze viteza unghiulară* ω *cu care bara se pune în mișcare.*
2) *Să se calculeze impulsia suferită de bară în* C *și în* A *în momentul ciocnirii.*
3) *Se vor studia cele două cazuri: ciocnire elastică, ciocnire neelastică.*

Indicație. a) *Corpuri elastice.* Energia sistemului: bară + corp rămîne constantă. Înainte de ciocnire ea avea valoarea $1/2\, m'v_0^2$; după ciocnire este $1/2\,(m'v_1^2 + J\omega^2)$ unde v_1 este viteza corpului m' după ciocnire și $J = m^2l^2/3$ este momentul de inerție al barei față de A. Rezultă ecuația:

$$m'v_0^2 = m'v_1^2 + J\omega^2.$$

Ultima ecuație (5) § 239 ne dă $J\omega = aP$, iar teorema conservării impulsului ne dă: $m'\,(v_1 - v_0) = P$. Pentru a avea pe ω se elimină P și v_1 între ecuațiile precedente. Se obține:

$$\omega = 2v_0am'/(J + a^2m') \quad \text{și} \quad P = 2v_0Jm'/(J + a^2m).$$

Impulsia suferită de bară în punctul de sprijin A fie P_{0x}, P_{0y}. Prima ecuație (5′) § 239 ne dă: $0 = P_{0x}$; $m\,\frac{l}{2}\,\omega = P + P_{0y}$, de unde rezultă că impulsia suferită în A este normală la bară și egală cu:

$$P_{0y} = (3a/2l - 1)\,P.$$

Ea este nulă dacă $a = a_0 = 2l/3$. Punctul a_0 este centrul de impulsie.

b) *Corpuri neelastice.* Corpul m' care ciocnește bara rămîne lipit de bară. Fie ω viteza unghiulară după ciocnire și P impulsia suferită în C. Viteza punctului C după ciocnire coincide cu viteza corpului și este egală cu $v_1 = a\omega$. Avem: $J\omega = aP$; $m'\,(v_1 - v_0) = P$.

Rezultă:

$$\omega = am'v_0/(J + a^2m');$$

deci jumătate decît în cazul ciocnirii elastice.

175. *Să se aplice teorema lui Carnot în problema precedentă.*

Indicație. Energia cinetică înainte de ciocnire este $1/2\, m'v_0^2$, iar după ciocnire $1/2\,(m'v_1^2 + J\omega^2)$. Energia pierdută de corp este $1/2\, m'\,(v_1 - v_0)^2$, iar energia cîștigată de bară este $1/2\,\eta\omega^2$. Bilanțul energiilor ne dă:

$$m'v_0^2 - (J\omega^2 + m'v_1^2) = m'\,(v_1 - v_0)^2 + J\omega^2.$$

În această ecuație v_1 are valoarea $a\omega$, deoarece corpul participă la mișcarea barei după ciocnire. Rezultă:

$$m'v_0^2 - (J + m'a^2)\,\omega^2 = m'\,(v_0 - a\omega)^2 + J\omega^2,$$

de unde obținem valoarea găsită mai înainte pentru ω:

$$\omega = am'v_0/(J + a^2m').$$

Scanned with OKEN Scanner

176. *O sferă omogenă grea stă în repaus pe un plan orizontal. I se aplică o impulsie P orizontală, conținută în planul orizontal ce trece prin centrul sferei.*

Să se studieze mișcarea (problema bilei de biliard).

Indicație. Luăm un sistem de coordonate fix cu origina în punctul O de contact al sferei cu planul orizontal (x, y) în momentul inițial, axa z normală prin centrul de greutate G, și un alt sistem mobil G, x, y, z, paralel cu primul. Fie f coeficientul de frecare la alunecare, h înălțimea lui P, ω_0 viteza unghiulară primită și v_0 viteza centrului de greutate după ciocnire. Teorema impulsului ne dă $Mv_0 = P$, iar din teorema momentului cinetic deducem:

$$J\omega_0 = -(h - R)P \quad \text{sau} \quad \frac{2MR^2}{5}\omega_0 = -(h-R)P.$$

Rezultă:

$$\omega_0 = -\frac{5(h-R)}{2R^2}v_0.$$

Viteza absolută are ca valoare inițială

$$V_0 = v_0 + \omega_0 R = (7R - 5h)\,v_0/2R.$$

Se vor examina diferitele cazuri: V_0 mai mic, mai mare, egală cu zero.

Să se studieze lovitura de „massée": impulsia P oblică, făcînd unghiul α cu axa de z și în sens contrar (spre planul xy al biliardului).

Teorema impulsului ne dă $Mv_0 = -P\sin\alpha$. Deci:

$$\omega_0 = 5(h - R)\,v_0 \sin\alpha/2R^2.$$

Mărimea rostogolirii retrogradă depinde de h (înălțimea punctului unde este atacată bila; în orice caz $h > R$) și de unghiul α (aplecarea „tacului").

177. *Patru puncte materiale A, B, C, D (masă $= 1$) sînt legate între ele prin patru bare rigide, fără masă, de lungime l, formînd rombul deformabil $ABCD$. Sistemul se află în mișcare în planul xOy. Punctul A suferă o impulsie (ξ, η). Să se studieze efectul ei.*

Indicație. Fie (x, y) coordonatele centrului rombului, θ unghiul format de AC cu Ox, 2φ unghiul din vîrful A. Coordonatele celor patru puncte sînt:

$$(A):\ x - l\cos\varphi\cos\theta,\ y - l\cos\varphi\cos\theta;$$

$$(B):\ x + l\sin\varphi\sin\theta,\ y - l\sin\varphi\cos\theta;$$

$$(C):\ x + l\sin\varphi\cos\theta,\ y - l\sin\varphi\cos\theta;$$

$$(D):\ x - l\sin\varphi\sin\theta;\ y + l\sin\varphi\cos\theta.$$

Energia cinetică a sistemului este:

$$T = 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + l^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Singurul punct care suferă o impulsie este A. Se calculează deci expresia:

$$\xi \cdot \delta(x - \cos\varphi\cos\theta) + \eta \cdot \delta(y - \cos\varphi\sin\theta).$$

Aplicăm teorema momentului (§ 244). Se găseşte:

$$4\dot{x} - 4\dot{x}_0 = \xi; \quad 2l(\dot{\theta} - \dot{\theta}_0) = \cos\varphi(\xi\sin\theta - \eta\cos\theta);$$

$$4\dot{y} - 4\dot{y}_0 = \eta; \quad 2l(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0) = \sin\varphi(\xi\cos\theta + \eta\sin\theta).$$

178. *Să presupunem că în problema precedentă am fixat brusc punctul A, în cursul mişcării, prin aplicarea impulsiei (ξ, η). Să se scrie ecuaţia fenomenului.*

Indicaţie. Va trebui să avem:

$$\dot{x} + l\sin\varphi\cos\theta \cdot \dot{\varphi} + l\cos\varphi\sin\theta \cdot \dot{\theta} = 0;$$

$$\dot{y} + l\sin\varphi\sin\theta \cdot \dot{\varphi} - l\cos\varphi\cos\theta \cdot \dot{\theta} = 0.$$

Din aceste două relaţii, precum şi cele scrise în problema precedentă, se calculează x, y, θ, φ, ξ, η.

179. *Un cub este aşezat cu faţa $ABCD$ pe un plan orizontal, pe care poate aluneca fără frecare, fiind animat de o translaţie paralelă cu $\overrightarrow{AB}$, cu viteza $\bar{v}$. La un moment dat se fixează muchia BC. Să se determine viteza unghiulară de rotaţie în jurul dreptei BC.*

Indicaţie. Momentul cinetic înainte de fixare este $mav/2$, unde m este masa, iar a latura cubului. Momentul de inerţie relativ la o latură este $2ma^2/3$. Aşadar: $\frac{2}{3}ma^2\omega = \frac{m}{2}av$, de unde $\omega = 3v/4a$.

180. *Un cilindru circular omogen se rostogoleşte, fără să alunece, pe un plan orizontal, cu viteza unghiulară constantă ω. La un moment dat, se fixează brusc o generatoare a cilindrului. Să se studieze mişcarea, după fixare.*

Indicaţie. Fie G centrul de greutate, a raza cilindrului, AX urma pe planul orizontal a secţiunii drepte prin G, A punctul de contact al acestei drepte cu cilindrul, B urma pe planul secţiunii drepte a generatoarei care se fixează subit. Fie de asemenea M_s un punct al cilindrului de masă m_s şi $\bar{u}$ vectorul unitar paralel cu axa cilindrului; axa de rotaţie fiind $\omega\bar{u}$. Momentul cinetic în raport cu B este:

$$\bar{K} = \sum m_s \overrightarrow{BM_s} \times (\omega\bar{u} \times \overrightarrow{AM_s})$$

sau

$$\bar{K} = \sum m_s \overrightarrow{AM_s} \times (\omega\bar{u} \times \overrightarrow{AM_s}) - \overrightarrow{AB} \times (\omega\bar{u} \times \sum m_s \overrightarrow{AM_s}).$$

Momentul cinetic în raport cu generatoarea ce trece prin B este

$$\bar{K}\,\bar{u} = \frac{3ma^2}{2}\omega - m\omega(\bar{u} \times \overrightarrow{AB})(\bar{u} \times \overrightarrow{AG}) = m\omega\left(\frac{3a^2}{2} - ah\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde h este înălțimea cilindrului. Fie ω_f viteza unghiulară după fixare, în jurul generatoarei prin B. Avem:

$$\frac{3ma^2}{2}\omega_f = m\omega\left(\frac{3a^2}{2} - ah\right), \quad \text{deci} \quad \omega_f = \omega\left(1 - \frac{2}{3}\frac{h}{a}\right).$$

Pentru $h = 3a/2$, cilindrul se va opri brusc; pentru $h > 3a/2$, viteza unghiulară schimbă de semn.

181. *O bară omogenă AB este mobilă într-un plan orizontal, posedînd o mișcare de translație perpendiculară pe direcția sa AB. La un moment dat se fixează extremitatea A. Să se afle viteza unghiulară după fixare. Să se arate că, prin fixare, bara pierde un sfert din energia sa cinetică.*

Indicație. Teorema energiei ne dă $mv_0^2 = mv_1^2 + J\omega^2$. Apoi $J\omega = lP$ (teorema momentului cinetic); $m(v_1 - v_0) = -P$ (teorema impulsului).

Rezultă:

$$\omega = 2v_0 lm/(J + ml^2); \quad \text{iar} \quad J = ml^2/3.$$

Energia cinetică după fixare va fi:

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{mv_0^2}{2}\right).$$

S-a pierdut deci cantitatea de energie: $\frac{1}{4}\left(\frac{mv_0^2}{2}\right)$.

182. *Să se deducă vitezele finale a două sfere de mase neegale ($M > m$) în ciocnire elastică.*

Indicație. Se aplică teorema impulsului și energiei. Se găsește pentru m, respectiv M, vitezele $\frac{2M}{M+m}v_0$, respectiv $\frac{M-m}{M+m}v_0$, unde v_0 este viteza inițială.

183. *Să se studieze problema mișcării bilei de biliard: o sferă omogenă, grea, care se mișcă pe un plan orizontal, cu frecare.*

Să se examineze cazul particular al mișcării „cu efect": centrul de greutate capătă o viteză inițială v_0 paralelă cu planul mesei de biliard și se imprimă bilei o viteză de rotație ω_0 în jurul unui axe paralele cu planul biliardului.

Indicație. Fie R raza, M masa, $G(\xi, \eta, \zeta)$ centrul de greutate; $O_1x_1y_1z_1$ un sistem de coordonate fix, planul $x_1O_1y_1$ fiind planul mesei de biliard; $Gxyz$ un sistem paralel cu cel fix. Fie de asemenea f coeficientul de frecare la alunecare și N componenta normală a reacțiunii mesei (postavul). Componenta tangențială a frecării este $T = fN$ și de sens contrar vitezei absolute. Ecuațiile de mișcare a centrului de greutate sînt:

$$M\ddot{\xi} = T_x; \quad M\ddot{\eta} = T_y; \quad M\ddot{\zeta} = N - Mg = 0, \quad \text{căci} \quad \zeta = R.$$

Scanned with OKEN Scanner

Mișcarea de rotație în jurul centrului de greutate se obține din teorema momentului cinetic: fie $\bar{\omega}$ rotația instantanee. Avem:

$$J\dot{\omega}_x = RT_y; \quad J\dot{\omega}_y = -RT_x; \quad J\omega_z = 0,$$

unde $J = \frac{2}{5}MR^2$ este momentul inerțial al sferei față de un diametru.

Componentele vitezei absolute sînt:

$$v_x = \dot{\xi} - \omega_y R; \quad v_y = \dot{\eta} + \omega_x R; \quad v_z = 0.$$

Prin derivare se obține:

$$\dot{v}_x = \ddot{\xi} - R\dot{\omega}_y; \quad \dot{v}_y = \ddot{\eta} + R\dot{\omega}_y.$$

Eliminînd ω_x, ω_y și $\ddot{\xi}$, $\ddot{\eta}$, cu ajutorul relațiilor precedente, și divizînd se găsește $dv_x/dv_y = T_x/T_y$. Dar conform cu legile frecării, reacțiunea tangențială T are direcția (opusă) vitezei absolute. Așadar avem: $T_x/T_y = v_x/v_y$. Rezultă: $v_x = cv_y$. Prin urmare, viteza absolută conservă o direcție constantă. Rezultă aceeași proprietate și pentru reacțiunea T. Punctul G descrie o parabolă într-un plan paralel cu planul biliardului.

Este ușor de verificat că mișcarea de alunecare nu durează prea mult; ea încetează făcînd loc mișcării de rostogolire. În adevăr, cum $\dot{v}_x$ și $\dot{v}_y$ sînt constante, urmează că v_x și v_y vor varia în același sens. Dacă $v_x > 0$, atunci $T_x < 0$ și $\dot{v}_x < 0$; deci, viteza v_x va descrește tinzînd spre zero. Dacă $v_x < 0$, atunci $T_x > 0$ și $\dot{v}_x > 0$; deci v_x va crește, tinzînd, de asemenea, spre zero. Același lucru se întîmplă și cu v_y. Prin urmare, sfera va înceta de a mai aluneca și va continua să se rostogolească, în care timp centrul de greutate va avea o mișcare rectilinie și uniformă, dată de ecuațiile:

$$\dot{v}_x = \frac{7}{M}T_x = \text{const}; \quad \dot{v}_y = \frac{7}{M}T_y = \text{const}.$$

Dar T_x și T_y sînt nule pentru mișcarea de rostogolire. Rezultă:

$$v_x = \text{const}; \quad v_y = \text{const}.$$

Se verifică ușor că și $\bar{\omega} = \text{const}$.

Caz particular. Presupunem sfera așezată într-un punct al axei O_1y_1 și că viteza inițială $\bar{v}_0$ are direcția și sensul axei O_1y_1. Centrul de greutate G se va deplasa pe o paralelă la O_1y_1. Fie v viteza și ω viteza unghiulară în momentul t. Ecuațiile precedente ne dau:

$$\dot{\eta} = v; \quad \omega_x = \omega; \quad \omega_y = \omega_z = 0; \quad T_y = \varepsilon T,$$

unde $\varepsilon = +1$ cînd $v_{y0} < 0$; $\varepsilon = -1$ cînd $v_{y0} > 0$. Avem:

$$m\dot{v} = T_y = \varepsilon fMg; \quad J\dot{\omega} = RT_y = R\varepsilon fMg; \quad v_y = v + \omega R,$$

sau

$$v = v_0 + \varepsilon fgt; \quad \omega = \omega_0 + \frac{5\varepsilon fg}{2R}t; \quad v_y = v_{y0} + \frac{7\varepsilon fg}{2}t$$

(viteza punctului de contact al sferei cu axa fixă O_1y_1).

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOTECA CENTRALĂ REGIONALĂ IAȘI

Cazul $v_{y0} > 0$; $\varepsilon = -1$. Rezultă:

$$v = v_0 - fgt; \quad \omega = \omega_0 - \frac{5fg}{2R}t; \quad v_y = v_{y0} - \frac{7}{2}fgt.$$

Viteza v se anulează în momentul $t_1 = v_0/fg$; viteza v_y devine nulă în momentul $t_2 = 2v_{y0}/7fg = 2(v_0 + \omega_0 R)/7fg$. Presupunem $t_1 < t_2$; rezultă: $\omega_0 > 5v_0/2R$. Bila primește o puternică viteză inițială pozitivă v_0: cazul unei bile atacată foarte jos, cu efect de „retro"; viteza v se anulează înaintea vitezei v_y; așadar:

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{5fg}{2R}\frac{v_0}{fg} = (2R\omega_0 - 5v_0)/2R,$$

deci pozitivă. Reamintim că rotația $\bar{\omega}$ a fost considerată ca pozitivă în sensul retrograd, în jurul unei axe Gx paralelă cu O_1x_1. Presupunem acum $t_2 < t_1$; adică $\omega_0 < 5v_0/2R$. Viteza unghiulară inițială poate să fie nulă (bila atacată la mijloc) sau negativă (efectul de „coulée"). Viteza punctului de contact se anulează în momentul t_2, pe cînd viteza lui G rămîne pozitivă; bila se rostogolește. În adevăr:

$$v = v_0 - fgt_2 = (5v_0 - 2\omega_0 R)/7 > 0.$$

Cazul $v_{y0} < 0$; $\varepsilon = +1$. Caz posibil numai dacă viteza unghiulară inițială ω_0 este mare în valoare absolută: $\omega_0 < -v_0/R$. Bila va fi atacată foarte sus: efect puternic de „coulée". Viteza v crește, ω de asemenea, pornind de la valori negative, pînă se anulează în momentul $t_3 = -2(v_0 + \omega_0 R)/7fg$. Bila „aleargă".

Cazul $v_{y0} = 0$; $\omega_0 = -v_0/R$. Bila atacată în „coulée", dar cu o viteză inițială mai mică, astfel încît să înceapă rostogolirea chiar de la început.

184. *O bară* $AB = 2l$ *de masă* M *cade din poziția orizontală, fiind articulată în* A *și liberă în* B. *Ajungînd în poziția* AB' *se fixează subit. Să se studieze ciocnirea.*

Indicație. Ecuația mișcării este:

$$M(l^2 + k^2)\ddot{\theta} = Mlg\cos\theta,$$

unde k este raza de girație. Punem $\dot{\theta} = \omega$. Fie α unghiul cu orizontala în momentul fixării. Rezultă:

$$(l^2 + k^2)\omega^2 = 2gl(\sin\alpha - \sin\theta).$$

Fie C punctul unde se produce fixarea, astfel încît $AC = c$, și fie R reacția în C. Avem, prin teorema momentelor: $M\omega(l^2 + k^2) = Rc$.

Fie R' reacția în A, deci $R(c - l) - R'l = Mk^2\omega$. Rezultă:

$$R' = M\omega\left(l - \frac{l^2 + k^2}{c}\right).$$

185. *Se dă o bară* $AB = l$, *avînd masa* m. *În momentul inițial bara este orizontală, apoi este aruncată în sus astfel încît centrul de greutate* G *al ei are o viteză inițială* v_0 *ascendentă, bara rotindu-se cu viteza unghiulară* ω_0.

Scanned with OKEN Scanner

1) *Să se deducă* v_0 *și* ω_0 *astfel încît centrul de greutate* G *să ajungă înălțimea* h, *față de orizontală, rotindu-se cu* $\frac{1}{4}$ *de cerc.*

2) *Să se calculeze energia cinetică a barei în momentul pornirii și în poziție verticală.*

3) *Cînd a ajuns verticală se fixează subit extremitatea* A. S *se determine mișcarea în acest caz.*

Indicație.

1) $y = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 t$; $\quad h = \frac{v_0^2}{2g}$; $\quad \frac{\pi}{2g} = \frac{v_0 \omega_0}{g}$.

2) $2E_0 = mv_0^2 + m\frac{l^2}{3}\omega_0^2$; $\quad 2E = \frac{ml^2}{3}\omega^2$.

3) Aplicăm teorema lui Carnot în momentul cînd centrul de greutate are viteza $\dot{y}$, $\dot{x}$ și rotația θ. Avem:

$$m(\dot{y}^2 + \dot{x}^2) + \frac{ml^2}{3}\omega_0^2 - \frac{4ml^2}{3}\omega^2 =$$

$$= m\left[(\dot{x} - l\omega \sin\theta)^2 + (\dot{y} - l\omega\cos\theta)^2\right] + \frac{ml^2}{2}(\omega_0 - \omega)^2.$$

186. *Cum se exprimă relațiile de conservare a impulsului și energiei în ciocnirea dintre un corp avînd o mișcare de translație și altul avînd o mișcare de rotație (aceeași masă)?*

Indicație.

$$J\omega^2 + mv^2 = J\omega_0^2 + mv_0^2; \quad mv - J\omega = J\omega_0 - mv_0.$$

187. *Un corp* A *izbește cu viteza* v *un corp identic* B, *aflat în repaos pe un plan orizontal. În urma ciocnirii corpul* B *alunecă cu frecare (*f *este coeficientul de frecare) pe o distanță* l. *Să se determine coeficientul* K *de elasticitate și ce distanță va străbate corpul* A, *după ciocnire.*

Indicație. Ecuațiile ciocnirii sînt:

$$mv = mv' + mv_1'; \quad K = (v_1' - v')/v.$$

Teorema energiei: $\frac{1}{2}mv_1'^2 = \frac{1}{8}mv^2(1+K)^2 = fmgl.$

Deci: $$K = \frac{2\sqrt{2fg}}{v} - 1 \leqslant 1.$$

Fie x distanța cu care se deplasează corpul A. Avem:

$$\frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{8}mv^2(1-K)^2 = fmgx,$$

deci: $$x = \frac{1}{2fg}(v - \sqrt{2fgl})^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

188. *Dintr-un punct O de pe orizontală se svîrle o minge cu viteza* v_0, *sub unghiul* α *cu orizontala Ox. Cînd mingea atinge maximum de înălțime lovește un perete vertical în A și se reîntoarce căzînd pe orizontală în B. Se dă distanța* $a = BC$ *(la perete). Se cere coeficientul de elasticitate K (dintre minge și perete), viteza v și unghiul* β *sub care cade mingea pe pămînt.* (Ing. Stoenescu).

Indicație. Viteza cu care ajunge mingea în A este $v_A = v_0 \cos\alpha$. Apoi $OC = v_0^2 \sin\alpha/2g$. După ciocnire:

$$v'_A = kv_0 \cos\alpha = v\cos\beta,$$

iar:
$$BC = a = v^2 \sin 2\beta/2g; \quad AC = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{v^2 \sin^2\beta}{2g}.$$

Rezolvînd în raport cu K, β, v, obținem:

$$K = \frac{2ag}{v_0^2 \sin 2\alpha} \leqslant 1; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{K}\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{ag};$$

$$v^2 = v_0^2(\sin^2\alpha + k^2\cos^2\alpha).$$

VII. Statica

189. *Un fir flexibil și inextensibil, de masă neglijabilă, poate să alunece de-a lungul unui profil parabolic vertical avînd axa verticală și concavitatea în jos. De cele două extremități ale firului sînt legate două greutăți* g_1 *și* g_2. *Să se studieze poziția de echilibru a sistemului.*

Indicație. Notăm cu y_1, y_2 ordonatele extremităților firului în sistemul avînd ca origină vîrful parabolei și axa Oy verticală descendentă. Dacă ecuația parabolei este $x^2 = 2py$, aplicînd principiul deplasărilor virtuale, găsim pentru poziția de echilibru condiția:

$$2\frac{g_1^2 - g_2^2}{p} = \frac{g_2^2}{y_1} - \frac{g_1^2}{y_2}.$$

190. *Un sistem este format din șase bare omogene grele și egale, articulate între ele la extremități, care se află într-un plan vertical. Una din bare, AB, este fixă și orizontală. Ce forță trebuie să aplicăm în mijlocul M al barei opuse lui AB pentru ca figura de echilibru a sistemului să fie un exagon regulat, dispus dedesubtul lui AB.*

Indicație. Scriind condițiile generale de echilibru se găsește $F = 3p$ (p este greutatea unei bare), forța fiind îndreptată vertical în sus.

191. *O bară AB poate să se rotească în jurul lui A, într-un plan vertical. În B este articulată o altă bară BC, mobilă în același plan vertical. Ambele bare sînt omogene, greutățile lor fiind respectiv p și q. În C se mai aplică o forță orizontală de intensitate F. Să se găsească poziția de echilibru.*

Scanned with OKEN Scanner

Indicaţie. Notînd cu α_1 şi α_2 unghiurile făcute de cele două bare cu orizontala şi aplicînd principiul deplasărilor virtuale, se găseşte, pentru echilibru:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{p+2q}{2F}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{q}{2F}.$$

192. *O bară rigidă şi omogenă OA se poate roti în jurul lui O într-un plan vertical. Într-un punct B al barei, la distanţa b de O, se aşază o greutate q. Unitatea de lungime a barei are greutatea p. Bara este în echilibru în poziţia orizontală sub acţiunea unei forţe aplicate în A şi îndreptate vertical în sus. Ce lungime $2l$ trebuie să dăm barei ca forţa să fie minimă?*

Indicaţie. Condiţia de echilibru este $bq + 2l^2p = 2lF$ (F este forţa aplicată în A), deci considerînd pe F ca funcţie de l, avem $F' = \frac{2l^2p - bq}{2l^2}$. Ca F să fie minimă trebuie ca $F' = 0$, de unde scoatem $l = \sqrt{\frac{bq}{2p}}$. Valoarea minimă a forţei este $F = \sqrt{2bpq}$.

193. *O placă dreptunghiulară omogenă se poate roti în jurul unei muchii orizontale. Sub presiunea unui vînt orizontal placa capătă o poziţie de echilibru deviată din poziţia verticală de un unghiu α. Să se arate că în poziţia de echilibru avem relaţia $k\sigma \cos^2\alpha = p \sin\alpha$ (k este un factor de proporţionalitate, σ suprafaţa plăcii, iar p greutatea plăcii).*

Indicaţie. Condiţia de echilibru (anularea momentului rezultant) ne dă imediat relaţia cerută.

194. *O bară orizontală, sprijinită în două puncte A şi B, poartă într-un punct C ($AC = a$) o greutate q. Bara este omogenă şi are greutatea p. Să se determine presiunile exercitate de bară în A şi B.*

Indicaţie. Fie $AB = b$. Aplicăm condiţiile de echilibru. Presiunile sînt egale şi opuse reacţiunilor normale ale suporturilor A şi B.

195. *O sferă omogenă grea este aşezată în unghiul format din două plane înclinate, perfect netede. Să se găsească raportul intensităţilor reacţiunilor în cele două puncte de contact, în funcţie de unghiurile de înclinaţie α_1 şi α_2 ale planelor.*

Indicaţie. Raportul se deduce uşor din condiţiile de echilibru.

196. *Un triunghi omogen greu de laturi a, b, c se sprijină fără frecare pe suprafaţa interioară a unei sfere de rază r. Să se găsească poziţia de echilibru.*

Indicaţie. Aplicînd condiţiile generale se găseşte că centrul de greutate al triunghiului este pe verticala centrului sferei la o distanţă:

$$d = \sqrt{r^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

197. *O căruţă cu două roţi este trasă pe un plan orizontal cu o forţă $2F$, cu mişcare uniformă şi cu frecare. Să se determine valoarea lui F* (Routh).

Scanned with OKEN Scanner

Indicaţie. Fie r_1, r_2 razele roţilor şi m_1g, m_2g greutăţile lor, iar ρ_1, ρ_2 razele axelor. Fie $2G$ greutatea totală a căruţei şi $2P_1$, $2P_2$ presiunile pe axe, astfel încît $G = P_1 + P_2$. Presiunile dintre roţi şi axe sînt R_1, R_2, iar cele dintre roţi şi sol sînt R_1', R_2'. Fie C centrul comun al roţii şi al axei, B punctul lor de contact şi A punctul de contact al roţii cu solul. Fie de asemenea $\theta = \sphericalangle ACB$, μ coeficientul de frecare în B şi f coeficientul de frecare în A. Ecuaţiile de echilibru pentru fiecare roată se obţin luînd proiecţia forţei rezultante pe verticală şi momentul forţelor faţă de A. Se obţine:

$$R' = P + mg; \quad \mu R (r \cos\theta - \rho) - Rr \sin\theta = fR'.$$

Forţa de frecare în A nu trebuie să apară în proiecţie verticală. Ecuaţiile de echilibru pentru căruţă se găsesc proiectînd rezultanta forţelor vertical şi orizontal. Se obţine:

$$R\cos\theta + \mu R \sin\theta = P; \quad \Sigma (R \sin\theta - \mu R \cos\theta) + F = 0.$$

Forţe exterioare în afară de F nu există, mişcarea fiind presupusă uniformă, astfel încît $\mu\dot{v} = 0$ (căruţa) şi $mk^2\dot{\omega} = 0$ (roţi). Eliminînd R şi R' se obţine o ecuaţie care dă pe θ:

$$\frac{\mu(\cos\theta - \rho/r)}{\cos\theta + \mu\sin\theta} = \frac{\rho}{r}\left(1 + \frac{mg}{G}\right).$$

În general, ρ/r şi mg/P sînt mici faţă de f; deci $(\mu\cos\theta - \sin\theta) \ll 1$. Punînd $\mu = \operatorname{tg}\varepsilon$, avem $\theta \approx \varepsilon$. Din celelalte ecuaţii, eliminînd R, obţinem:

$$F = \sum \frac{\mu\cos\theta - \sin\theta}{\mu\sin\theta - \cos\theta} P = \sum \left[\frac{\mu}{\mu\sin\theta + \cos\theta}\frac{\rho}{r}P + \frac{f}{r}(P + mg)\right].$$

Pentru $\rho/r \ll 1$ obţinem:

$$F = \sum \left[\sin\varepsilon \frac{\rho}{r} P + f\frac{R + mg}{r}\right],$$

neglijînd termenii în $(\rho/r)^2 P$. Pentru roţi egale avem $\varepsilon P = G$, deci:

$$F = \sin\varepsilon \frac{\rho}{r} G + \frac{G + 2mg}{r}.$$

198. *Un fir de greutate Q este suspendat într-un plan vertical prin cele două extremităţi în punctele fixe $P_1(x_1, y_1)$ şi $P_0(x_0, y_0)$, astfel încît $x_1 > x_0$; $y_1 > y_0$. Se cere să se determine elementele lănţişorului după care se aşază firul; să se calculeze tensiunile în punctele de sprijin.*

Indicaţie. Ecuaţia lănţişorului este $y = a\,\mathrm{ch}\,(x/a)$. Fie

$$d = x_1 - x_0; \quad h = y_1 - y_0.$$

Avem: $h/a = \mathrm{ch}\,[(x_0 + d)/a] - \mathrm{ch}\,(x_0/a)$; apoi: $l/a = \mathrm{sh}\,[(x_0 + d)/a] - \mathrm{sh}\,(x_0/a)$. Eliminînd x_0 se găseşte: $\mathrm{sh}\,(d/2a) = \sqrt{l^2 - h^2}/2a$, ecuaţie care ne permite

să calculăm pe a. Rezultă apoi x_0, y_0. Tensiunile în P_0 și P_1 sînt:

$$T_0 = py_0 = pa \operatorname{ch}(x_0/a); \quad T_1 = py_1 = pa \operatorname{ch}[(x_0 + d)/a].$$

199. *Fie două cercuri concentrice, de aceeași rază a; unul dintre cercuri (A) este situat în planul vertical yOz; celălalt cerc (B) este situat în planul vertical xOz al triedrului triortogonal $Oxyz$; Oz fiind verticala ascendentă. O bară grea, omogenă, de lungime $AB = a$, se sprijină pe jumătățile inferioare ale celor două cercuri: extremitatea A pe cercul (A) și extremitatea B pe cercul (B). Să se determine pozițiile de echilibru și reacțiunile cercurilor în A și B.*

Indicație. Centrul comun C al cercurilor se află pe axa z, așa că $OC = c$. Relațiile de legătură ne dau $CG = \sqrt{3}\, a$ (unde G este centrul de greutate al barei). Condițiile de echilibru dau:

$$T_x^A = 0; \quad T_y^B = 0; \quad T_z^A = T_z^B = mg/2,$$

unde g este accelerația greutății.

200. *Se dă un semicerc de diametru $AB = 2a$, așezat într-un plan vertical cu concavitatea spre zenit. Direcția lui AB este orizontală. O bară omogenă grea de lungimea $LM = 2l$ se sprijină cu extremitatea L pe semicerc și cu un punct oarecare al ei, pe extremitatea B a semicercului.*

Ce unghi trebuie să facă bara cu orizontala, pentru ca să fie în echilibru? În ce condiții echilibrul este realizabil? Să se calculeze reacțiunea în L (normală la cerc) și reacțiunea în B (normală la bară).

Indicație. Fie α unghiul format de direcția AB cu LM. Fie $LB = \rho$. Condiția de echilibru — rezultanta nulă — ne dă:

$$T_x^L + T_x^B = 0; \quad T_y^L + T_y^B = mg.$$

Condiția de legătură ne dă $\rho = 2a \cos\alpha$. Momentul în raport cu G (centrul de greutate al barei), egalat cu zero, ne dă:

$$T^L \sin\alpha = \left(\frac{2a}{l}\cos\alpha - 1\right) T^B.$$

Apoi:

$$T_x^L = T^L \cos 2\alpha; \quad T_x^B = -T^B \sin\alpha; \quad T_y^L = T^L \sin 2\alpha; \quad T_y^B = T^B \cos\alpha.$$

Eliminînd tensiunile, se obține ecuația care dă unghiul α pentru poziția de echilibru:

$$\cos\alpha_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{l}{2a} + \sqrt{\left(\frac{l}{2a}\right)^2 + 8}\right);$$

a doua rădăcină nefiind admisibilă. Se calculează tensiunile; găsim:

$$T^L = mg \operatorname{tg}\alpha_0; \quad T^B = mg\,\frac{\cos 2\alpha_0}{\cos\alpha_0}.$$

Condiții de realizare: $\cos\alpha_0 \leqslant 1$ conduce la $l/2a \leqslant 1$. Cazul extrem cu semnul egal corespunde echilibrului barei în poziție orizontală sprijinită în punctul B

Scanned with OKEN Scanner

în centrul ei de greutate G. Fie $\rho_0 = 2a \cos \alpha_0$. A doua condiție de realizare cere ca $\rho_0 \leqslant 2l$. Rezultă $2a^2 \leqslant 3l^2$. Cazul extrem, cînd se ia semnul egal, corespunde așezării punctului M pe B în poziția de echilibru;

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \sqrt{2/3}.$$

201. *O bară AB, mobilă în jurul lui A (cu B deasupra lui A), are greutatea p. În centrul ei de greutate G este legat un fir GOD care trece prin punctul O așezat pe verticala ce trece prin A și are atîrnată în D o greutate q. Presupunem $\overline{AG} = \overline{AO}$. Să se determine poziția de echilibru. Să se examineze cazul $q = p\sqrt{2}$.*

Indicație. Fie θ unghiul format de GA cu GO și α unghiul făcut de AB cu verticala descendentă. Avem $\alpha = 2\theta$ prin construcție. Teorema momentului față de A ne dă $q \sin \theta = p \sin \alpha$, deci $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{q}{2p}$. Proiecția tensiunii în A pe direcția AB este:

$$T = p \cos \alpha + q \cos \frac{\alpha}{2}, \text{ sau } T = \frac{q^2 - p^2}{p}.$$

Pentru $q = p\sqrt{2}$, rezultă $T = p$ și $\alpha = 90°$.

202. *Un paralelogram articulat $ABCD$ este mobil în jurul a două puncte fixe: M situat pe AB și N pe CD, astfel încît $AM = DN$, punctele fixe M și N fiind situate pe aceeași verticală. Pe latura AD este atîrnată o greutate p și pe latura BC o greutate q. Se neglijează masele barelor.*

Să se determine condiția de echilibru și să se calculeze reacțiunile în punctele fixe și la noduri (balanța lui Roberval).

Indicație. Observăm că barele AD și BC rămîn mereu verticale, prin construcție. Aplicăm teorema momentelor față de M (sau N) și găsim $p \cdot AM = q \cdot MB$, oricare ar fi unghiul format de AB cu verticala.

203. *Un sistem de bare articulate (fără masă), formează un romb $ABCD$, de latură l, mobil în planul vertical. Vîrfurile opuse D și B sînt legate de punctul fix O, interior figurii, prin două bare egale, de lungime $l' < l$ (inversorul Peaucellier). Să se arate că, oricum am deforma sistemul, există relația: $\overline{AO} \cdot \overline{OC} = l^2 - l'^2$.*

Presupunem că punctul A este articulat cu o altă bară AO', mobilă în jurul punctului fix O', situat pe aceeași orizontală cu O și astfel încît $\overline{AO'} = \overline{OO'} = a$. Fixînd în A o greutate p și în C o greutate q, să se determine poziția de echilibru. Ce valori poate lua raportul q/p, pentru ca barele să nu se suprapună (în poziția de echilibru). Se va presupune $l - l' < 2a < l + l'$.

Indicație. Din simple considerații geometrice se observă că O trebuie să fie așezat pe diagonala AC. Se duce apoi:

$$AO = l \cos \alpha + l' \cos \beta; \quad OC = l \cos \alpha - l' \cos \beta,$$

unde: $$\alpha = \sphericalangle(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) = \sphericalangle(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CO}) \text{ și } \beta = \sphericalangle(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Apoi, din triunghiul AOB: $l \sin\alpha = l' \sin\beta$. Rezultă relaţia cerută. Deci, dacă A descrie un cerc, C va descrie fie un cerc, fie o dreaptă. În condiţiile mecanice ale problemei de faţă, A descrie un cerc de rază a cu centrul în O'. Punctul C descrie o dreaptă perpendiculară pe OO' în punctul P, dat de relaţia $OP = K/2a$.

Fie $\gamma = \sphericalangle(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'})$. Din triunghiul isoscel $OO'A$ avem $\overline{OA} = 2a\cos\gamma$. Teorema momentelor ne conduce la relaţia:

$$\cos 2\gamma = \frac{l^2 - l'^2}{2a^2}\,\frac{q}{p},$$

avînd în vedere teorema rezultantei în proiecţie pe verticală, aplicată forţelor din punctul A. Bara AB trece prin punctul O' şi se suprapune cu bara AO', pentru:

$$2\cos^2\gamma_0 = \frac{l^2 - l'^2}{2a\,(l-a)}.$$

Urmează condiţia: $$0 < \frac{q}{p} < \frac{a}{l-a} - \frac{2a^2}{l^2 - l'^2}.$$

Ultima inegalitate este identic satisfăcută, în virtutea relaţiilor date.

204. *Un corp solid mărginit de suprafaţa S se rostogoleşte, fără să alunece, pe un plan. Fie A punctul geometric de contact, M punctul material al solidului, care coincide cu A în momentul considerat, ω_x, ω_y proiecţiile axei de rotaţie instantanee pe tangentele la liniile de curbură în M ale suprafeţei S, ω_z proiecţia rotaţiei pe normală în M, iar R şi R' — razele de curbură principale în M. Să se arate că viteza punctului geometric A are, pe axele definite mai sus, proiecţiile $R\omega_y$; $-R'\omega_x$; 0. Acceleraţia punctului M are proiecţiile: $-R'\omega_x\omega_z$; $-R\omega_y\omega_z$; $R\omega^2_y + R'\omega^2_z$.*

205. *Un punct greu este obligat să rămînă pe o elipsă, fiind respins de axa mică a elipsei proporţional cu distanţa. Să se determine poziţia de echilibru.*

Indicaţie. Coeficientul unghiular fiind $-b^2x/a^2y$ şi forţa k^2x, condiţia de echilibru este : $\frac{mg}{k^2x}\cdot\frac{b^2x}{a^2y} + 1 = 0$, deci: $y = -mgb^2/k^2a^2$; $x = 0$.

Condiţia de realizare: $mgb^2/k^2a^2 \leqslant b$.

206. *Un punct material M este obligat să rămînă pe o sferă de rază R. Punctul M este atras de un punct P al sferei cu o forţă F proporţională cu distanţa $\overline{MP}$. Să se determine poziţia de echilibru.*

Indicaţie. Luăm un sistem de coordonate cu origina în centrul O al sferei; punctul P $(x_0, 0, z_0)$ să fie în planul xOz. Ecuaţia sferei este $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Forţa F are proiecţiile: $k(x_0 - x)$; $-ky$; $k(z_0 - z)$. Greutatea are proiecţiile $0, 0, -mg$. Proiecţiile forţei rezultante trebuind

să fie proporționale cu parametrii directori ai normalei la sferă, avem

$$\frac{k(x_0 - x)}{x} = \frac{-ky}{y} = \frac{-mg + k(z_0 - z)}{z}$$

Obținem: $$x = Rx_0 \Big/ \sqrt{R^2 - 2z_0\frac{mg}{k} + \frac{m^2g^2}{2}}\ ; \quad y = 0;$$

$$z = R\left(z_0 - \frac{mg}{k}\right) \Big/ \sqrt{R^2 - 2z_0\frac{mg}{k} + \frac{m^2g^2}{k^2}}\ .$$

Poziția de echilibru este pe meridianul punctului P.

Cazul $x_0 = 0$. Rezultă $z_0 = +R$. Apoi: $-mg + kz_0 = 0$. Dacă această relație este satisfăcută, orice punct de pe sferă este poziție de echilibru. În caz contrar, singurele poziții de echilibru sînt $x = 0$, $y = 0$, $z = \pm R$.

207. *Un punct material M se găsește pe o elice cilindrică, de axă verticală. Să se găsească poziția de echilibru. Punctul M să fie atras de originea O, cu forța $k \cdot \overrightarrow{OM}$.*

Indicație. Ecuația cilindrului este $x^2 + y^2 = R^2$, axa z fiind verticală ascendentă. Ecuațiile elicei sînt:

$$x = R\cos\theta;\quad y = R\sin\theta;\quad z = k\theta,\ \text{unde}\ k = R\operatorname{tg}\theta.$$

Condiția de echilibru se scrie:

$$F_x(-R\sin\theta) + F_y(R\cos\theta) + F_z k = 0$$

sau:

$$-Kx(-R\sin\theta) + (-Ky)R\cos\theta + (-mg - Kz)k = 0.$$

Înlocuind x, y, z, se obține $mg + Kk\theta = 0$, care ne dă pe θ.

208. *Într-un plan vertical, firul ABC (fără masă) trece prin scripetele B. În extremitatea A este atîrnată greutatea Q, iar în extremitatea C este atîrnată greutatea P obligată să se miște pe o verticală fixă la distanța l de B, fără frecare. Să se determine poziția de echilibru și oscilațiile în jurul acesteia. Se va analiza cazul $Q = 2P$.*

Indicație. Fie θ unghiul verticalei cu firul BC; avem:

$$ds = dy\cos\varphi,\ y = l\operatorname{ctg}\varphi,$$

unde y este verticala descendentă. Condiția de echilibru: $Q\dot{s}^2 - P\dot{y}^2 = 0$. Energia cinetică este;

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{y}^2 = \frac{l^2}{\sin 4\varphi}\dot{\varphi}^2\frac{1}{2g}(Q\cos^2\varphi + P).$$

Se scrie apoi ecuația lui Lagrange.

209. *Într-un plan vertical se dau două bare egale $AB = BC = l$, grele și omogene de greutate G, articulate în punctul fix A, între ele în punctul B, iar punctul C se sprijină fără frecare pe orizontala Ox, fiind solicitat de o forță orizontală Q. Să se determine poziția de echilibru.*

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Se ia verticala OA ca axă y. Principiul deplasărilor virtuale ne dă:

$$G\,\delta y_1 + G\,\delta y_2 - Q\,\delta x = 0; \quad x = l(\cos\alpha + \cos\beta),$$

unde α și β sînt unghiurile făcute de cele două bare cu orizontala.

$$y_1 = \frac{l}{2}\sin\beta; \quad y_2 = h - \frac{l}{2}\sin\alpha; \quad (\text{unde } \overline{OA} = h).$$

210. *Trei bare grele AB, BC, CD sînt articulate între ele și așezate în planul vertical, articulate în A și D care sînt fixe și sînt pe aceeași orizontală. Să se determine poziția de echilibru.* $\overline{AB} = a$; $\overline{BC} = b$; $\overline{CD} = c$.

Indicație. Fie α, β, γ unghiurile făcute de bare cu orizontala. Principiul deplasărilor virtuale ne dă:

$$a\delta\left(\frac{a}{2}\sin\alpha\right) + b\delta\left(a\sin\alpha + \frac{b}{2}\sin\beta\right) + c\delta\left(\frac{c}{2}\sin\gamma\right) = 0.$$

Condiții de legătură:

$$AB = l = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma; \quad c\sin\gamma = a\sin\alpha + b\sin\beta.$$

211. *Pe parabola verticală $y^2 = 2px$ alunecă, fără frecare, greutățile P și Q, legate între ele printr-un fir de lungime l, care trece prin focarul F al parabolei. Să se determine poziția de echilibru.*

Indicație. Însemnăm cu $r_1 = \overline{FP}$ și $r_2 = \overline{FQ}$ și φ_1, φ_2 unghiurile făcute de aceste direcții cu verticala. Principiul deplasărilor virtuale ne dă:

$$P\delta(r_1\cos\varphi_1) + Q\delta(r_2\cos\varphi_2) = 0.$$

Ecuația parabolei este $r(1 + \cos\varphi) = p$. Rezultă:

$$P\delta r_1 + Q\delta r_2 = 0, \quad \text{apoi} \quad r_1 + r_2 = l.$$

Dacă $P = Q$, avem o infinitate de soluții; dacă $P \neq Q$ nu avem nici o soluție.

212. *Două greutăți P și Q sînt legate de capetele unui fir trecut peste scripetele O, fără frecare, astfel încît greutatea Q alunecă pe un plan înclinat (care face unghiul α cu verticala), iar greutatea P cade pe verticală. Să se determine poziția de echilibru.*

Indicație. Verticala din O taie planul înclinat în A. Notăm cu: $x = OQ$, $s = AQ$; $a = OA = \text{const}$. Avem

$$Q\delta(s\cos\alpha) - p\delta x = 0.$$

Relația de legătură este: $x^2 = a^2 + s^2 + 2as\cos\alpha$.

Rezultă:

$$x^2 = a^2 + \frac{(Q^2 - P^2)\,a^2\cos^2\alpha}{P^2 - Q^2\cos^2\alpha}.$$

Scanned with OKEN Scanner

213. *Un lănțișor AB este suspendat în A. El se rotește în jurul unei axe verticale așezat la distanța a de A. Masa elementului de arc al lănțișorului este m. Se cere curba de echilibru, viteza de rotație fiind constantă, ω.*

Indicație. Fie x distanța punctului M de pe lanț la axul de rotație; în acest punct M sînt prezente forțele : de greutate mds (pe elementul de arc) și forța centrifugă egală cu $mds \cdot x\omega^2$. Scriind proiecția pe normala la curbă a celor două forțe care-și fac echilibru în M, se obține:

$$y = ae^{\frac{\omega^2}{g}x}.$$

214. *Un punct de masă m este obligat să se miște pe o curbă verticală care se rotește uniform în jurul unei axe verticale. Ce formă are curba dacă punctul se află în poziție de echilibru oriunde s-ar găsi pe curbă?*

Indicație. Fie $\overline{N}$ reacțiunea normală în punctul M și α unghiul lui $\overline{N}$ cu verticala; viteza unghiulară ω este constantă. Avem:

$$N \sin \alpha = m\omega^2 x;\ N \cos \alpha = mg.$$

Rezultă parabola:

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + \text{const.}$$

215. *O bară AB (cu B deasupra lui A) este fixată în A și face unghiul constant α cu un ax vertical Ay. Bara se rotește uniform (viteza unghiulară ω este constantă) în jurul axei. Pe bară se află un punct M de masă m. Să se deducă poziția de echilibru a punctului, fără și cu frecare.*

Indicație. $AM = r$. Avem:

$$mg \cos \alpha = mr\omega^2 \sin^2 \alpha,$$

iar în cazul frecării:

$$mg \cos \alpha - mr\omega^2 \sin^2 \alpha \leqslant \pm f (mg \sin \alpha + mr\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha) \text{ etc.}$$

216. *O bară $AB = l$ și masa m este articulată în planul vertical în A. În punctul B este fixată o greutate Mg. Bara face unghiul $\alpha = \text{const}$ cu o axă verticală fixă AX. Bara se rotește uniform (viteza unghiulară ω este constantă) în jurul axei verticale.*

Se cere poziția de echilibru (unghiul α) și reacțiunea în A.

Indicație. Fie P un punct al barei. Punem $\overline{AP} = r$. Avem ecuația:

$$\sin \alpha Mgl - Ml^2 \sin \alpha\omega^2 \cos \alpha + mg \frac{l}{2} \sin \alpha - \frac{l}{2} m \sin \alpha\omega^2 \frac{2}{3} l \cos \alpha = 0.$$

Rezultă, fie $\sin \alpha = 0$; fie:

$$\cos \alpha = \frac{3(2M + m)g}{2(3M + m)l\omega^2};\ X = Mg + mg;\ Y = \left(M + \frac{m}{2}\right) l\omega^2 \sin \alpha.$$

217. *O sferă de centru O_1 și un cub de centru O_2 de greutăți P și Q alunecă rămînînd pe suprafața interioară a unui semicilindru de centru O, fără*

frecare. Se dă $\overline{OO_1} = a$; $\overline{OO_2} = b$; $\sphericalangle O_1OO_2 = \alpha$. *Se cere poziția de echilibru (unghiul* φ*), știind că* O, O_1, O_2 *sînt în același plan vertical.*

Indicație. Se iau momentele în raport cu O, observînd că reacțiunile cilindrului trecînd prin O au momente nule. Se găsește:

$$\operatorname{tg} \varphi = (Pa + Qb \cos \alpha)/Qb \sin \alpha.$$

218. *Un vas semisferic de rază* R *și greutate* G, *cu centrul de greutate în* A ($\overline{OA} = a$, *unde* O *este centrul geometric), este așezat pe un plan orizontal cu concavitatea în sus. De punctul* B *al extremității diametrului vasului este prinsă cu un fir* $BC = l$, *o sferă plină de centru* C, *rază* r *și greutate* P, *care se sprijină pe fața interioară a vasului. Să se determine poziția de echilibru a sistemului.*

Indicație. Fie $\sphericalangle BOC = \varphi$. Din triunghiul BOC rezultă:

$$2R(R - r) \cos \varphi = R^2 + (R - r)^2 - l^2.$$

Teorema momentelor față de O ne dă:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P(R - r) \cos \varphi}{Ga + P(R - r) \sin \varphi}.$$

219. *Două fire de lungimi egale* $\overline{AO} = \overline{O_1A_1} = l$ *sînt fixate în planul vertical, în punctele* O *și* O_1, *astfel încît* $\overline{OO_1} = a$. *În extremitățile* A *și* A_1 *se află cîte un corp material de mase* m *și* m_1, *care se atrag după legea newtoniană. Știind că în poziția de echilibru firele* OA *și* O_1A_1 *fac unghiurile* α *și* β *cu verticala, să se determine masele* m *și* m_1.

Indicație. Fie φ unghiul lui AA_1 cu orizontala; $\overline{AA_1} = d$. Din considerații geometrice rezultă:

$$\operatorname{tg} \varphi = l(\cos \beta - \cos \alpha)/[a - l(\sin \alpha + \sin \beta],$$

apoi:

$$d^2 = a^2 - 2al(\sin \alpha + \sin \beta) + 2l^2[1 - \cos(\alpha + \beta)].$$

Formînd momentele față de O și O_1, deducem:

$$m = gd^2 \sin^2 \beta / f \cos(\beta - \varphi); \; m_1 = gd^2 \sin \alpha / f \cos(\alpha + \varphi),$$

unde f este constanta gravitației newtoniene.

220. *În planul* xOy, *un punct* $M(x, y)$ *este atras de axa* Ox *cu o forță* $F_1(y)$, *iar de axa* $Oy \perp Ox$, *de o forță* $F_2(x)$. *Se cere ecuația curbei pentru ca punctul să fie mereu în echilibru. Caz particular:* $F_1 = k/y^2$; $F_2 = k/x^2$.

Indicație. Tangenta unghiului făcut de normală cu axa Ox este $\operatorname{tg} \theta = F_1/F_2 = -dx/dy$. Ecuația curbei este:

$$\int F_2(x)\,dx + \int F_1(y)\,dy = 0.$$

221. O *sferă* O *de greutate* P *și rază* R *este prinsă cu un fir* $\overline{OA} = l$ *de cîrligul* A *de care este prinsă printr-un alt fir și o greutate* Q. *Se cere poziția de echilibru (unghiurile* α *și* β *făcute de* OA *și* OQ *cu verticala), precum și tensiunea din fir.*

Scanned with OKEN Scanner

Indicaţie. Fie T tensiunea firului. Condiţia de echilibru a sferei ne dă:

$$Q \sin \alpha = T \sin \beta;\ P + Q = Q \cos \alpha + T \cos \beta.$$

Avem apoi: $$R = l \sin (\alpha + \beta);$$

rezultă: $$\sin \beta = QR/l\ (P + Q);\ T = (P + Q)\ l \sin \frac{\alpha}{r}.$$

222. *O bară AB este menţinută în poziţie verticală de resorturile AA_1 şi BB_1. Ştiind că resortul AA_1 suferă o lungire a cîtimea a cînd este întins cu forţa P, iar resortul BB_1 se scurtează cu cîtimea b cînd este apăsat cu forţa Q, se cer eforturile în resorturi cînd suspendăm în C o greutate F.*

Indicaţie. Fie x lungirea şi comprimarea resorturilor. Avem:

$$R_A = P\frac{x}{a};\ R_B = Q\frac{x}{b};\ R_A + R_B = F;\ R_A = \frac{F}{\frac{P}{a} + \frac{Q}{b}}\frac{P}{a};$$

$$R_B = \frac{F}{\frac{P}{a} + \frac{Q}{b}}\frac{Q}{b}.$$

223. *Două bare $\overline{AB} = \overline{AC} = l$, de greutate P, articulate în A, sînt aşezate în planul vertical şi se sprijină în B şi C pe orizontală. Un resort vertical leagă vîrful A de punctul D, proiecţia lui A pe orizontală. În B şi C se aplică o forţă orizontală F care tinde să apropie barele.*

Să se găsească poziţia de echilibru (unghiul α) şi maximul lui F. Ştiind că resortul se rupe la tensiunea T, forţa care se dezvoltă în resort este proporţională cu lungirea, coeficientul de proporţionalitate fiind k. În stare naturală, neîntins, resortul are lungimea a.

Indicaţie. Fie T tensiunea în resort. Avem $T = k\,(l \sin \alpha - a)$. Apoi:

$$R_B = R_C = P + T/2 = P + \frac{k}{2}(l \sin \alpha - a);\ R_A = F.$$

Teorema momentelor ne dă:

$$2F \operatorname{tg} \alpha = P + k(l \sin \alpha - a).$$

La limită, $T_m = k\,(l \sin \alpha - a)$. Deducem $\sin \alpha$ şi R_B, R_C, precum şi $F = R_A$ etc.

224. *Două bare identice AOB şi $A_1O_1B_1$ ($AO = A_1O_1 = a$; $BO = B_1O_1 = b$; OO_1 sînt pe aceeaşi verticală), de greutate $mg\,(a + b)$, sînt mobile în jurul axelor O şi O_1 şi prinse între ele printr-un fir AA_1. Ce greutate P trebuie atîrnată în C ($O_1C = c$) pentru echilibru.*

Indicaţie. Avem echilibru indiferent pentru: $P = mg\frac{b^2 - a^2}{c}$.

Tensiunea în fir este: $T = mg\frac{b^2 - a^2}{2a}$.

225. *Să se reducă la cuadraturi ecuaţiile de mişcare ale unui rigid omogen de rotaţie, mobil în jurul unui punct al axei sale Oz, sub acţiunea unei forţe ce derivă dintr-o funcţie V depinzînd numai de unghiul θ pe care-l face Oz cu o direcţie fixă.*

Indicaţie. Avem $V = f(\theta)$; scriind ecuaţiile lui Lagrange pentru φ şi ψ şi teorema energiei sîntem conduşi imediat la cuadraturi.

226. *Fie un sistem scleronom de puncte materiale, acţionat de forţe ce depind numai de poziţiile punctelor sistemului. Integralele ecuaţiilor de mişcare ale unui astfel de sistem rămîn reale dacă schimbăm t în it ($i = \sqrt{-1}$) şi proiecţiile α_p, β_p, γ_p ale vitezei fiecărui punct prin $-i\alpha_p$, $-i\beta_p$, $-i\gamma_p$. Să se arate că expresiile astfel obţinute reprezintă noua mişcare pe care ar lua-o sistemul dacă, aşezîndu-l în aceleaşi condiţii iniţiale, i-am aplica forţele egale şi opuse forţelor ce produc prima mişcare* (Appell).

Indicaţie. Putem utiliza ecuaţiile cu multiplicatorii lui Lagrange, în care vom înlocui pe t prin it. Se vede imediat că aceasta revine la a schimba semnele proiecţiilor forţelor aplicate şi la a modifica multiplicatorii. Sau, plecînd de la ecuaţiile lui Lagrange şi observînd că T este o formă pătratică în q^r, se vede că înlocuirea lui t prin it revine la schimbarea lui Q_r în $-Q_r$.

227. *Să se studieze mişcarea unui pendul simplu de lungime variabilă.* (Lecornu).

Indicaţie. Avem: $T = \frac{1}{2}(l^2\dot{\theta}^2 + \dot{l}^2)$ dacă $m = 1$; $V = gl\cos\theta$.

Ecuaţia de mişcare este:

$$\frac{d}{dt}(l^2\dot{\theta}) + gl\sin\theta = 0.$$

Dacă l este o funcţie liniară de t ($l = ut$) şi dacă ne mărginim la oscilaţii mici, putem lua ca funcţie $y = l\theta$ şi ca variabilă independentă $x = \frac{gl}{u^2}$, obţinînd ecuaţia:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$

din care se poate deduce că, dacă lungimea l variază destul de încet, durata unei oscilaţii simple este sensibil egală cu perioada unui pendul obişnuit a cărui lungime este egală cu media aritmetică dintre lungimile ce le are pendulul considerat la începutul şi sfîrşitul oscilaţiei.

228. *Două puncte materiale grele m_1 şi m_2 se mişcă într-un plan vertical, fiind legate printr-un fir inextensibil fără masă, de lungime l, trecut printr-un inel O. Să se studieze mişcarea sistemului presupunînd că firul rămîne întins şi că n-avem alte forţe afară de greutăţile celor două puncte.*

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Sistemul are trei grade de libertate. Putem lua drept coordonate lagrangeiene unghiurile θ_1, θ_2, făcute de Om_1, respectiv Om_2, cu verticala și vectorul de poziție $\overline{\rho}$ al punctului m_1 (m_2 va fi deci la distanța $l - \rho$ de O). Se găsește:

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 [\dot{\rho}^2 + (l - \rho)^2 \dot{\theta}_2^2]$$

și

$$U = g (m_1 \rho \cos \theta_1 + m_2 (l - \rho) \cos \theta_2.$$

Se scriu ecuațiile lui Lagrange etc.

229. *Să se studieze cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange, în plan (coordonate polare r, θ), mișcarea unui punct m atras către poziția $r = 0$, de forța elastică $2\alpha r$ ($\alpha > 0$).*

Indicație. Ecuațiile diferențiale ale mișcării sînt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = -2\alpha r; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0; \quad T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

Dezvoltînd ecuațiile precedente, se obține:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 = -2\alpha r; \quad mr^2\dot{\theta} = a = \text{const},$$

sau

$$\frac{dr}{d\theta} = r \sqrt{-\frac{2\alpha m}{a^2} r^4 + (2\alpha m r_0^2 + m^2 q_0^2) \frac{r^2}{a^2} - 1},$$

unde a, r_0, q_0 sînt respectiv constanta ariei, poziția inițială și viteza inițială.

230. *În problema precedentă, să se analizeze: 1) între ce valori pot varia r și θ ? 2) cu cît crește θ cînd r străbate toate valorile posibile?*

Indicație: 1) Punem în ecuația traiectoriei, scrisă mai sus:

$$r^2 = \rho; \quad \frac{2\alpha m}{a^2} = A; \quad (2amr_0^2 + m^2 q_0^2) \frac{1}{a^2} = B.$$

Ecuația traiectoriei se scrie cu aceste notații:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 2\rho \sqrt{-A\rho^2 + B\rho - 1}.$$

Fie ρ_1 și ρ_2 rădăcinile ecuației algebrice $-A\rho^2 + B\rho - 1 = 0$. Pentru ca problema să aibă sens, trebuie ca $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$.

Din expresia vitezei, care păstrează semnul neschimbat, rezultă că θ crește mereu în domeniul considerat.

2) Ecuația traiectoriei se mai poate pune sub forma: $d\theta = dx/\sqrt{1 - x^2}$, de unde rezultă o soluție $\sin\theta = f(r)$. Deci, $\frac{dr}{d\theta} = \frac{\cos\theta}{f'(r)}$. Pentru $r = \sqrt{\rho_1}\sqrt{\rho_2}$ urmează $\cos\theta \frac{dr}{d\theta} = 0$. Cum $f'(r)$ nu poate fi infinită, rezultă $\cos\theta = 0$. Cum θ

crește, el poate crește numai cu cîtimea π. Cînd r variază de la $\sqrt{\rho_1}$ pînă la $\sqrt{\rho_2}$ și înapoi, θ crește cu 2π.

231. *O bară omogenă grea AB se mișcă într-un plan orizontal (fără frecare). De extremitățile A și B ale barei este legat un fir inextensibil mai lung decît bara și lipsit de masă, trecînd printr-un inel punctiform O, fix. Să se studieze mișcarea sistemului.*

Indicație. Fie $2c$ lungimea barei și $2a = AO + OB$ lungimea firului. Ducem perpendiculara OP din O pe bară și fie GP distanța de la P la mijlocul G al barei. Punctul O se află pe o elipsă cu focarele în A și B, avînd axa mare $2a$. Notînd: $a^2 - b^2 = c^2$ avem:

$$\frac{\overline{GP}^2}{a^2} + \frac{\overline{OP}^2}{b^2} = 1.$$ Putem pune:

$GP = a\cos\varphi$, $OP = b\sin\varphi$. Fie $\alpha = \sphericalangle xOP$ (Ox fiind o axă fixă oarecare); coordonatele polare r și θ ale lui G sînt:

$$r^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi,\quad \theta = \alpha - \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{ctg}\varphi\right);$$

avem deci:

$$T = \frac{M}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right) + \frac{Mk^2}{2}\dot\alpha^2,$$

Mk^2 fiind momentul de inerție al sistemului în raport cu G. Se formează ecuațiile lui Lagrange după ce se exprimă T în funcție numai de φ, $\dot\varphi$ și $\dot\alpha$. Se observă că avem integralele prime $\frac{\partial T}{\partial\dot\alpha} = \text{const}$ și $T = h$. Eliminarea lui $\dot\alpha$ ne dă, printr-o cuadratură, pe t în funcție de φ.

232. *O bară omogenă grea este legată printr-o extremitate A de un punct fix O printr-un fir de lungimea $\overline{OA} = \overline{AB}$, în timp ce capătul B al barei alunecă fără frecare pe orizontala Ox. Se cer micile oscilații ale sistemului.*

Indicație. Fie $2l$ lungimea barei, θ unghiul planului OAB cu planul vertical dus prin Ox, $\beta = \sphericalangle OBA$. Avem:

$$2T = \frac{4}{3}l^2\dot\theta^2\sin^2\beta + \frac{4}{3}l^2(1 + 6\sin^2\beta)\dot\beta^2 \text{ și } V = gl\sin\beta\cos\theta.$$

233. *Un tub rectiliniu, de secțiune infinitezimală, face cu verticala ascendentă Oz un unghi θ. Care trebuie să fie legea de rotație a tubului în jurul lui Oz, pentru ca un punct material, de masă m, greu, mobil fără frecare în interiorul tubului, să poată căpăta, condițiile inițiale fiind convenabile, o mișcare definită prin relația $\overline{Om} = k(t+\alpha)^2$ (k și α constante)?*

Indicație. Fie ψ unghiul planului zOA cu un plan fix. Presupunem cunoscută variația lui ψ în timp: $\psi = f(t)$ și fie ρ distanța Om. Avem:

$$2T = m\left[\dot\rho^2 + \rho^2\sin^2\theta\, f^2(t)\right],\quad V = -m\rho g\cos\theta,$$

deci ecuația lui Lagrange pentru ρ este:

$$\ddot\rho - \rho\sin^2\theta\, f^2(t) + g\cos\theta = 0.$$

Să găsim forma lui $f(t)$ astfel ca să fie satisfăcută cerința problemei; se vede că trebuie să luăm:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2k + g\cos\theta}{k\sin^2\theta}}\ln\frac{t+\alpha}{\alpha}.$$

234. *Un tub circular, omogen, de secțiune infinitezimală, se poate roti în jurul unui diametru vertical fix. În interiorul tubului se poate mișca, fără frecare, un punct material greu m. Să se găsească mișcarea sistemului.*

Indicație. Să luăm planul inițial al cercului ca plan xOz și fie φ unghiul făcut la momentul t de planul cercului cu xOz. Luăm ca Oz diametrul vertical descendent și notăm cu θ unghiul mOz. Fie R raza tubului circular și M masa sa. Avem:

$$2T = Mk^2\dot{\varphi}^2 + mR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta),\quad V = mgR\cos\theta.$$

Se formează ecuațiile lui Lagrange pentru φ și θ. Se discută mișcarea.

235. *Să se arate că transformarea:*

$$Q = \sqrt{\frac{2q}{a}}\cos p;\quad P = \sqrt{2aq}\sin p \qquad (a = \text{const})$$

este o transformare de contact. Tot așa transformările:

$$Q_1 = q_1^2 + \lambda^2 p_1^2;\quad P_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{q_1}{\lambda P_1}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{q_2}{\lambda P_2}\right)$$

$$Q_2 = q_2^2 + \lambda^2 p_2^2;\quad P_2 = \lambda\operatorname{arctg}\left(\frac{q_2}{\lambda P_2}\right) \qquad (\lambda = \text{const}).$$

Indicație. Se va verifica relația:

$$dP\,\delta Q - \delta P\,dQ = dp\,\delta q - \delta p\,dq.$$

236. *Să se arate că transformarea:*

$$Q = (2q)^{1/2}k^{-1/2}\cos p;\quad P = (2q)^{1/2}k^{1/2}\sin p$$

în care $k = \text{const}$, este o transformare de contact.

Indicație. Se calculează dP, dQ, δP, δQ în funcție de pq, dp, dq, δp, δq. Se verifică apoi formula:

$$dP\,\delta Q - \delta P\,dQ = dp\,\delta q - \delta p\,dq.$$

237. *Să se arate că transformarea:*

$$q_1 = \sqrt{\frac{2Q_1}{\lambda_1}}\cos P_1 + \sqrt{\frac{2Q_2}{\lambda_2}}\cos P_2;$$

$$q_2 = -\sqrt{\frac{2Q_1}{\lambda_1}}\cos P_1 + \sqrt{\frac{2Q_2}{\lambda_2}}\cos P_2;$$

$$p_1 = \frac{\sqrt{2\lambda_1 Q_1}}{2}\sin P_1 + \frac{\sqrt{2\lambda_2 Q_2}}{2}\sin P_2;$$

$$p_2 = -\frac{\sqrt{2\lambda_1 Q_1}}{2}\sin P_1 + \frac{\sqrt{2\lambda_2 Q_2}}{2}\sin P_2,$$

Scanned with OKEN Scanner

cu λ_1, $\lambda_2 = const$ *este o transformare de contact. Să se arate apoi că această transformare schimbă sistemul hamiltonian:*

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1,2)$$

în care

$$H = p_1^2 + p_2^2 + \frac{1}{8}\lambda_1^2 (q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2}\lambda_2^2 (q_1 + q_2)^2,$$

în sistem hamiltonian:

$$\dot{Q}_r = \frac{\partial K}{\partial P_r}, \quad \dot{P}_r = -\frac{\partial K}{\partial Q_r} \qquad (r = 1,2)$$

în care

$$K = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2.$$

Indicaţie. Verificarea se face direct prin înlocuire.

238. *Fie un sistem dinamic cu:*

$$T = \frac{1}{2}\Phi \sum_{s=1}^{n} \frac{q_s}{\varphi_{sl}}$$

în care: $\Phi = |\Phi_{sk}|$ *este un determinant în care linia de indice s este o funcţie numai de* q_s, *iar* φ_{kl} *este minorul lui* Φ_{kl}, *şi*

$$V = -\frac{\psi}{\Phi}; \quad unde: \ \psi = \sum_{s=1}^{n} \varphi_{sl}\psi_s,$$

ψ_s *fiind o funcţie numai* q_s. *Să se scrie ecuaţia lui Hamilton-Jacobi şi să se arate că:*

$$W = -a_1 t + \sum_{i=1}^{n} \int \sum_{s=1}^{n} a_s \Phi_{is} + 2\psi_i \, dq_i,$$

în care $a_1, \ldots, a_n$ *sînt constante arbitrare, este o integrală completă a acestei ecuaţii.*

Indicaţie. Formînd hamiltoniana sistemului, găsim că ecuaţia lui Hamilton-Jacobi este:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2\Phi}\sum_{s=1}^{n} \varphi_{sl}\left(\frac{\partial W}{\partial q_s}\right)^2 \frac{\psi}{\Phi} = 0.$$

Se verifică direct că W satisface această ecuaţie.

239. *Să se scrie sistemul hamiltonian şi ecuaţia lui Hamilton-Jacobi pentru mişcarea unui pendul simplu.*

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Se scrie funcția lui Hamilton. Însemnînd cu l lungimea pendulului și cu q unghiul făcut de firul acestuia cu verticala descendentă la momentul t, găsim:

$$H = \frac{1}{2}\frac{p^2}{l^2} - gl\cos q$$

unde $p = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q}$ (unde $\mathfrak{L} = T - U$ este funcția lui Lagrange).

240. *Fie mișcarea unui punct material* (x, y) *în plan, în absența forțelor. Fie* u, v, *componentele vitezei. Să se arate că*

$$I = \int(\delta x - t\,\delta u)$$

integrala fiind extinsă de-a lungul unui arc de curbă format din punctele simultane în spațiul cu patru dimensiuni (x, y, u, v), *este un invariant integral.*

Indicație. Ecuațiile lui Hamilton fiind:

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{u} = \dot{v} = 0$$

avem, integrînd: $u = a$, $v = b$, $x = at + c$, $y = bt + d$ unde a, b, c, d sînt constante arbitrare. Înlocuind în I avem:

$$I = \int(t\,\delta a + \delta c - t\,\delta a) = \int \delta c$$

deci I este idependent de timp.

241. *Considerăm o problemă dinamică definită de*

$$H = q_1p_1 - q_2p_2 - aq_1^2 + bq_2^2$$

care admite o integrală primă:

$$V = \frac{p_2 - bq_2}{q_1} = c.$$

Să se găsească celelalte integrale prime.

Indicație. Sistemul fiind conservativ, $H = h$ este o integrală primă. Rezultă că $p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2$ (cu p_1 și p_2 scoase din $V = c$, $H = h$) este diferențiala totală exactă a unei funcții $X(q_1, q_2, h, c)$. Deci ultimele două integrale prime sînt:

$$\frac{\partial X}{\partial c} = \text{const} \quad \text{și} \quad \frac{\partial X}{\partial h} = t + \text{const.}$$

Se găsește: $q_1q_2 = \text{const}$ și $\ln q_1 = t + \text{const.}$

242. *Să se determine* α *și* β *astfel încît transformarea:*

$$X = x^\alpha \cos \beta y; \quad Y = x^\alpha \sin \beta y;$$

să fie canonică.

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Formăm expresia $d\psi = Y\,dX - y\,dx$. Se găsește:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\alpha}{2} x^{2\alpha-1} \sin(2\beta y) - y; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\beta x^{2\alpha} \sin^2(\beta y)$$

Rezultă condiția $\alpha\beta x^{2\alpha-1} = 1$; așadar: $\alpha = \frac{1}{2}$; $\beta = 2$; $\psi = \frac{1}{4}\sin 4y - y$.

243. *Să se arate că transformarea prin raze reciproce, în spațiul n-dimensional:*

$$Y_i = y_i / \sum y_i^2; \; X_j = x_j \sum y_i^2 - 2y_j \sum x_i y_i, \text{ este canonică.}$$

Indicație. Se va arăta că este satisfăcută condiția $\sum X\,dY - \sum x\,dy = 0$. Se observă că:

$$\frac{\partial y_i}{\partial Y_j} = \sum y_i^2 - 2\sum y_i y_j; \; X_j = \sum x_i \frac{\partial y_i}{\partial Y_j}.$$

244. *Să se arate că transformarea:*

$$P_k = qp_k - 2\varphi q^k; \; Q_k = Q\,q^k; \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

unde am pus:

$$\varphi = \sum p_k q^k; \; q = \sum q^{k^2}; \; Q = \sum Q_k^2, \text{ este canonică.}$$

Indicație. Se verifică relația $qQ = 1$, deci $q\,dQ + Q\,dq = 0$. Apoi:

$$Q\,dq = 2Q\sum q^k\,dq^k = 2Qq^2 \sum Q_k\,dQ_k = 2q\sum Q_k\,dQ_k = Q\,dq.$$

Deci:

$$q\,dQ = Q\,dq = 0. \; \sum P_k\,dQ_k = \sum p_k\,dq^k - \varphi Q\,dq.$$

245. *Să se arate că transformarea:*

$$p = \sqrt{2q}\cos\omega; \; q = \sqrt{2q}\sin\omega,$$

este canonică.

Indicație. Se verifică ușor că $p\,dq - q\,dp = d\psi$, unde

$$\psi = \frac{1}{2}\rho \sin 2\omega.$$

246. *Să se verifice că, dacă*

$$q_k = q_k(t; a, b); \; p_k = p_k(t; a, b); \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

sînt integralele sistemului canonic hamiltonian, paranteza lui Lagrange: $[a, b]$ *este o integrală primă a sistemului canonic.*

Indicație. Se derivează paranteza în raport cu timpul și se fac substituțiile indicate.

Scanned with OKEN Scanner

247. *Să se stabilească proprietatea: paranteza lui Poisson este simbolul celei mai generale transformări infinitezimale care aparține grupului infinit de transformări ale celor 2n variabile q, p.*

Indicație. Relația (35) § 352 definește transformarea canonică infinitezimală:

$$Q_k = q_k + \frac{\partial K}{\partial p_k}\delta t; \quad P_k = p_k - \frac{\partial K}{\partial q_k}\delta t; \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

unde $K(q, p)$ este o funcție arbitrară, de două ori derivabilă, de q, p; iar δt un parametru infinitezimal. Fie dF variația suportată de funcția arbitrară $F(q, p)$ prin transformarea de mai sus. Avem:

$$dF = (F, K)\,\delta t;$$

ceea ce trebuia demonstrat.

248. *Să se demonstreze că determinantul funcțional:*

$$\Delta = \frac{D(P_k, Q^k)}{D(p_k, q^k)}$$

al unei transformări canonice, este egal cu unitatea în valoarea absoluă.

Indicație. Se verifică prin calcule simple că:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} [p_r, q^s] & [p_k, p_r] \\ [q^m, q^s] & [p_k, q^m] \end{vmatrix} = 1. \qquad (r, s, k, m = 1, 2, \ldots, 2n)$$

249. *Un sistem dinamic olonom avînd două grade de libertate posedă energia cinetică:*

$$T = \frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{a + bq_2} + \frac{1}{2}q_2^2\dot{q}_2^2$$

și energia potențială:

$$V = c + dq_2$$

unde a, b, c, d sînt constante. Să se arate că valoarea lui q_2 se obține prin rezolvarea ecuației algebrice:

$$(q_2 - k)(q_2 + 2k)^2 = h(t - t_0)^2$$

în care h, k, t_0 sînt constante.

Indicație. Variabila q_1 este ciclică; deci $q_1 = \beta(a + bq_2)$, unde β = const. Înlocuim această valoare în T și scriem ecuația lui Lagrange pentru variabila q_2. Se găsește, după o serie de transformări simple:

$$J = \int \frac{q_2\,dq_2}{\sqrt{q_2 - k}} = \sqrt{2\alpha}\,(t - t_0).$$

Efectuînd integrarea se obține:

$$J = \frac{2}{3}\sqrt{q_2 - k}\,(q_2 + 2k),$$

de unde urmează relația cerută.

Scanned with OKEN Scanner

250. *Energia cinetică a unui sistem dinamic este:*

$$T = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$$

și energia potențială:

$$V = 1/(q_1^2 + q_2^2).$$

Să se arate că între q_1 și q_2 există relația:

$$a^2q_1^2 + b^2q_2^2 + 2abq_1q_2\cos\gamma = \sin^2\gamma,$$

unde a, b, γ sînt constante de integrare.

Indicație. Este o problemă de tip Liouville. Punem $q_1^2 + q_2^2 = u$ și scriem ecuațiile lui Lagrange. Se obține prin efectuarea unei integrări:

$$\frac{\sqrt{2h}\,dq_1}{\sqrt{-2\gamma_1}\sqrt{1-\frac{h}{\gamma_1}q_1^2}} = \frac{\sqrt{2h}\,dq_2}{\sqrt{-2\gamma_2}\sqrt{1-\frac{h}{\gamma_2}q_2^2}}.$$

Facem substituția $x_1 = \sqrt{\frac{h}{\gamma_1}}\,q_1$; $x_2 = \sqrt{\frac{h}{\gamma_2}}\,q_2$; se obține ecuația:

$$\frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}} = \frac{dx_2}{\sqrt{1-x_2^2}},$$

care se integrează prin metoda cunoscută a factorului integrant. Se obține integrala generală:

$$x_1\sqrt{1-x_1^2} - x_2\sqrt{1-x_2^2} = \text{const},$$

de unde rezultă relația cerută.

251. *Să se studieze sistemul avînd energia cinetică T și potențială U:*

$$T = \frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{a+bq_2^2} + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2; \quad U = c + dq_2^2;$$

unde a, b, c, d sînt constante.

Indicație. Variabila q_1 este ciclică; $\mathfrak{L} = T - U$; avem integrala $\beta = \frac{\dot{q}_1}{a+bq_2^2}$. Apoi funcția lui Routh este:

$$R = \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - c - dq_2^2 - \frac{1}{2}\beta^2(a + bq_2^2).$$

Problema se reduce la integrarea ecuației:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2}\right) - \left(\frac{\partial R}{\partial q_2}\right) = 0.$$

Avem:

$$\ddot{q}_2 + (2\alpha + b\beta^2)\, q_2 = 0; \qquad q_2 = A \sin(\alpha t + \varepsilon);$$

$$q_1 = \left(\beta a + \frac{1}{2} pbA^2\right) t - \frac{\beta b A^2}{4(2\alpha + b\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \sin 2(\sqrt{2\alpha + b\beta^2}\, t + \varepsilon).$$

252. *Funcția lui* Lagrange *fiind:*

$$\mathfrak{L} = \frac{\dot{q}_1^2}{aq_2 + b} + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + 2q_2^3 + cq_2,$$

a, b, c find constante, să se arate că $q_2 = \mathfrak{P}(t + \varepsilon)$ *unde* $\mathfrak{P}$ *este funcția eliptică a lui Weierstrass și* ε *este o constantă.*

Indicație.

$$R = \mathfrak{L} - \dot{q}_1 \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\dot{q}_1^2}{aq_2 + b} + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + 2q_2^3 + cq_2 - \frac{2\dot{q}_1^2}{aq_2 + b}.$$

Rezultă ecuația $\ddot{q}_2 - 6q_2^2 - \alpha = 0$, care este ecuația diferențială pentru funcția eliptică a lui Weierstrass.

253. *Funcția lui Lagrange fiind:*

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} f(q_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - \psi(q_2),$$

să se arate că prin integrala energiei sistemul se reduce la ecuația:

$$\frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial q_2'}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial q_2} = 0,$$

unde:

$$\mathfrak{L}' = [2h - 2\psi(q_2)]^{1/2}[f(q_2) + q_2'^2]^{1/2} \text{ și } q_2' \dot{q}_1 = \dot{q}_2.$$

Să se arate că noul sistem nenatural posedă o integrală a energiei și să se integreze prin cuadraturi.

Indicație. Coordonata q_1 este ciclică; se obține $f(q_2)\dot{q}_1 = c$. Formăm expresia:

$$\sum \dot{q}_r \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_r} = \dot{q}_1^2 \cdot f(q_2) + q_2^2$$

și apoi ecuația energiei ne dă

$$\dot{q}_1 = (2h - 2\psi)^{1/2}\, (f + q_2'^2)^{-1/2}$$

Formăm pe

$$\mathfrak{L}' = \sum \frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_r} = (f + q_2'^2)\, \dot{q}_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

În definitiv, prin substituțiile indicate se obține:

$$q_2' \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial q_2'} - \mathfrak{L}' = -\dot{q}_1 f(q_2) = c,$$

deci, există integrala energiei. Apoi, ecuația lui Lagrange redusă, ne conduce la relația:

$$\ddot{q}_2 + \frac{d\psi}{dq_2} - \frac{1}{2}\frac{c^2}{j^2}\frac{df}{dq_2} = 0,$$

care prin integrare ne dă $q_2^2 + 2\psi + \frac{c^2}{f} = \text{const.}$

Problema se mai poate rezolva prin coordonate ciclice, scriind a doua ecuația a lui L a g r a n g e:

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}_2) - \left(\frac{1}{2}\dot{q}_1^2 \frac{df}{dq_2} - \frac{d\psi}{dq_2}\right) = 0,$$

care ne conduce la aceeași ecuație diferențială pentru q_2.

254. *Să se studieze mișcarea unui punct material atras de un centru fix cu o forță invers proporțională cu cubul distanței. Se va considera sistemul hamiltonian și se va reduce numărul gradelor de libertate cu ajutorul integralei energiei.*

I n d i c a ț i e. Notînd cu q_1 unghiul polar și cu q_2 raza vectoare, sistemul hamiltonian se scrie:

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}; \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1,2)$$

unde:

$$H = \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{p_1^2}{2q_2^2} - \frac{\mu}{2q_2^2}$$

și unde μ este o constantă. Scriind $H = -h$, sistemul se reduce la:

$$\frac{dq_1}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_2},$$

în care

$$K = -\sqrt{\mu - q_2^2 p_2^2 - 2hq_2^2}.$$

Cum K nu conține q_1, putem repeta procedeul, $K = -k$ const fiind o integrală primă. Avem:

$$p_2 = \sqrt{\frac{\mu - k^2}{q_2^2} - 2h} = -\mathfrak{L}$$

și sistemul se reduce la o singură ecuație

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{d\mathfrak{L}}{dk} = \frac{k}{q_2^2}\left(\frac{\mu - k^2}{q_2^2} - 2h\right)^{-1/2}$$

Scanned with OKEN Scanner

care integrată ne dă (dacă $\mu < k^2$):

$$q_2 = \sqrt{\frac{k^2 - \mu}{-2h}} \sec\left[(q_1 + \varepsilon)\sqrt{1 - \frac{\mu}{k^2}}\right], \qquad (\varepsilon = \text{const})$$

ultima ecuație reprezintă traiectoria (în coordonate polare) a punctului material.

255. *Să se integreze sistemul hamiltonian:*

$$\dot{q} = \frac{H}{p};\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \text{ în care } H = \frac{p^2}{2} - \frac{\mu}{q}, \qquad (\mu = \text{const})$$

aplicînd metoda lui Hamilton-Jacobi.

Indicație. Ecuația lui Hamilton-Jacobi este:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^2 - \frac{\mu}{q} = 0.$$

Luăm pentru V o funcție de forma

$$V = f(t) + \Phi(q),$$

f și Φ fiind funcții numai de t, respectiv de q. Avem:

$$f'(t) = \frac{\mu}{q} - \frac{1}{2}[\Phi'(q)]^2$$

Ecuația de mai sus este satisfăcută scriind:

$$f'(t) = \frac{\mu}{q} - \frac{1}{2}[\Phi'(q)]^2 = \frac{\mu}{a}. \qquad (a = \text{const}).$$

Avem:

$$f(t) = \frac{\mu}{a}t,\ \ \Phi(q) = \sqrt{2\mu a}\ \arcsin\sqrt{\frac{q}{a}} + \sqrt{\frac{2\mu q\,(a-q)}{a}}.$$

Se formează W. Soluția problemei dinamice este dată apoi de:

$$\beta = \frac{\partial W}{\partial a},\ p = \frac{\partial W}{\partial q}. \qquad (\beta = \text{const}).$$

256. *În mișcarea unui sistem dinamic cu trei grade de libertate se cunosc integralele prime:*

$$\Phi = p_3 q_2 - q_3 p_2 = \text{const},$$
$$\Psi = p_1 q_3 - q_1 p_3 = \text{const}.$$

Să se găsească a treia integrală primă.

Indicație. Formăm paranteza lui Poisson (Φ, Ψ):

$$(\Phi, \Psi) \equiv \sum_{r=1}^{3}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q^r}\frac{\partial \Psi}{\partial p_r} - \frac{\partial \Psi}{\partial q^r}\frac{\partial \Phi}{\partial p_r}\right) = p_2 q_1 - q_2 p_1.$$

$p_2 q_1 - q_2 p_1 = \text{const}$ este integrala primă căutată. (Dacă q_1, q_2, q_3 sînt coordonate carteziene ortogonale, cele trei integrale prime exprimă teorema momentului cinetic).

Scanned with OKEN Scanner

257. *Să se studieze cu ajutorul metodei lui Hamilton-Jacobi mişcarea unui punct material* (x, y, z) *avînd energia potenţială* $(ax^2+by^2+cz^2)$ *şi obligat să rămînă pe suprafaţa sferei* $x^2+y^2+z^2=1$.

Indicaţie. Problema se mai poate reduce considerînd integrala energiei.

258. *Să se studieze mişcarea unui punct material pe o sferă, atras de un punct M de pe suprafaţa sferei cu o forţă egală cu:*

$$\frac{1}{r^2\,(d^2-r^2)^{-2/3}}$$

unde: d este diametrul sferei şi r — distanţa rectilinie de la M la punctul material. Să se găsească traiectoria.

Indicaţie. Vom lua drept coordonate ale punctului mobil, colatitudinea θ şi longitudinea λ (M fiind luat ca pol). Eliminînd timpul din ecuaţiile lui Lagrange găsim ecuaţia diferenţială a traiectoriei:

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\left[1+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{d\theta^2}{d\lambda}\right)\right]=a\operatorname{ctg}\theta+b,$$

care se integrează elementar.

259. *Să se arate că dacă* $F_1=\text{const}$, $F_2=\text{const},\ldots,$ $F_n=\text{const}$ *sînt integralele sistemului:*

$$\frac{dx}{x}=\frac{dx_1}{x_1}=\ldots=\frac{dx_n}{x_n}$$

atunci $\frac{1}{x}\frac{D(F_1,F_2,\ldots,F_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}$ *este ultimul multiplicator al sistemului.*

Indicaţie. Se va proceda ca în teoria generală a ultimului multiplicator.

260. *Să se arate că în cazul mişcării plane a unui punct material sub acţiunea forţelor derivînd dintr-o funcţie* $V(x, y)$, *determinarea traiectoriilor care corespund aceleiaşi valori h a constantei energiei se reduce la găsirea unei integrale complete a ecuaţiei cu derivate parţiale* (Goursat):

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2=2\,(v+h).$$

Indicaţie. Punem: $z=x+iy$, $Z=Y+iY$ şi fie $z=F(Z)$ o funcţie analitică de Z. Avem deci: $x=(X,Y)$, $y=(X,Y)$, φ şi ψ satisfăcînd relaţiile lui Cauchy

$$\frac{\partial\psi}{\partial X}=\frac{\partial\psi}{\partial Y};\quad \frac{\partial\psi}{\partial Y}=-\frac{\partial\psi}{\partial X}.$$

Făcînd în ecuaţia cu derivate parţiale dată substituţia $x\to X$, $y\to Y$ obţinem o ecuaţie de aceeaşi formă. Considerînd deci toate traiectoriile corespunzînd lui $V(x, y)$ şi valorii h a constantei energiei şi supunîndu-le trans-

Scanned with OKEN Scanner

formării izogonale considerate, noile curbe vor fi traiectorii corespunzătoare la noua funcție a forțelor:

$$\left[V(\varphi,\psi)+h\right]\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y}\right)^2\right]$$

și valorii nule pentru constanta energiei.

261. *Să se studieze prin metoda Hamilton-Jacobi mișcarea unui sistem format din trei puncte materiale* m_1, m_2, m_3 *situate într-un plan fix și atrăgîndu-se mutual cu o forță funcție de distanță. Punctele* m_1 *și* m_2 *sînt obligate să rămînă la distanțe constante de* m_3 (Liouville).

Indicație. Sistemul are patru grade de libertate. Alegînd drept o coordonată unghiul α făcut de m_3m_1 cu m_3m_2 se constată că funcția forțelor nu depinde decît de α. Problema se reduce la cuadraturi prin metoda lui Liouville.

262. *Să se completeze și să se interpreteze problema* 1 *de la* § 397 *cînd*

$$U=\frac{k}{\sqrt{r^2+z^2}}+gz.$$

Indicație. U exprimă o forță combinată: newtoniană și elastică. Dacă α este unghiul vizual al traiectoriei relativ la pol, condiția de stabilitate este: $\cos\alpha > 1/3$ (Levi-Civita).

263. *Să se arate că ecuația secular*ă § 392 *este invariantă la transformări liniare și omogene.*

Indicație. Se vor avea în vedere proprietățile de transformare ale unei forme pătratice.

264. *Să se găsească perioadele de vibrație în jurul unei poziții de echilibru a unei particule grele care se mișcă fără frecare pe o suprafață fixă* (Whittaker).

Indicație. Ecuația suprafeței $z=\frac{x^2}{2R_1}+\frac{y^2}{2R_2}$ (R_1 și R_2 fiind razele principale de curbură). $T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$, $U=mgz$.

Se formează potențialul cinetic și ecuațiile mișcării.

265. *Să se calculeze valoarea integralei lui Hamilton, între limitele* $t=0$ *și* $T=t_1$ *pentru:* 1) *căderea liberă a unui punct greu* $z=\frac{1}{2}gt^2$; 2) *pentru două mișcări virtuale:* $z=ct$ *și* $z=at^3$, *unde* a *și* c *sînt constante care se determină prin condiția ca la extremități cele două integrale să coincidă cu cea reală.*

Să se arate că integrala pentru mișcarea reală are o valoare mai mică decît integrala pentru mișcările virtuale 2).

Indicație.

$$1)\ \int \mathfrak{L}\,dt=\int_0^{t_1}\left[\frac{m}{2}(gt)^2+mg\frac{g}{2}t^2\right]dt=\frac{1}{3}mg^2t_1^3.$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Pentru $z = ct$, avem:

$$\int \mathfrak{L}\, dt = \int_0^{t_1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{gt_1}{2} \right)^2 mg \frac{gt_1}{2} t \right] dt = \frac{3}{8} mg^2 t_1^3,$$

unde am luat $c = \frac{g}{2} t_1$; pentru $z = at^3$, luînd $a = \frac{g}{2t_1}$:

$$\int \mathfrak{L}\, dt = \int_0^{t_1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{3g}{2t_1} \right)^2 t^4 + mg \frac{g}{2t_1} t^3 \right] dt = \frac{7}{20} mg^2 t_1^3.$$

266. *Să se integreze ecuația diferențială a lui Hamilton-Jacobi în cazul mișcării unui proiectil sub acțiunea greutății.*

Indicație. Fie q^1, q^2 coordonatele generalizate de poziție. Ecuația energiei ne dă: $\frac{1}{2}(\dot{q}^{1^2} + \dot{q}^{2^2}) = -gq^2 + h$.

Ecuația căutată devine:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dV}{dq^1} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dq^2} \right)^2 \right] = -gq^2 + h.$$

Facem substituția $V = V^* + b_1 q^1$. Integrînd se obține:

$$V = b_1 q^1 - \frac{1}{3g} (2h - b_1^2 - 2gq^2)^{3/2}.$$

Mișcarea este dată de:

$$\frac{dV}{db_1} = q^1 + \frac{b_1}{g} (2h - b_1^2 - 2gq^2)^{1/2} = -a_1;$$

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{1}{g} (2h - b_1^2 - 2gq^2)^{1/2} = t + \varepsilon.$$

267. *Să se studieze cu ajutorul principiului lui d'Alembert mișcarea unui punct material care este supus accelerației g în direcția axei pozitive x și este obligat să se miște: 1) pe o dreaptă $x = y \operatorname{tg} \alpha$; 2) pe cercul $x^2 + y^2 = l^2$.*

Indicație. Principiul lui d'Alembert ne dă:

$$\sum \left[(F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y \right] = 0.$$

În cazul nostru: $F_x = mg$; $F_y = 0$.

1) Avem $\delta x - \operatorname{tg} \alpha\, \delta y = 0$; deci, folosind multilplicatorii lui Lagrange: $mg - m\ddot{x} + \lambda = 0$; $-m\ddot{y} - \lambda \operatorname{tg} \alpha = 0$; rezultă:

$$\ddot{x} = g \sin^2 \alpha; \quad \ddot{y} = \frac{g}{2} \sin 2\alpha;$$

a căror integrare este simplă.

Scanned with OKEN Scanner

2) Pentru cerc avem $x_0\,\delta x + y_0\,\delta y = 0$; deci

$$mg - m\ddot{x} + \lambda x = 0; \quad -m\ddot{y} + \lambda y = 0.$$

Rezultă: $$\ddot{x}y - x\ddot{y} = gy;$$

sau punînd: $x = l \sin \varphi$, $y = l \cos \varphi$, rezultă ecuaţia pendulului

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{l} \sin \varphi.$$

268. *Să se aplice ecuaţia de mişcare normală:*

$$\ddot{q}_\nu + \frac{1}{D}\left\{ {l \atop \nu} \; {m \atop } \right\} \dot{q}_l \dot{q}_m = \frac{1}{D} A_{r\nu}\, Q_r, \tag{1}$$

la mişcarea unui punct nesolicitat de nici o forţă, pe sfera de rază R.

Indicaţie. Ecuaţia (1) devine pe sferă (spaţiu riemannian), în cazul cînd punctul nu este solicitat de nici o forţă, ecuaţia diferenţială a geodezicelor sferei. Avem pe sferă:

$$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta\, d\varphi^2)$$

aşadar: $a_{11} = R^2$; $a_{12} = 0$; $a_{22} = R^2 \sin^2 \theta$. Prin urmare simbolii lui Cristoffel sînt:

$$\left\{ {1 \atop 1} \; {1 \atop } \right\} = 0; \left\{ {1 \atop 1} \; {2 \atop } \right\} = 0; \left\{ {2 \atop 1} \; {2 \atop } \right\} = -\sin\theta \cos\theta\, R^4 \sin^2\theta;$$

$$\left\{ {1 \atop 2} \; {1 \atop } \right\} = 0; \left\{ {1 \atop 2} \; {2 \atop } \right\} = \operatorname{ctg}\theta\, R^4 \sin^2\theta; \left\{ {2 \atop 2} \; {2 \atop } \right\} = 0,$$

iar

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = R^4 \sin^2 \theta > 0.$$

Ecuaţiile de mişcare (1) sînt:

$$\ddot{\theta} - \sin\theta \cos\theta \cdot \dot{\varphi}^2 = 0; \quad \ddot{\varphi} + 2 \operatorname{ctg}\theta \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} = 0.$$

O integrală primă se obţine imediat: $\sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} = \text{const}$. Cu ajutorul ei obţinem: $\dot{\theta}^2 = c_2 - c_1^2/\sin^2\theta$. Eliminînd timpul t ecuaţia diferenţială a traiectoriei devine:

$$\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c_2}{c_1^2} - 1 - \theta^2$$

unde am pus $\theta = \operatorname{ctg}\theta$. Se obţine $\theta = \alpha \sin(\varphi + \beta)$, adică

$$\cos\theta = \sin\theta\,(a\cos\varphi + b\sin\varphi), \text{ sau } z = ax + by.$$

Aşadar, liniile geodezice sînt secţiunile sferei cu planele care trec prin centrul ei (cercurile mari); rezultat bine cunoscut.

Scanned with OKEN Scanner

269. *Să se studieze, cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange mișcarea plană a unei bare rectilinii, omogene, supusă atracției proporțională cu masa și cu distanța, din partea unei axe fixe din plan (orizontal); fără frecare.*

Indicație. Fie θ = unghiul format de bara AB cu orizontala Ox. Energia cinetică este dată de teorema lui König:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2,$$

unde J = momentul de inerție relativ la centrul de greutate G (x_G, y_G). Funcția de forță este:

$$U = -\frac{k\mu}{2}\int y^2\, dr,$$

unde μ = masa elementului de bară dr, a cărui ordonată este y; k = const. Cum $y = y_G + r\sin\theta$, rezultă:

$$U = -\frac{k}{2}(my_G^2 + \eta \sin^2\theta).$$

Ecuațiile lui Lagrange sînt:

$$\ddot{x}_G = 0;\ \ddot{y}_G = -ky_G;\ \ddot{\theta} = -k\sin\theta\cos\theta.$$

Centrul de greutate descrie o sinusoidă; proiecția sa pe Ox se deplasează uniform. Bara oscilează în jurul poziției Ox.

270. *O bară materială de masă M, rectilinie, $\overline{AB} = 2l$, se poate mișca în planul vertical, în jurul punctului fix A. Pe această bară alunecă, fără frecare, un punct P de masă m. Să se studieze mișcarea sistemului.*

Indicație. Fie θ = unghiul fomat de $\overrightarrow{AB}$ cu verticala descendentă Ay. Energia cinetică este dată de relația

$$T = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2),$$

unde $r = \overrightarrow{AP}$ și J este momentul de inerție în raport cu A. Energia potențială, aici $U = mgr\cos\theta + Mgl\cos\theta$.

Ecuațiile lui Lagrange sînt:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta;$$

$$\frac{d}{dt}[(J + mr^2)\dot{\theta}] = -(mr + Ml)\, g\sin\theta.$$

271. *Să se aplice teorema lui Gibbs-Hertz a invarianților adiabatici* (§ 361) *următoarelor cazuri particulare:*

1) *un oscilator*; 2) *pendulul simplu matematic*; 3) *efectul Zeeman* (*un punct m cu încărcare electrică e se mișcă pe cercul de rază a, sub acțiunea unui cîmp magnetic perpendicular pe planul cercului*).

Scanned with OKEN Scanner

Indicaţie. 1) Oscilatorul. Ecuaţia de mişcare $m\ddot{q}+m\omega^2 q=0$, integrată o dată ne dă ecuaţia energiei $p^2+\omega^2q^2=2E$; iar aria închisă de această curbă (elipsă cu semiaxele: $\sqrt{2E}$ şi $\sqrt{2E}/\omega$) este $V=2\pi E/\omega$.

Regăsim condiţia cuantică a lui Planck: $E=h\nu$.

2) Pendulul simplu.

$$E_c=\frac{1}{2}\,l^2\,\dot{\theta}^2=E+gl\cos\theta.$$

Volumul: $V=l^2\int\dot{\theta}^2\,dt=2\sqrt{2}l\int\limits_{-\theta_0}^{\theta_0}\sqrt{E+gl\cos\theta}\,d\theta.$

Apoi: $\delta V/\partial E=2\int\limits_{\theta_0}^{\theta_0}d\theta/\dot{\theta}=T.$

(Pentru $E=-gl$, avem $\theta_0=0$; $v=0$). Punem $\sin\frac{\theta_0}{2}=k$. Avem:

$$E+gl=2glk^2.$$

Apoi: $\frac{\partial V}{\partial k}=\frac{\partial V}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial K}=4\,gk.$

Rezultă $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,c_n^2\,k^{2n}\left[c_0=1;\ c_n=\frac{1.3,\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right].$

În definitiv, găsim:

$$V=8\pi\sqrt{l^3g}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+2}c_n^2\,k^{2n+2}=4\pi\sqrt{l^3\,gk^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n^2\,k^{2n}}{n+1}.$$

3) Admitem ca parametru adiabatic raza cercului $a(t)$. Avem:

$$E_c=\frac{m}{2}\,a^2\,\dot{\theta}^2=\frac{1}{2ma^2}\,p_\theta^2;\quad E_{pot}=-\frac{e^2}{a}-\frac{ea^2H}{2c}\,\dot{\theta}.$$

Deducem în aceste condiţii: $p_0=\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}$.

Deci:

$$H=\frac{1}{2ma^2}\,p_\theta^2+\frac{e^2}{2mc}\,p_0+\frac{e^2}{a}.$$

Rezultă:

$\dot{p}_0=0;\quad \dot{\theta}=\frac{p_0}{ma^2}+\frac{eH}{2mc}$. Punem $\omega_0=\frac{k}{ma_0^2}$; $\omega=\frac{k}{ma^2}+\frac{eH}{2mc}$.

Aşadar:

$$\omega-\omega_0=\frac{k}{m}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a_0^2}\right)+\frac{eH}{2mc}. \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Invariantul adiabatic este:

$V = \int_0^{T_0} p_0\, d\theta = k \int_0^{T_0} d\theta = kT_0$; (kT_0 este perioada mișcării neperturbate).

Deci: $\int_0^{T_0} k\, dt = ma_0^2 \int_0^{T_0} d\theta$ în mișcare neperturbată;

$\int_0^{T_0} k\, dt = ma^2 \int_0^{T_0} d\theta$, în mișcare perturbată.

Așadar: $a = a_0$ și deci efectul Zeeman este dat de $\omega - \omega_0 = \frac{eH}{2mc}$.

272. *Pe un plan înclinat OA cade o bilă de masă m prin propria ei greutate. Planul stînd în poziție inițială orizontală, se rotește în jurul unei axe orizontale care trece prin O pînă ajunge în poziție verticală. Să se studieze mișcarea bilei.*

Indicație. Însemnăm cu θ unghiul rotației instantanee. *OA* este luată ca axă x. Energia cinetică este $\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} mx^2 \dot{\theta}^2$; energia potențială este $-mg \sin\theta\, dx$. Se scriu ecuațiile lui Lagrange; se obține: $\ddot{x} + x\dot{\theta}^2 + g \sin\theta = 0$; $x\ddot{\theta} + g\cos\theta = 0$.

273. *Un plan înclinat se deplasează pe verticală după o lege care este funcție oarecare de timp. Să se studieze mișcarea fără frecare a unui punct de masă m pe plan*: 1) *Cu ecuațiile lui* Lagrange; 2) *Prin principiul lui* d'Alembert.

Indicație. Ecuația planului este $z - ax = \varphi(t)$, unde $a = \operatorname{tg}\alpha$ determină înclinarea constantă a planului față de orizontală, $\varphi(t)$ este intersecția variabilă în timp a planului cu axa z.

1) Ecuațiile Lagrange dau: $\ddot{x} = -\lambda a$, $\ddot{z} = \lambda - g$, unde λ este un parametru care se determină din ecuația planului: $\ddot{z} - a\ddot{x} = \ddot{\varphi}(t)$. Se găsește:

$$x = x_0 - \frac{a}{1+a^2}\left[\varphi(t) - \varphi(0) - \dot{\varphi}(0)\, t + g\frac{t^2}{2}\right];$$

$$z = z_0 + \frac{1}{1+a^2}\left[\varphi(t) - \varphi(0) - \dot{\varphi}(0)\, t - ga^2\frac{t^2}{2}\right].$$

2) Principiul lui d'Alembert conduce la relația $\ddot{x} + (g+\ddot{z})\, a = 0$, care cu ecuația planului, derivată de două ori, determină pe $\ddot{x}$ și $\ddot{z}$.

274. *Să se studieze mișcarea pendulului simplu cînd punctul său de suspensie execută o mișcare de translație orizontală rectilinie după o lege oarecare* [$\xi = f(t)$]. *Se va aplica principiul lui d'Alembert.*

Cazul oscilațiilor foarte mici. Cazul cînd $f(t)$ reprezintă o oscilație armonică.

Indicație. Coordonate plane x, y (pozitiv în sus). a) Principiul lui d'Alembert ne dă: (1) $\ddot{x}\,\delta x + (\ddot{y}+g)\delta y = 0$. Ecuație de con-

Scanned with OKEN Scanner

diție (2) $(x-\xi)^2+y^2=l^2$. Variația ei ne dă (3) $(x-\xi)\,\delta x+y\,\delta y=0$. Din (1) și (3) rezultă (4) $y\ddot{x}-(x-\xi)(\ddot{y}+g)=0$. Derivăm (2) de două ori; aceasta împreună cu (4) ne dă ecuația diferențială a problemei.

b) Pentru oscilații foarte mici, se observă că $x-\xi$ este o mărime de primul ordin de micime și că după (2) avem $y=-l$. Deci $\dot{y}$ și $\ddot{y}$ sînt mărimi de-al doilea ordin de micime. Ecuația (4) devine (5) $l\ddot{x}+(x-\xi)g=0$, sau punînd $x-\xi=u$, avem ecuația oscilațiilor întreținute (6) $\ddot{u}+\frac{g}{l}u=-\ddot{\xi}$; unde în cazul particular din enunț $\xi=a\cos(\omega t+\alpha)$. Avem astfel o problemă cunoscută.

275. *Să se studieze mișcarea pendulului simplu cînd punctul său de suspensie execută o mișcare de translație verticală η, uniform accelerată. Cît este perioada în cazul cînd accelerația punctului de suspensie este $+g$ (accelerația greutății)?*. Se va aplica principiul lui d' A l e m b e r t.

I n d i c a ț i e. Principiul lui d'Alembert ne dă aceeași ecuație (1) ca și problema precedentă. Ecuația de condiție (2) devine însă: $x^2+(y-\eta)^2=l^2$, a cărei variație ne dă (4): $(y-\eta)\ddot{x}-\dot{x}(\ddot{y}+g)=0$. Considerăm pe x ca mărime de primul ordin de micime; atunci pînă la al doilea ordin de micime avem: $y-\eta=-l$, $\ddot{y}=\ddot{\eta}$. Ecuația (4) devine: $\ddot{x}+\frac{\ddot{\eta}+g}{l}x=0$. Pentru $\ddot{\eta}=g$ pendulul oscilează ca și cum accelerația greutății s-ar fi dublat. Pentru $\ddot{\eta}=-g$ acțiunea greutății se anulează: avem principiul echivalenței greutății cu accelerația care împreună cu principiul echivalenței masei grele cu masa inertă stă la baza relativității generale a lui E i n s t e i n (A. Sommerfeld).

276. *Dacă $H=\alpha_1$ este ecuația energiei (H = hamiltoniana și α_1 o constantă) și $\varphi=a_2=$ const este o a doua integrală primă care nu conține timpul t, atunci paranteza Poisson (α_1,α_2) este identic nulă. Dacă*

$$\alpha_2=\varphi-t,\ \textit{atunci}\ (\alpha_1;\alpha_2)=1.$$

I n d i c a ț i e. Aceasta rezultă din ecuația $(H,\alpha)+\frac{d\alpha}{dt}=0$.

277. *O sferă omogenă de masă 1 se rostogolește fără să alunece pe un plan fix perfect aspru, înclinat. Poziția sferei fiind determinată prin distanța q a punctului de contact pînă la un punct fix din plan, să se arate că funcția de acțiune este:*

$$S=\frac{7}{10}\frac{(q-q_0)}{t}+\frac{1}{2}(q+q_0)gt-\frac{5}{168}g^2t^3,$$

unde q_0 este o constantă de integrare (poziția inițială) și g accelerația; momentul inițial $t_0=0$.

I n d i c a ț i e. Avem: $q=q_0+q_1t+\frac{5}{14}gt^2$.

Deci $T=\frac{7}{10}\dot{q}^2$; $U=gq$. Pentru găsirea lui S facem substituțiile indicate în expresia $S=\int_0^t(T+U)dt$. După integrare se elimină constanta q_1.

Scanned with OKEN Scanner

278. *Un punct material M se mişcă fără frecare pe o bară AB, pornind din A fără viteză iniţială. Bara face unghiul constant cu verticala AY (descendentă) şi se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω în jurul lui AY. Să se studieze mişcarea punctului material M prin ecuaţiile lui Lagrange şi aplicînd principiul lui G a u s s (al celei mai mici constrîngeri).*

I n d i c a ţ i e. 1) $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \cdot \omega^2)$; $U = mgr \cos \alpha + h$.

Se scriu ecuaţiile lui L a g r a n g e.

2) $(\ddot{r} \cos \alpha - g)^2 = (\ddot{r} \sin \alpha - r \sin \alpha \cdot \omega^2)^2 + 4\dot{r}^2\omega^2 \sin \alpha$,

căci M este supus acceleraţiilor g, $\ddot{r}$, $r \sin \alpha \cdot \omega^2$, $2\dot{r}\omega \sin \alpha$. Aplicînd condiţia de minim se capătă ecuaţia $\ddot{r} = r \sin^2 \alpha \cdot \omega^2 + g \cos \alpha$.

279. *Un punct de masă m se mişcă pe un meridian pămîntesc. Să se scrie ecuaţiile lui Lagrange şi ale lui Hamilton, ţinînd seamă de mişcarea diurnă.*

I n d i c a ţ i e.

$$x = R \cos \theta \cos \varphi; \quad y = R \cos \theta \sin \varphi; \quad z = R \sin \theta$$

$$T = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta); \quad U = \text{const}.$$

Ecuaţia lui L a g r a n g e devine astfel:

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \sin 2\theta = 0; \quad \ddot{\varphi} = 0.$$

Ecuaţiile lui H a m i l t o n se reduc la expresiile:

$$\theta = q_1, \quad \varphi = q_2 \quad \text{şi} \quad \dot{\theta} = p_1, \quad \dot{\varphi} = p_2. \quad T = \frac{R^2}{2m}(p_1^2 + p_2^2 \cos^2 q_1).$$

Coordonata q_2 este ciclică. Se obţin ecuaţiile precedente.

280. *O bară OA de lungime l şi greutate neglijabilă este articulată în O. De capătul A sînt prinse greutăţile P (direct) şi Q printr-un fir ABC de lungime a (trecut prin inelul fix B; $OB = l$ este orizontală). Greutăţile P şi Q sînt astfel alese încît în poziţia de echilibru triunghiul OAB este echilateral. Să se studieze micile oscilaţii ale sistemului în jurul poziţiei de echilibru.*

I n d i c a ţ i e. Luăm drept axe de coordonate OBx şi normala descendentă $OY \perp OBx$. Punctul A $(x_1 = l \cos \varphi;\ y_1 = l \sin \varphi)$; $C\left(x_2 = l;\ y_2 = a - 2l \sin \frac{\varphi}{2}\right)$ unde $a = ABC$. Funcţia de forţă este:

$$U = Py_1 + Qy_2 = Pl \sin \varphi + Q\left(a - 2l \sin \frac{\varphi}{2}\right).$$

Condiţia de echilibru: $\partial U/\partial \varphi = 0$ ne dă pentru $\varphi = 60°$, $P = Q\sqrt{3}$. Pentru $\varphi = 60° + \theta$, găsim:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{5}{4} Ql\theta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Energia cinetică a sistemului este:

$$E = \frac{1}{2}\frac{P}{g}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}\frac{Q}{g}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2).$$

Se găsește:

$$E = \frac{Q(4\sqrt{3}+3)}{8g} l^2\dot{\theta}^2.$$

Ecuația lui Lagrange ne dă cu aceste date:

$$\ddot{\theta} + \frac{5\sqrt{3}g}{3(4+\sqrt{3})l}\theta = 0.$$

Condiția de posibilitate $\partial^2 u/\partial\varphi^2 < 0$ este îndeplinită.

281. *O greutate P fixată în A este menținută în planul vertical, în echilibru de greutățile Q, atîrnate în C și în C' prin firele ABC și $AB'C'$ (prin inelele fixe B și B', așezate la distanța a de verticala AP). Să se studieze micile oscilații ale sistemului, prin ecuațiiile lui Lagrange.*

Indicație. Funcția de forță se scrie:

$$U = Py_1 + 2Qy_2 = Pa\operatorname{ctg}\alpha + 2Q\left(l - \frac{a}{\sin\alpha}\right),$$

unde $l = ABC = AB'C'$. Energia cinetică devine:

$$E = \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{y}_1^2 + 2\frac{1}{2}\frac{Q}{g}\dot{y}_2^2 = \frac{a^2(P + 2Q\cos^2\alpha_0)\,\dot{\theta}^2}{2g\sin^4\alpha_0}$$

unde α_0 este poziția de echilibru. Ecuația lui Lagrange ne dă:

$$\frac{a^2(P+2Q\cos^2\alpha_0)}{g\sin^4\alpha_0}\ddot{\theta} + \frac{2Qa}{\sin\alpha_0}\theta = 0.$$

Condiția de stabilitate: $\partial^2 U/\partial\alpha_0^2 < 0$ este satisfăcută: $-\frac{2Qa}{\sin^3\alpha_0} < 0$.

282. *Să se studieze micile oscilații ale pendulului dublu format din barele $OA = 2l$ și $BC = l$ articulate în O fix și în B (mijlocul lui OA) și purtînd în extremitățile A și C cîte o masă m. Mișcarea se efectuează în planul vertical.*

Indicație. Luăm ca axe Ox (orizontala) și Oy (verticala descendentă). Avem $A(x_1 = 2l\sin\theta,\ x_1 = 2l\cos\theta)$; $C(x_2 = l\sin\theta, y_2 = l\cos\varphi + l\cos\theta)$. Funcția de forțe

$$U = mgy_1 + mgy_2 = 3mgl\cos\theta + mgl\cos\varphi,$$

ne dă cu aceste expresii:

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = -3mgl\theta; \quad \frac{\partial U}{\partial\varphi} = -mgl\varphi.$$

Energia cinetică se calculează astfel:

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}ml^2(5\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile lui Lagrange se scriu, în aceste condiții:

$$5\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + \frac{3g}{l}\theta = 0; \quad \ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Punem $\theta = h \sin(\omega t + \delta)$; $\varphi = k \sin(\omega t + \delta)$; obținem ecuațiile algebrice:

$$-5h\omega^2 - k\omega^2 + 3\frac{g}{l}h = 0; \quad -h\omega^2 - k\omega^2 + \frac{g}{2l}k = 0.$$

Condiția de compatibilitate ne dă relația:

$$\Delta = 4\omega^4 - 8\frac{g}{l}\omega^2 + \frac{3g^2}{l^2} = 0.$$

Rezultă:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{2l}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{2l}}.$$

Oscilațiile obținute sînt suprapunerea a două oscilații armonice cu perioadele

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}; \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

283. *O bară $AB = 2l$ de masă m este suspendată de un punct fix 0 cu ajutorul firului inextensibil și fără masă $OA = a$. Să se determine micile oscilații în planul vertical.*

Indicație. Este o problemă similară precedentei. $U = mg(l\cos\varphi + a\cos\theta)$. Un punct M situat la distanța r de A are coordonatele

$x = a\sin\theta + r\sin\varphi$; $y = a\cos\theta + r\cos\varphi$. Avem:

$$v_m^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + 2ar\dot{\theta}\dot{\varphi}.$$

Apoi

$$E = \frac{1}{2}\int_0^{2l} \rho\, dr v_m^2 = \frac{1}{2}m\left(a^2\dot{\theta}^2 + \frac{4l^2}{3}\dot{\varphi}^2 + 2al\dot{\theta}\dot{\varphi}\right)$$

Ecuațiile lui Lagrange dau:

$$a\ddot{\theta} + l\ddot{\varphi} + g\theta = 0; \quad \frac{4}{3}l\ddot{\varphi} + a\ddot{\theta} + g\varphi = 0.$$

Cu substituția:

$$\theta = h\sin(\omega t + \delta); \quad \varphi = k\sin(\omega t + \delta)$$

se obțin ecuațiile algebrice:

$$-ah\omega^2 - lk\omega^2 + gk = 0; \quad -\frac{4}{3}lk\omega^2 - ah\omega^2 + gk = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiția de compatibilitate

$$la\omega^4 - g(4l + 3a)\omega^2 + 3g^2 = 0$$

ne dă un rezultat similar problemei precedente.

Mecanica corpului cu masă variabilă

284. *Să se studieze mișcarea unui punct a cărui masă descrește după legea* $m = m_0 e^{-\lambda t}$, *fiind supus acțiunii unei forțe invers proporțională cu masa* $(-k/m)$; *viteza absolută* $\bar{u}$ *a particulei care se detașează din corp, fiind constantă.*

Indicație. Observînd că $\frac{d}{dt} = -\lambda m \frac{d}{dm}$, ecuația se scrie:

$$\frac{d}{dm}\left(m^2 \frac{dr}{dm}\right) = -\frac{u}{\lambda} - \frac{k}{\lambda}\frac{1}{m^2}$$

care se integrează ușor. Se obține $r = a + bt + ce^{2\lambda t}$, cu relațiile: $a + c = r_0$; $b = u/\lambda$; $c = 1/2\, k/m_0\lambda^2$. Condițiile inițiale: $t = 0$, $r = r_0$; $v = v_0$. Rezultă $\lambda = (u - k/m_0)/v_0$.

285. *În mișcarea punctului de masă variabilă după legea* $m = m_0 e^{-\lambda t}$ *facem ipoteza că în afară de acțiunea constantă a greutății, proiectilul mai este solicitat de o forță propulsivă de mărimea* $\frac{1}{2}\lambda^2 mr$. *Să se studieze mișcarea. Condiție inițială* $v_0 = 0$.

Indicație. Ecuația mișcării se scrie $\ddot{\bar{r}} - \lambda\dot{\bar{r}} - \frac{1}{2}\lambda^2\bar{r} = \bar{a}$ (const) unde $\bar{a} = \bar{u}\lambda - \bar{g}\lambda^2$; $g =$ accelerația greutății. Sub condiția $v_0 = 0$, traiectoria este rectilinie. Se găsește $r = R + v_0 te^{\lambda t/2}$, unde R este raza pămîntului.

286. *Să se studieze mișcarea punctului de masă variabilă după legea* $m = m_0 - \mu t$, *presupunînd greutatea constantă; viteza absolută a particulelor detașate, de masă* μ, *să fie constantă* $\bar{u}$ (G. Lampariello).

Indicație. Facem ecuația $\tau = m/\mu$; $\tau_0 = m_0/\mu$. Apoi $\tau = \tau_0 - t$. Ecuația de mișcare (§ 34) devine:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\tau \frac{dr}{d\tau}\right) = u + g\tau.$$

Condiții inițiale: $t = 0$, $r = R$ (raza pămîntului) $v_0 = 0$. Notînd cu $\alpha = u - \frac{1}{2}g\tau_0$, se găsește:

$$r(t) = R - \alpha t - \frac{1}{4}g - \alpha\tau_0 \lg \frac{\tau_0 - t}{\tau_0};$$

sau dezvoltînd:

$$r(t) = R + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\tau} - g\right)^2 + \frac{\alpha}{3\tau_0^3}t^3 + \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

287. *Să se trateze problema* 159, *admiţînd că masa corpului variază cu timpul*, $m = m(t)$.

Indicaţie. Se obţine o ecuaţie de tip Riccati integrabilă prin cuadraturi în cazul $B = C$ (v. problema 159). Să se studieze cazurile: $m = m_0/t$ şi $m = m_0 \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, unde m_0, v, c sînt constante.

288. *O picătură sferică de apă cade, în virtutea greutăţii, fără frecare, într-o atmosferă de vapori de apă saturaţi. La începutul mişcării* ($t = 0$) *raza picăturii este* $r = c$ *şi viteza sa* $v = v_0$. *Din cauza condensării, masa picăturii se măreşte în mod continuu, creşterea fiind proporţională cu suprafaţa, ceea ce înseamnă o creştere a razei proporţională cu timpul. Să se integreze ecuaţia diferenţială a mişcării, luîndu-se* r (în loc de t) *ca variabilă independentă şi să se arate că pentru* $c = 0$ *viteza creşte uniform cu timpul* (A. Sommerfeld).

Indicaţie. Luînd densitatea egală cu 1, masa picăturii este $m = \frac{4\pi}{3} r^3$; deci $dm = 4\pi r^2 dr$. Însemnînd cu α factorul de condensare, $dm = 4\pi r^2 \alpha\, dt$, deci $dr = \alpha\, dt$. Ecuaţia diferenţială este $\alpha \frac{d}{dr}(r^3 v) = r^3 g$. Integrată cu condiţiile iniţiale ($v = v_0$, $r = c$) ne dă:

$$v = \frac{g}{\alpha}\frac{r}{4} + \frac{c^3}{r^3}\left(v_0 - \frac{g}{\alpha}\frac{c}{4}\right).$$

289. *Să se scrie ecuaţia de mişcare a punctului de masă variabilă sub acţiunea unei forţe proporţionale cu masa,* $\overline{F} = m\overline{a}$.

Indicaţie. Se va folosi ecuaţia (1.2′) § 398, unde se va pune $\overline{w} = -\dot{w}\overline{t}$ şi $m = m_0 f(t)$. Se obţine $\dot{\overline{v}} = \overline{a} - w\overline{t}\ln f(t)$ sau, cu $\psi(t) = \ln f(t)$ rezultă $\dot{\overline{v}} = a - w\dot{\psi}(t) \cdot \overline{t}$.

290. *Să se arate că în cazul cînd masa corpului variază liniar cu timpul, forţa reactivă este constantă; în cazul variaţiei exponenţiale a masei, acceleraţia corespunzătoare forţei reactive este constantă. Se va presupune că viteza relativă* $\overline{w}$ *este constantă.*

Indicaţie. a) $f(t) = 1 - \alpha t$, unde $\alpha t \leqslant t$ şi $\alpha > 0$. Rezultă $-\frac{dm}{dt} = \alpha m_0 = \text{const}$, şi forţa reactivă $\Phi_r = -\frac{dm}{dt} w = \alpha m_0 w = \text{const}$; b) $f(t) = e^{-\alpha t}$, unde $\alpha > 0$. Rezultă $\Phi_r = \alpha m_0 w e^{-\alpha t}$, aşadar $a_r = \frac{1}{m}\Phi_r = \alpha w = \text{const}$. Coeficientul α este consumul specific.

291. *Să se studieze mişcarea verticală a unui punct material cu masă variabilă, ţinînd seama de greutate şi de rezistenţa mediului. Se va lua* $m = m_0(1 - \alpha t)$, *cu* $\alpha > 0$, *şi rezistenţa mediului egală cu* $-\varkappa\overline{v}$.

Indicaţie. Ecuaţia lui Mescerski pe segmentul activ devine în acest caz, însemnînd cu w viteza relativă:

$$m_0(1 - \alpha t)\dot{v} = -m_0(1 - \alpha t)g - \varkappa v + \alpha m_0 w,$$

Scanned with OKEN Scanner

care integrată ne dă

$$v = e^{-\int \frac{k dt}{1-\alpha t}} \left[C + \int \left(\frac{\alpha w}{1-\alpha t} - g \right) e^{\int \frac{k dt}{1-\alpha t}} dt \right]$$

unde am pus $k = \varkappa / m_0 g$, iar C este o constantă de integrare. Luînd condițiile inițiale: $t = 0$, $v = v_0$ și efectuînd integralele care figurează se obține:

$$v = \left(v_0 - \frac{g}{\alpha - k} - \frac{\alpha w}{k} \right) (1 - \alpha t)^{k/\alpha} + \frac{g(1-\alpha t)}{\alpha - k} + \frac{\alpha w}{k}.$$

Integrînd încă o dată aflăm arcul de traiectorie:

$$s = \frac{\alpha w}{k} t + \frac{g}{2\alpha(\alpha - k)} [1 - (1 - \alpha t)^2] + \frac{1}{\alpha + k} \left(v_0 - \frac{g}{\alpha - k} - \frac{\alpha w}{k} \right) \left[1 - (1 - \alpha t)^{1 + \frac{k}{\alpha}} \right].$$

292. *În problema precedentă să se calculeze înălțimea maximă la care se ridică punctul și timpul de ascensiune (maxim).*

Indicație. Trebuie dedusă legea de mișcare și viteza pe segmentul pasiv al mișcării. Ecuația pentru segmentul pasiv este $m_s \dot{v} = -m_s g - \varkappa v$, unde m_s înseamnă masa la sfîrșitul segmentului activ. Punînd $m_s / m_0 = f_s$ ecuația precedentă devine: $\dot{v} + \frac{k}{f_s} v + g = 0$ unde $k = \varkappa / m_0$. Se integrează cu condițiile inițiale: la sfîrșitul perioadei de evacuare a particulelor avem: $t = t_1$ și $v = v_1$. Se obține:

$$v = \left(v_1 + \frac{g f_s}{k} \right) e^{-\frac{k}{f_s}(t - t_1)} - \frac{g f_s}{k}$$

și pentru înălțime:

$$s = -\left(\frac{f_s v_1}{k} + \frac{g f_s^2}{k^2} \right) e^{-\frac{k}{f_s}(t - t_1)} - \frac{g f_s}{k} t + C;$$

constanta de integrare C determinîndu-se prin condiția ca pentru $t = t_1$ să avem $s = s_a$ la sfîrșitul segmentului activ al traiectoriei. Rezultă:

$$s - s_a = \left(\frac{f_s v_1}{k} + \frac{f_s^2}{k^2} g \right) \left[1 - e^{-\frac{k}{f_s}(t - t_1)} \right] \frac{g f_s}{k} (t - t_1).$$

Timpul de ascensiune total se obține adunînd t_1 (pe segmentul activ, dedus din relația $f_s = (1 - \alpha t_1)$ cu timpul t_p (de pe segmentul pasiv aflat făcînd $v = 0$). Rezultă:

$$t = t_1 + \frac{f_s}{k} \ln \left(1 + \frac{v_1 k}{g f_s} \right).$$

Calculăm apoi pe $s = s_a + s_p$. Coeficientul de consum specific α se află eliminînd t_1 între ecuațiile care dau pe $s - s_a$ și pe t.

Scanned with OKEN Scanner

293. *Să se reducă problema mişcării unui punct cu masă variabilă într-un cîmp central, la problema mişcării unui punct cu masă constantă, printr-o schimbare de variabile.*

Indicaţie. Se fac substituţiile: $\xi = f_1(t)\,x$, $\eta = f_1(t)\,y$, $\zeta = f_1(t)\,t$, $d\tau = \varphi_1(t)\,dt$, unde f_1 şi φ_1 sînt funcţii arbitrare de timp a căror legătură cu legea de variaţie a masei se determină din condiţiile de reducere anunţată. Se calculează $d\xi/d\tau$, $dy/d\tau$ şi $dz/d\tau$, precum şi $d^2\xi/d\tau^2$ etc. Din ecuaţiile diferenţiale ale mişcării se deduc x, $\dot{x}$ şi $\ddot{x}$, în funcţie de noile variabile şi derivatele lor prin raport cu τ. Valorile astfel obţinute se introduc în ecuaţiile diferenţiale pentru ξ, η, τ. De exemplu:

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = \ddot{x}\frac{f_1}{\varphi_1^2} + \frac{d\xi}{d\tau}\left[\frac{2}{f_1\varphi_1}\dot{f}_1 - \frac{\dot{\varphi}_1}{\varphi_1^2}\right] + \frac{\xi}{f_1^2\varphi_1^2}\left[f_1\ddot{f}_1 - 2\dot{f}_1^2\right]; \text{ etc.}$$

294. *Să se aplice metoda precedentă la cazul cînd masa este crescătoare şi variază după legea* $m = m_0/(1 - \alpha t)$, *considerînd viteza absolută a particulelor captate egală cu zero* ($\bar{u} = 0$).

Indicaţie. Ecuaţia de mişcare este $m\dot{v} = -\frac{kmr}{r^3} - \dot{m}v$. Se arată că traiectoria este o curbă plană. Luăm axele x, y în acest plan. Ecuaţia precedentă devine:

$$\ddot{x} = -\frac{kx}{r^3} - \frac{\alpha}{1-\alpha t}\dot{x}; \quad \ddot{y} = -\frac{ky}{r^3} - \frac{\alpha}{1-\alpha t}\dot{y},$$

unde $r^2 = x^2 + y^2$. Facem transformarea: $\xi = \frac{x}{(1-\alpha t)^2}$; $\eta = \frac{y}{(1-\alpha t)^2}$, $d\tau = \frac{dt}{(1-\alpha t)^2}$. Ecuaţiile precedente devin:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = -\frac{k\xi}{\rho^3}; \quad \frac{d^2\eta}{d\tau^2} = -\frac{k\eta}{\rho^3}$$

unde $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$. Avem astfel ecuaţiile de mişcare ale unui punct cu masă constantă.

Integrala ariilor devine:

$$r^2\dot{\theta} = C\frac{1-\alpha t}{m_0} = C_1(1 - \alpha t).$$

Integrala energiei ne dă:

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 = \frac{2k}{\rho} + h.$$

295. *Să se studieze mişcarea plană (coordonate polare* r, θ) *a unui punct de masă* m *atras de forţa elastică* $2\alpha r$ *spre punctul fix* $r = 0$, *aplicînd ecuaţiile lui Lagrange în cazul mişcării relativiste. Să se scrie ecuaţia diferenţială a traiectoriei* (I. P.).

Indicaţie. Problema reprezintă extinderea la mişcarea relativistă a problemelor clasice (229, 230). Se scriu ecuaţiile lui Lagrange luînd ca potenţial cinetic relativist expresia:

$$H = -mc^2\sqrt{1-\beta^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde: $\beta^2 = \frac{1}{c^2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$. Ecuațiile mișcării sînt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{r}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) - \frac{m_0 r\dot{\theta}^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2\alpha r; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 r^2\dot{\theta}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = 0.$$

Prin transformări simple se obține ecuația diferențială a traiectoriei sub forma:

$$\frac{dr}{d\theta} = r\sqrt{\frac{r^2}{a^2c^2}(\alpha r^2 - h)^2 - \frac{c^2 m_0^2}{a^2}r^2 - 1},$$

unde a = constanta ariilor, iar h = constanta energiei;

$$h = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{q_0^2}{c^2}}} + \alpha r_0^2.$$

Înlocuind pe h prin valoarea precedentă, se obține:

$$\frac{dr}{d\theta} = r\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2c^2}r^6 - \frac{2\alpha m_0}{a^2\sqrt{1-\frac{q_0^2}{2}}}r^4 + \left(\frac{\alpha^2 r_0^4 + 2\alpha r_0^2}{c^2} + \frac{2\alpha m_0 r_0^2}{\sqrt{1-\frac{q_0^2}{c^2}}} + \frac{m_0^2c^2}{1-\frac{q_0^2}{c^2}} - m_0^2c^2\right)\frac{r^2}{a^2} - 1}.$$

296. *În problema precedentă să se analizeze*: 1) *între ce valori poate varia* r *și* θ?; 2) *cît crește* θ *cînd* r *străbate o dată toate valorile posibile*? (I. P.).

Indicație. 1) Facem aceleași substituții ca și în cazul problemelor clasice. Ecuația traiectoriei se scrie:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 2\sqrt{A\rho^3 - B\rho^2 + C\rho - 1}.$$

Ecuația: $A\rho^3 - B\rho^2 + C\rho - 1 = 0$ are trei rădăcini reale, ceea ce se stabilește cu ajutorul teoremei lui Rolle. Fie ordinea de succesiune: $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Fiind vorba de atracție, problema nu are sens fizic decît pentru $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$. Deci,

$$\sqrt{\rho_1} \leqslant +r \leqslant \sqrt{\rho_2}; \quad -\sqrt{\rho_2} \leqslant r \leqslant -\sqrt{\rho_1}.$$

Se vede că θ este mereu crescător, expresia vitezei păstrînd semnul, în intervalul considerat.

2) Făcînd substituția:

$$\rho - \rho_3 = -(\rho_3 - \rho_2)z^2$$

se obține:

$$\theta = \int \frac{dz}{(z^2 - z_1^2)\sqrt{(1-z)^2(1-k^2z^2)}}$$

unde $z_1^2 = \rho_3/(\rho_3 - \rho_2)$; $k^2 = (\rho_3 - \rho_2)/(\rho_3 - \rho_1) < 1$. Avem o integrală eliptică. Punem: $z = \operatorname{sn} u$; $z_1 = \operatorname{sn} \alpha$. Rezultă $\frac{d}{du}(\operatorname{sn} u) = \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u$, sau încă:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{k^2 \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha \cdot \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2 u} \frac{1}{\operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u}$$

Cum $d\theta/dr \to \infty$, pentru $r = \sqrt{\rho_1}$, $\sqrt{\rho_2}$, rezultă că și $d\theta/dz \to \infty$ pentru valorile corespunzătoare z' și z''. Dar $\operatorname{sn} u$ nu poate fi infinit; rezultă că: ori $\operatorname{cn} u$, ori $\operatorname{dn} u$ tinde la zero pentru $z=z'$, z'', respectiv $u = u'$, u''. Dacă ne menținem la perioadele reale, $\operatorname{cn} u$ și $\operatorname{dn} u$ se anulează în aceleași timp numai cînd u variază cu $2K$, unde K este definit prin integrala:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

Se obține: $$2K = \pi \pm \frac{\pi}{4}(1 - k^2).$$

Cînd r variază de la $\sqrt{\rho_1}$ pînă la $\sqrt{\rho_2}$ și înapoi, θ crește cu $4K$, așadar, cu: $2\pi \pm \frac{\pi}{2}(1 - k^2)$.

297. *Să se studieze, prin teoria relativității restrînse, mișcarea unui punct de masă m și încărcare electrică e, sub influența unui cîmp electric constant* E (I. P.).

Indicație. Ecuațiile mișcării sînt: $\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\dot{x}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = eE$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\dot{y}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = 0$, unde $\beta^2 = \frac{1}{c^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$. Condiții inițiale: $t = 0$, $x = y = 0$; $\dot{x}_0 = u$; $\dot{y}_0 = v$; $\beta_0^2 c^2 = u^2 + v^2$. Înmulțind prima ecuație cu $\dot{x}$ și a doua cu $\dot{y}$ și adunînd, obținem ecuația energiei: $m_0c^2/\sqrt{1-\beta^2} = eEx + U$; unde $U = m_0c^2/\sqrt{1-\beta^2}$. Integrarea ecuațiilor mișcării se poate efectua în două moduri: 1) prin folosirea timpului propriu; 2) prin metoda directă.

1) $d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$. Se obține:

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = \frac{e^2E^2}{m_0^2c^2}x^2 + \frac{2eEU}{m_0^2c^2}x + A; \quad \left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 = B.$$

Condițiile inițiale dau:

$$u_0^2/(1 - \beta_0^2) = A; \quad v_0^2/(1 - \beta_0^2) = B.$$

Continuînd integrarea, obținem:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{e^2E^2}{m_0^2c^2}x^2 + \frac{2eEU}{m^2c^2}x + \frac{u_0^2}{1-\beta_0^2}}} = \tau + \text{const}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde se deduce ecuația traiectoriei:

$$eEx + U = u\left[\left(1 + \frac{u_0}{c}\right)e^{\frac{eEc}{Uv_0}y} + \left(1 - \frac{u_0}{c}\right)e^{\frac{-eEc}{Uv_0}y}\right]. \qquad (1)$$

2) Prin integrarea directă avem:

$$\dot{x}(eEx + U) = eEc^2t + A;\ \dot{y}(eEx + U) = B;\ A = Uu_0;\ B = Uv_0.$$

Se obține ecuația traiectoriei, sub forma:

$$x = \frac{1}{eE}\left[-U + \sqrt{e^2E^2c^2t^2 + 2Uu_0eEt + U^2}\right]; \qquad (2)$$

$$y = \frac{Uv_0}{eEc}\ln\frac{eEct + Uu_0/c + \sqrt{e^2E^2c^2t^2 + 2Uu_0Et + U^2}}{u\left(1 + \frac{u_0}{c}\right)}$$

Se verifică ușor prin eliminarea lui t între cele două ecuații (2), că se obține ecuația (1), care este un lănțișor.

298. *Să se compare traiectoria clasică a mișcării punctului de masă m și încărcarea e sub acțiunea cîmpului electric constant E, cu traiectoria relativistă obținută în problema precedentă. Pe care din cele două traiectorii punctul necesită mai mult timp pînă ajunge la locul de întretăiere a celor două traiectorii?* (I.P.)

I n d i c a ț i e. Problema clasică ne-a dat parabola:

$$x = \frac{eE}{2m_0v_0^2}y^2 + \frac{u_0}{v_0}y.$$

Se obține:

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{rel.} = \frac{eEc^2t + Uu_0}{Uv_0};\quad \left(\frac{dx}{dy}\right)_{cl.} = \frac{\frac{eEU}{m_0}t + Uu_0}{Uv_0};$$

deci:

$$eEUv_0\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)_{rel.} - \left(\frac{dx}{dy}\right)_{cl.}\right] = e^2E^2c^2t_{rel.} - \frac{e^2E^2U}{m_0}t_{cl.},$$

unde:

$$e^2E^2c^2t_{rel.} = -eEUu_0 + \sqrt{\varphi};\quad \frac{e^2E^2u}{m_0}t_{cl.} = -eEuu_0 + \sqrt{\psi}$$

punînd:

$$\varphi = eE^2U^2u_0^2 + e^2E^2c^2(e^2E^2x^2 + 2UeEx);\quad \psi = e^2E^2U^2u_0^2 + \frac{2e^3E^3U^2}{m_0}x.$$

Rezultă:

$$eEUv_0\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)_{rel.} - \left(\frac{dx}{dy}\right)_{cl.}\right] = \frac{e^3E^3c^2}{\sqrt{\varphi} + \sqrt{\psi}}\left[eEx + 2U\left(\frac{U}{m_0c^2} - 1\right)\right]x.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar:

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{rel.} - \left(\frac{dx}{dy}\right)_{cl.} \begin{cases} < 0 \text{ pentru } 0 < x < \dfrac{2U}{eE}\left(\dfrac{U}{m_0c^2} - 1\right) \\ = 0 \text{ pentru } x = \dfrac{2U}{eE}\left(\dfrac{U}{m_0c^2} - 1\right) \\ > 0 \text{ pentru } x > \dfrac{2U}{eE}\left(\dfrac{U}{m_0c^2} - 1\right) \end{cases}$$

Prin urmare: la începutul mişcării există un domeniu în care curba relativistă se află deasupra parabolei clasice, apoi trece dedesubt; de unde rezultă că cele două curbe se taie într-un punct care este rădăcină a ecuaţiei transcendente:

$$u\left[\left(1+\frac{u_0}{c}\right)e^{\frac{eEc}{Uv_0}y} + \left(1-\frac{u_0}{e}\right)e^{-\frac{eEc}{Uv_0}y}\right] = \frac{e^2E^2}{2m_0v_0^2}y^2 + \frac{eEu_0}{v_0}y + U.$$

Comparînd $t_{rel.}$ şi $t_{cl.}$ se constată că $t_{rel.} > t_{cl.}$ pentru $x > c$.

299. *Un punct material, încărcat electric, supus acţiunii unui cîmp magnetic omogen, se mişcă, după teoria relativităţii, pe un cerc. Să se deducă, cu ajutorul transformărilor lui Lorentz, mişcarea punctului într-un cîmp magnetic omogen $\overline{H}$ suprapus unui cîmp electric $\overline{E} \perp \overline{H}$, sub condiţia $E < H$.* (I. P.)

Indicaţie. Forţa care solicită punctul în sistemul de referinţă în repaus, S_0, este $K = \frac{e}{c}\overline{q} \times \overline{H}$, unde $\overline{q}$ este constantă întrucît forţa $\overline{K}$ este perpendiculară pe $\overline{q}$. Ecuaţiile mişcării sînt:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q_0^2}{c^2}}}\ddot{x}_0 = \frac{e}{c}H_0\dot{y}_0; \quad \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q_0^2}{c^2}}}\ddot{y}_0 = -\frac{e}{c}H_0\dot{x}_0.$$

Punînd:

$$\frac{e}{m_0c}\sqrt{1-\frac{q_0^2}{c^2}} \cdot H_0 = A \text{ (const)}$$

şi integrînd ecuaţiile precedente, obţinem:

$$x_0 = \frac{m_0cq_0}{eH_0}\sin\left(\frac{eH_0}{m_0c}t_0\right); \quad y_0 = \frac{m_0cq_0}{eH_0}\cos\left(\frac{eH_0}{m_0c}t_0\right), \tag{1}$$

care este un cerc cu centrul în origine şi raza m_0cq/eH_0.

Transformările lui Lorentz pentru cîmpul electric şi magnetic sînt:

$$E_x = E_x^0; \qquad H_x = H_x^0;$$

$$E_y = \gamma\left(E_y^0 - \frac{v}{c}H_z^0\right); \qquad H_y = \gamma\left(H_y^0 + \frac{v}{c}E_z^0\right);$$

$$E_z = \gamma\left(E_z^0 - \frac{v}{c}H_y^0\right); \qquad H_z = \gamma\left(H_z^0 - \frac{v}{c}E_y^0\right);$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. În sistemul în repaus avem:

$$E_x^0 = E_y^0 = E_z^0 = 0; \quad H_x^0 = H_y^0 = 0; \quad H_z^0 = H_0,$$

alegînd direcţia lui $\overline{v}$ drept axă de x. În sistemul care se mişcă, avem $E_x = E_z = 0$, $E_y = E$; $H_x = H_y = 0$; $H_z = H$, căci cîmpurile sînt ortogonale. Rezultă :

$$\overline{E} = -\gamma\frac{v}{c}\overline{H}_0; \quad \overline{H} = \gamma\overline{H}_0; \quad \text{deci}\ \frac{v}{c} = -\frac{E}{H},$$

relaţie care are sens numai în condiţia (admisă) $E < H$.

Făcînd substituţiile indicate în ecuaţiile (1) găsite pentru sistemul în repaus, deducem pentru sistemul în mişcare:

$$\begin{aligned} x\sqrt{1-\frac{E^2}{H^2}} &= \frac{m_0cq}{eH_0}\sin\left(\frac{eH_0}{m_0c}t_0\right) + \frac{E}{H}ct_0 \\ y &= \frac{m_0cq}{eH_0}\cos\left(\frac{eH_0}{m_0c}t_0\right); \end{aligned} \tag{2}$$

care reprezintă ecuaţia traiectoriei punctului în sistemul din repaus, dacă punctul ar fi solicitat de cele două cîmpuri perpendiculare între ele $\overline{E}$ şi $\overline{H}$. Studiul traiectoriei (2) se face calculînd dy/dx şi d^2y/dx^2 şi formînd tabloul valorilor t_0, x, y şi al derivatelor lor. Curba are în $t_0 = 0$; $\frac{m_0c}{eH_0}\pi$; $\frac{m_0c}{eH_0}2\pi$ etc.; tangente paralele cu axa de x, iar în punctele:

$$t_0 = \frac{m_0c}{eH_0}\frac{\pi}{2}; \quad \frac{m_0c}{eH_0}\frac{3\pi}{2}; \ \text{etc.}$$

puncte de inflexie, în care curba are aceeaşi înclinare faţă de axa x. Curba este deci o sinusoidă. Cum

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{E^2}{H^2}}} + \frac{E}{Hc\sqrt{1-\frac{E^2}{H^2}}}\frac{m_0cq}{eH_0}\sin\left(\frac{eH_0}{m_0c}t_0\right),$$

rezultă $t > t_0$; punctul se mişcă mai încet în sistemul al doilea decît în primul.

300. *Să se calculeze, prin teoria relativităţii restrînse, avansarea perihe-liei planetei Mercur, sub acţiunea cîmpului newtonian.*

Indicaţie. Problema revine la calculele efectuate în § 138, în mare parte. Avem integralele prime: (1) $mr^2\dot{\theta} = p$ (integrala ariei); şi (2) $(m - m_0)c^2 - \frac{\lambda m}{r} = E$ (integrala energiei).

Scanned with OKEN Scanner

Punem $\lambda = fM$ (f = const gravitației; M = masa soarelui); (3) $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$, masa variabilă a planetei; $\beta^2 = v^2/c^2$. În locul ecuației (22) § 138 se găsește, prin derivarea ecuației (2): $(1-\varepsilon u)\frac{\beta-\beta'}{1-\beta^2} = c^2u'$, unde am pus $\frac{1}{r} = u$; $\frac{\lambda}{c^2} = \varepsilon$, accentul indicînd derivarea în raport cu θ. Ecuația (21) § 138 rămîne neschimbată. Din ecuația (2) se obține

$$\frac{(1-\varepsilon u)^2}{1-\beta^2} - k^2 = \left(\frac{E+m_0c^2}{m_0c^2}\right)^2.$$

Ecuația lui Binet se scrie:

$$u'' + u = \frac{\varepsilon k_1^2}{(1-u)^3}; \text{ sau } u'' + u = \varepsilon k_1^2(1+3\varepsilon u),$$

unde am pus $k_1 = \frac{km_0c^2}{p}$; sau, în definitiv: $u'' + (1-3\varepsilon^2k_1^2)u = \varepsilon k_1^2$. Punînd $\varepsilon k_1^2 = 1/a(1-e^2)$; obținem

$$\frac{\delta\theta}{\theta} = \frac{3}{2}\varepsilon^2k_1^2 = \frac{3}{2}\frac{fM}{c^2a(1-e)^2}$$

care este exact o jumătate din valoarea care se obține prin teoria relativității generale (43″ pe secol).

Scanned with OKEN Scanner

Anexa I

Elemente de calcul vectorial

1. **Mărimi fizice şi mărimi matematice.** Studiul fenomenelor naturii urmăreşte descoperirea relaţiilor existente între anumite mărimi fizice care caracterizează numitele fenomene. Aceste relaţii naturale sînt transcrise sub formă de relaţii matematice între mărimile matematice corespunzătoare mărimilor fizice considerate. Pentru aceasta însă, este necesar ca mărimile utilizate să fie *măsurabile*, ceea ce este cazul cu mărimile folosite în diversele mecanici.

2. **Mărimi scalare, vectoriale, tensoriale.** Mărimile scalare sînt mărimile aritmetice (numere), cum şi mărimile complexe a căror măsură se poate exprima printr-un singur număr concret cu valori reale. Fiind fixate unităţile de măsură, mărimea scalară este complet determinată printr-un număr real unic a cărui valoare depinde la scara aleasă (masă, temperatură, volum etc.).

Proprietatea fundamentală a mărimilor scalare este că valoarea lor nu depimde de sistemul de referinţă ales; ele sînt invariante la transformările admise pentru sistemele de referinţă în spaţiul care este sediul fenomenelor fizice studiate.

Dacă unei mărimi scalare îi asociem *o orientare* dată printr-o direcţie (o dreaptă) şi un *sens*, avem un *vector* (viteză, acceleraţie, forţă). În fizică se introduc mărimi mai complicate numite *tensori* (care apar în reprezentarea tensiunilor, forţelor superficiale, momentele de inerţie etc.).

3. **Spaţiile mecanicii newtoniene.** Mecanica fiind o ştiinţă care studiază fenomenele naturii macroscopice localizate în spaţiul înconjurător, tratarea teoretică a problemelor puse necesită o reprezentare spaţială a mărimilor fizice şi deci o definire a spaţiului corespunzător. Spaţiul fizic al mecanicii newtoniene este *spaţiul euclidian cu trei dimensiuni*.

Multe imagini fizice necesită şi o reprezentare într-un spaţiu euclidian cu un număr oarecare, *finit*, de dimensiuni, cum apare în mecanica analitică prin introducerea *spaţiului fazelor*, care este un spaţiu *afin*.

Teoria relativităţii restrînse foloseşte un spaţiu pseudoeuclidian cu patru dimensiuni (trei spaţiale şi una temporală); iar teoria relativităţii generală foloseşte spaţiul riemmanian.

În cele ce urmează folosim spaţiul euclidian, — deci, un spaţiu afin normat şi complet în care s-a introdus o metrică a cărei formă se poate re-

Scanned with OKEN Scanner

reduce la *teorema lui Pitagora* printr-o transformare liniară de variabile. Se poate defini deci valoarea unei distanțe dintre două puncte așezate la depărtare finită, precum și valoarea unui unghi făcut de două direcții. Operația de măsurare se poate efectua în toate direcțiile cu *aceeași* unitate de măsură.

4. **Segment orientat.** Un segment $\overline{AB}$ căruia i se fixează o orientare: de la A spre B și se notează prin $\overrightarrow{AB}$ se numește segment orientat. El poate figura un vector în anumite reprezentări (pentru vectorul localizat pentru care se fixează și punctul de aplicație).

5. **Vector euclidian.** Obiectul geometric definit, într-un spațiu euclidian, prin: 1) *valoare absolută* (modul); 2) *direcție* și 3) *sens* poartă numele de vector liber (notat prin $\bar{a}$, $\bar{\alpha}$, sau $\overrightarrow{AB}$).

Dacă i se specifică punctul de aplicație, devine un *vector legat* sau *localizat*, iar dacă poate aluneca pe dreapta sa suport, avem un vector *alunecător*.

Vectorul cu valoare absolută egală cu unitatea este un vector *unitar*. Se numește *versor* al unui vector dat, vectorul unitar care are aceeași direcție și sens cu vectorul dat.

6. **Adunarea vectorilor.** Vectorii liberi se adună după regula paralelogramului (fig. 88): rezultanta este vectorul care închide un contur poligonal construit cu vectorii componenți dați:

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c} \tag{I.1}$$

astfel încît:

$$\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$$

și

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\bar{a}, \bar{b}). \tag{I.2}$$

Adunarea se poate extinde la un număr oarecare finit de vectori. Rezultatul adunării se numește vector rezultant sau *rezultantă*.

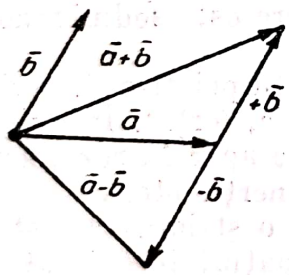

Fig. 88

7. **Scăderea vectorilor.** Diferența geometrică a doi vectori se definește prin relația evidentă (v. fig. 88) de adunare:

$$\bar{c} = \bar{a} + (-\bar{b}) \tag{I.3}$$

înțelegînd prin $-\bar{b}$ vectorul de sens contrar lui $+\bar{b}$, adică:

$$+\bar{b} + (-\bar{b}) = \bar{0}.$$

8. **Multiplicarea unui vector cu un scalar.** Produsul unui vector $\bar{a}$ cu un număr real $\alpha \neq 0$:

$$\alpha\bar{a} = \bar{a}\alpha,$$

este un vector având valoarea absolută $|\alpha|\,a$, aceeași direcție cu $\bar{a}$ și același sens sau sens contrar lui $\bar{a}$ după cum $\alpha > 0$ sau $\alpha < 0$.

În particular,

$$1\,\bar{a} = \bar{a}; \qquad (-1)\,\bar{a} = -\bar{a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tot prin definiție:

$$0\bar{a} = \bar{0}; \quad \alpha\bar{0} = \bar{0}.$$

Împărțirea unui vector $\bar{a}$ cu un număr diferit de zero se reduce la înmulțirea vectorului cu inversul scalarului:

$$\frac{\bar{a}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\bar{a}.$$

9. **Propozițiile fundamentale ale calculului vectorial.** Legile de adunare (respectiv scădere) și multiplicare, dezvoltate mai sus, pot să fie prezentate drept fundament axiomatic al calculului vectorial. Ele sînt cuprinse în propoziții fundamentale pentru mărimile extensive. Le rezumăm în tabloul următor:

1. Fiind dați doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$, există un vector $\bar{a} + \bar{b}$;
2. Fiecărui vector $\bar{a}$ și unui scalar real α le corespunde un vector $\alpha\bar{a}$;
3. Există un vector $\bar{0}$ (vector nul) astfel încît, pentru orice vector $\bar{a}$ să avem $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$;
4. Fiind dat vectorul $\bar{a}$ există un vector $(-\bar{a})$ astfel încît $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$.
5. $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$; $0\bar{a} = \bar{0}$.

Adunarea este comutativă: $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$

Adunarea este asociativă: $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$;

Înmulțirea cu un număr este comutativă: $\alpha\bar{a} = \bar{a}\alpha$;

Înmulțirea cu un număr este asociativă: $\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$;

Înmulțirea cu un număr este distributivă: $(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$;

Din $\alpha\bar{a} = \bar{0}$, rezultă, ori $\alpha = 0$, ori $\bar{a} = \bar{0}$.

6. Axioma dimensională, va fi formulată mai tîrziu (§ 12).

10. **Exprimarea unui vector cu ajutorul versorului său.**

Avem:

$$\bar{a} = a\bar{u} \tag{I.4}$$

de unde:

$$\bar{u} = \frac{\bar{a}}{a} \tag{I.5}$$

notație folosită adesea în calculele din mecanică.

11. **Componenta unui vector pe o direcție orientată.** Dacă direcția este definită prin vectorul unitar $\bar{s}$, componenta vectorului $\bar{a}$ pe această direcție este:

$$a_s = a \cos(\bar{a}, \bar{s}). \tag{I.6}$$

În cazul a mai mulți vectori (poligon vectorial) se aplică legea proiecțiilor.

12. **Descompunerea vectorilor.** Într-un spațiu euclidian cu n dimensiuni se pot găsi n (și nu mai multe) direcții independente $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_n$; astfel

încît vectorul $\bar{a}$ se poate reprezenta cu ajutorul teoremei proiecțiilor prin relația (*axioma dimensională*):

$$\bar{a} = \sum \bar{\alpha}_i \bar{s}_i. \tag{I.7}$$

13. **Sisteme de referință. Bază. Sistem de coordonate.** Cele n direcții independente în spațiul euclidian n dimensional duse prin același punct, alcătuiesc un sistem de referință, numit și *bază* (dacă vectorii fundamentali pot să nu fie unitari), sau sistem de coordonate (cu vectorii fundamentali unitari).

În spațiul euclidian cu trei dimensiuni, existența unui sistem cartezian drept sistem de coordonate cu vectorii fundamentali $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, conduce la reprezentarea:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}. \tag{I.8}$$

14. **Produsul scalar.** Prin definiție, produsul scalar a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este scalarul:

$$\bar{a}\,\bar{b} = ab\,\cos(\bar{a}, \bar{b}) \tag{I.9}$$

cu proprietățile bine cunoscute. Produsul este nul dacă vectorii sînt perpendiculari.

Formula (I.9) permite a se scrie ușor componenta pe o direcție $\bar{s}$:

$$a_s = a_x\,\cos(\bar{i}, \bar{s}) + a_y\,\cos(\bar{j}, \bar{s}) + a_z\,\cos(\bar{k}, \bar{s}) \tag{I.10}$$

care constituie de fapt un criteriu de recunoaștere a caracterului vectorial al unei mărimi orientate.

Expresia analitică a produsului scalar este, evident:

$$\bar{a}\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \tag{I.11}$$

ceea ce se obține cu ușurință.

Proprietățile produsului scalar:

1. Produsul scalar este comutativ: $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$;
2. Produsul scalar este distributiv: $(\bar{a} + \bar{b})\,\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$;
   $\bar{a}\,(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$;
3. Produsul printr-un număr este distributiv: $\alpha\bar{a} \cdot \bar{b} = \alpha \cdot \bar{a}\bar{b}$.

Posibilitatea ca într-un spațiu liniar afin, cu un număr finit de dimensiuni, să se poată defini produsul scalar, transformă acest spațiu într-un *spațiu metric*, deoarece prin aceasta se poate defini măsura distanței dintre două puncte așezate la distanță finită (spațiu euclidian) sau la distanță infinitesimală prin elementul de arc scris sub forma generală:

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k,$$

unde x^i sînt coordonatele unui punct din spațiu, iar $g_{ik} = g_{ki}$ sînt funcții pozitive finite, continue și derivabile de două ori, de variabilele x^i.

În cazul spațiului euclidian, forma pătratică pozitiv definită mai sus, se poate aduce la forma pitagoreiană: $\sum (dx^i)^2$ printr-o transformare liniară de coordonate.

Scanned with OKEN Scanner

15. **Produsul vectorial.** Fie doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ coplanari, neparaleli și diferiți de zero (fig. 89), în spațiul euclidian cu trei dimensiuni.

În planul lor construim paralelogramul având acești doi vectori ca laturi, ducînd printr-un punct al planului segmente echipolente cu cei doi vectori dați, în ordinea succesiunii lor. Fixăm apoi, pe paralelogram, ca sens de circulație pozitiv, sensul vectorului $\bar{a}$. Direcția planului determinat de vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$, împreună cu aria suprafeței paralelogramului astfel construit, arie egală cu scalarul pozitiv:

$$ab \sin(\bar{a}, \bar{b}) \qquad \text{(I.12)}$$

precum și sensul de circulație admis, definesc elementul geometric, numit „mărime plană". În expresia (I.12) $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt modulii celor doi vectori dați, iar unghiul făcut de cei doi vectori este bine definit. Expresia (I.12) este, prin urmare, un scalar pozitiv: aria paralelogramului construit cu cei doi vectori.

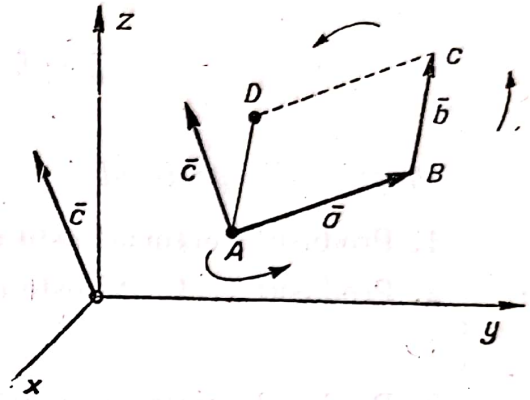

Fig. 89

Intervertirea ordinii de succesiune a celor doi vectori produce schimbarea sensului de circulație de pe paralelogram.

Dacă unul din vectori este nul, dacă vectorii sînt paraleli sau coliniari, mărimea plană este nulă. Două mărimi plane sînt egale dacă au planele paralele, au aceeași arie și același sens de circulație. Două mărimi plane nule sînt egale.

Este evident că o astfel de mărime nu poate să fie identificată cu o translație. Totuși, i se poate asocia o mărime geometrică posedînd proprietățile operative ale vectorilor. Să considerăm mărimea definită prin: 1) *valoare absolută*, egală cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori ca laturi, dată de expresia (I.12); 2) *direcție* determinată de perpendiculara pe planul mărimii plane, format de cei doi vectori și 3) *sens*, definit ca pozitiv, dacă sistemul celor trei direcții: vectorul $\bar{a}$, vectorul $\bar{b}$ și perpendiculara pe planul lor, formează un sistem drept. Schimbarea ordinii vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$ atrage schimbarea semnului mărimii geometrice astfel definite.

În aceste condiții, putem să definim un *vector axial*, sau *pseudovector* reprezentant al mărimii plane definită mai sus, prin relația:

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}, \qquad \text{(I.13)}$$

exprimată prin simbolul din membrul al doilea, avînd valoarea absolută (I.12), direcția perpendicularei pe planul format de cei doi vectori și sensul definit prin rotația pozitivă, în jurul normalei pe plan, care aduce primul vector peste al doilea, printr-o rotație mai mică de 180 grade.

Aplicînd definiția (I.13) vectorilor unitari ai unui sistem cartesian tri-ortogonal, găsim următoarele relații:

$$\bar{j} \times \bar{k} = -\bar{k} \times \bar{j} = \bar{i}; \; \bar{i} \times \bar{j} = -\bar{j} \times \bar{i} = \bar{k}; \; \bar{k} \times \bar{i} = -\bar{i} \times \bar{k} = \bar{j}, \qquad \text{(I.13')}$$

$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Expresia analitică a produsului vectorial. Exprimînd cei doi vectori sub forma (I.8), cu ajutorul vectorilor unitari fundamentali, putem efectua produsul vectorial în virtutea distributivității, operația reducîndu-se la produse vectoriale între vectorii fundamentali. Ținînd seama de relațiile (I.13') se obține:

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\bar{k}. \qquad \text{(I.14)}$$

Această expresie se poate pune sub formă de determinant, comodă în calcule:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad \text{(I.15)}$$

Proprietățile produsului vectorial:

1. Produsul vectorial este anticomutativ: $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$
2. Produsul vectorial este distributiv: $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$; $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$.
3. Produsul printr-un număr este distributiv: $\alpha\bar{a} \times \bar{b} = \alpha(\bar{a} \times \bar{b})$
4. Produsul vectorial $\bar{a} \times \bar{b} = 0$, dacă avem: ori $a = 0$, ori $b = 0$, ori $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

16. **Produse mixte de mai mulți vectori.** Distingem următoarele cazuri mai importante.

a) Produsul dintre un vector și un produs scalar al altor doi vectori $\bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b})$ este evident un vector avînd ca modul modulul lui $\bar{c}$ înmulțit cu valoarea absolută a produsului scalar, aceeași direcție și același sens sau sens contrar cu $\bar{c}$, după cum scalarul este pozitiv sau negativ.

b) Produsul scalar dintre un vector și un produs vectorial de doi vectori necoliniari. Avem relațiile

$$\bar{a}\,(\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}\,(\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c}\,(\bar{a} \times \bar{b}) = (\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}). \qquad \text{(I.16)}$$

Observăm că acest produs schimbă semnul cînd schimbăm orientarea axelor; prin urmare nu este un scalar propriu-zis ci un pseudo-scalar. El este nul cînd vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sînt coplanari. El exprimă volumul paralelipipedului construit cu cei trei vectori dați, ca muchii, volum exprimat formal prin expresia din ultimul termen (I.16).

Putem exprima produsul mixt $\bar{a}\,(\bar{b} \times \bar{c})$ cu ajutorul componentelor vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$ și $\bar{c}$, scriind:

$$\bar{a}\,(\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}\,(\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c}\,(\bar{a} \times \bar{b}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = (\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}). \qquad \text{(I.17)}$$

Să se demonstreze că:

c) $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}\,(\bar{a}\,\bar{c}) - \bar{c}\,(\bar{a}\,\bar{b})$, (I.18)

d) $(\bar{a} \times \bar{b})\,(\bar{c} \times \bar{d}) = (\bar{a}\,\bar{c})\,(\bar{b}\,\bar{d}) - (\bar{b}\,\bar{c})\,(\bar{a}\,\bar{d})$, (I.19)

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă identitatea lui Lagrange:

$$(\bar{a} \times \bar{b})^2 = \bar{a}^2\, \bar{b}^2 - (\bar{a}\, \bar{b})^2. \tag{I.20}$$

17. **Vectori reciproci.** Dacă în spaţiul euclidian tridimensional avem trei direcţii independente, reprezentate prin baza $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, $\bar{s}_3$ (care nu este necesar să fie unitare), atunci ştim că:

$$\bar{a} = a_1\bar{s}_1 + a_2\bar{s}_2 + a_3\bar{s}_3. \tag{I.21}$$

Vectorii $\bar{s}_1'$, $\bar{s}_2'$, $\bar{s}_3'$ definiţi prin expresiile:

$$\bar{s}_1' = \frac{\bar{s}_2 \times \bar{s}_3}{S}, \quad \bar{s}_2' = \frac{\bar{s}_3 \times \bar{s}_1}{S}; \quad \bar{s}_3' = \frac{\bar{s}_1 \times \bar{s}_2}{S} \tag{I.22}$$

unde $S = (\bar{s}_1\ \bar{s}_2\ \bar{s}_3)$, se numesc *reciprocii* lui $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, $\bar{s}_3$.

Rezultă:

$$a_1 = \bar{a}\bar{s}_1'; \quad a_2 = \bar{a}\bar{s}_2'; \quad a_3 = \bar{a}\bar{s}_3'. \tag{I.23}$$

Punînd:

$$a = a_1'\bar{s}_1' + a_2'\bar{s}_2' + a_3'\bar{s}_3', \tag{I.24}$$

obţinem:

$$a_1' = \bar{a}\bar{s}_1; \quad a_2' = \bar{a}\bar{s}_2; \quad a_3' = \bar{a}\bar{s}_3 \tag{I.25}$$

şi

$$\bar{s}_1 = \frac{\bar{s}_2' \times \bar{s}_3'}{S'}; \quad \bar{s}_2 = \frac{\bar{s}_3' \times \bar{s}_1'}{S'}; \quad \bar{s}_3 = \frac{\bar{s}_1' \times \bar{s}_2'}{S'} \tag{I.26}$$

unde $S' = (\bar{s}_1', \bar{s}_2', \bar{s}_3')$; astfel încît:

$$S\,S' = 1. \tag{I.27}$$

Vectorii fundamentali, triortogonali $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ sînt proprii lor reciproci.

18. **Momentul unui vector legat sau alunecător.** Distingem următoarele două cazuri:

1. În raport cu un punct P (pol), este definit prin produsul vectorial:

$$\bar{M}_p = \bar{r}_p \times \bar{a}, \tag{I.28}$$

unde $\bar{r}_p$ este vectorul de poziţie al originii lui $\bar{a}$, faţă de polul P.

2. În raport cu o axă de direcţie $\bar{s}$ (vector unitar):

$$M_s = \bar{M}_p\bar{s}, \tag{I.29}$$

unde P este un punct oarecare de pe axa $\bar{s}$.

Dacă se schimbă polul în P' au loc relaţiile:

$$\bar{M}_p' = \bar{M}_p + \vec{P'P} \times \bar{a}; \quad M_s' = M_s + \bar{s}\,(\vec{P'P} \times \bar{a}). \tag{I.30}$$

Scanned with OKEN Scanner

19. **Vector rezultant și moment rezultant al unui sistem de vectori.** 1. Rezultanta sistemului de vectori $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, este:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i . \tag{I.31}$$

2. Momentul rezultant este:

$$\bar{M}_p = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_p^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_{ip} \times \bar{a}_i). \tag{I.32}$$

20. **Teorema lui Varignon.** În cazul a n vectori localizați în același punct A, avem ($\bar{r}_p$ fiind vectorul de poziție al lui A față de P):

$$\bar{M}_p = \sum_{i=i}^{n} (\bar{r}_p \times \bar{a}_i) = \bar{r}_p \times \sum_{i=i}^{n} \bar{a}_i = \bar{r}_p \times \bar{R}. \tag{I.33}$$

Deci momentul rezultant este egal cu momentul rezultantei. Sînt evidente proprietățile:

$$M_s = \sum_{i=i}^{n} M_s^{(i)} \; ; \; \bar{M}'_p = \bar{M}_p + \overrightarrow{P'P} \times \bar{R} \tag{I.34}$$

unde:

$$\bar{R} = \sum_{i=i}^{n} \bar{a}_i. \tag{I.35}$$

21. **Invarianții scalari ai unui sistem de vectori.** Aceștia sînt:

1). Modulul rezultantei R; 2) $I = \bar{R}\bar{M}_p$; 3) $M_p \cos \alpha = \dfrac{I}{R}$. (I.36)

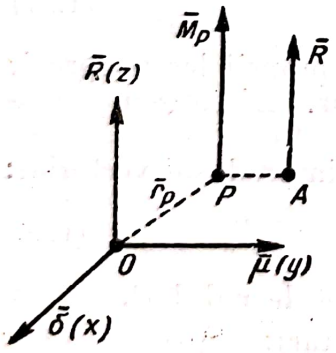

Fig. 90

22. **Axa centrală.** Se numește axa centrală a unui sistem de vectori necoplanari $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ a căror rezultantă este $\bar{R} \neq 0$, locul geometric al punctelor P față de care momentul rezultant $\bar{M}_p$ este paralel cu $\bar{R}$ (v. fig. 90).

Fie un astfel de punct P și un punct fix O: avem ($\bar{r}_p = \overrightarrow{OP}$):

$$\bar{M}_0 = \bar{M}_p + \bar{r}_p \times \bar{R}.$$

Condiția de definiție a axei centrale este $\bar{M}_p \times \bar{R} = 0$ pentru orice punct P variabil pe axa centrală.

Înmulțind vectorial cu $\bar{R}$ în ecuația precedentă se obține:

$$\bar{r}_p = \frac{\bar{R}}{R^2}(\bar{r}_p \bar{R}) + \frac{1}{R^2} \bar{R} \times \bar{M}_0 .$$

Scanned with OKEN Scanner

Luăm în O trei direcții ortogonale formînd un triedru de referință xyz, avînd ca vectori unitari: $\bar{i} \perp \bar{R}$; $\bar{j} = \frac{\bar{R}}{R} \times \bar{i}$; $\bar{k} = \frac{\bar{R}}{R}$.

Se deduc imediat relațiile:

$$\bar{r}_p \bar{i} = -\frac{1}{R}(\bar{M}_0 \bar{j}) = -\frac{M_{0y}}{R}; \quad \bar{r}_p \bar{j} = \frac{1}{R}(\bar{M}_0 \bar{i}) = \frac{M_{ox}}{R}.$$

Rezultă ecuația axei centrale:

$$\bar{r}_p = -\frac{M_{oy}}{R}\bar{i} + \frac{M_{ox}}{R}\bar{j} + \lambda \frac{\bar{R}}{R},$$

unde λ este un parametru variabil arbitrar de dimensiunea unei lungimi.

Pentru toate punctele axei centrale, momentul rezultant al sistemului de vectori este *minim*. În adevăr, din expresia invariantului $\bar{M}_p \bar{R} = I$ deducem că M_p este minim cînd cos $(\bar{M}_p, \bar{R})$ este maxim, deci pentru $\sphericalangle (\bar{M}_p, \bar{R}) = 0, \pi$ adică $\bar{M}_p \parallel \bar{R}$, ceea ce definește axa centrală.

Pentru a scrie ecuația axei centrale sub formă analitică vom considera ecuația vectorială de definiție:

$$\bar{M}_0 - \bar{r} \times \bar{R} = \bar{M}_p = \lambda \bar{R},$$

unde λ este un parametru arbitrar. Proiectăm această ecuație pe cele trei axe $Oxyz$ cu originea în O și eliminăm între ele parametrul λ, se obține ecuația axei centrale sub formă analitică:

$$\frac{M_{ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z}$$

folosită adeseori în statică.

23. **Operații elementare de „reducere" a unui sistem de vectori.** Considerăm următoarele operații:

1) adunarea geometrică a vectorilor cu același punct de aplicare;
2) adăugarea sau suprimarea unei perechi de vectori opuși;
3) descompunerea fiecărui vector pe direcții concurente.

24. **Sisteme particulare de vectori.** Distingem următoarele cazuri particulare mai importante:

1. Sistem de vectori coplanari; are invariantul scalar nul.
2. Sistem de vectori concurenți. Proprietate: dacă un sistem de trei vectori este echivalent cu un sistem nul atunci cei trei vectori sînt concurenți.
3. Sistem de vectori paraleli, pentru care se definește centrul de aplicare a rezultantei, prin relația:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=i}^{n} a_i \bar{r}_i}{\sum_{i=i}^{n} a_i} \qquad (I.37)$$

unde a_i sînt scalarii celor n vectori paraleli $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, care formează sistemul și $\bar{r}_i$ vectori de poziție ai originilor vectorilor $\bar{a}_i$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Ca aplicație, se deduce formula centrului de greutate pentru n puncte materiale de masă m_i, distribuite discret:

$$\bar{r}_G = \frac{\sum_{i=i}^{n} m_i \bar{r}_i}{m} \text{ ; unde } m = \sum_{i=i}^{n} m_i. \tag{I.38}$$

5. Dacă distribuția de puncte materiale este continuă în spațiu, ocupînd o regiune finită V, masa unei particule conținută în elementul de volum $\delta\tau$, în jurul punctului $\bar{r}\ (x, y, z)$ din V este:

$$\delta m = \rho\,(\bar{r})\ \delta\tau + \varepsilon\,\delta\tau, \tag{I.39}$$

unde $\rho(\bar{r})$ este o funcție integrabilă de poziție numită *densitate* și $\varepsilon\,\delta\tau$ tinde către zero cu volumul ocupat de particulă. Masa totală a sistemului este $\oint_V \rho\, d\tau$ astfel încît formula (I.38), care dă poziția centrului de greutate devine, în acest caz,

$$\bar{r}_G = \frac{\oint_V \bar{r}\,\rho\, d\tau}{\oint_V \rho\, d\tau}. \tag{I.40}$$

Existența funcției de densitate $\rho\,(\bar{r})$ este asigurată dacă masa $m(e)$ este o funcție de mulțimea de puncte (e), aditivă și total continuă, în virtutea teoremei că pentru o astfel de funcție raportul $\frac{m(e)}{\mu(e)}$, unde $\mu(e)$ este măsura mulțimii (e), converge aproape peste tot către o valoare limită — densitatea — a cărei integrală este însăși masa $m(e)$. Prin „total" continuă se înțelege că $m(e) \to 0$ pentru toți (e) pentru care $\mu(e) \to 0$. Prin „aproape peste tot" se înțelege că continuitatea are loc în toate punctele mulțimii cu excepția unor puncte distribuite rar — mai exact, puncte care formează o mulțime de măsură nulă.

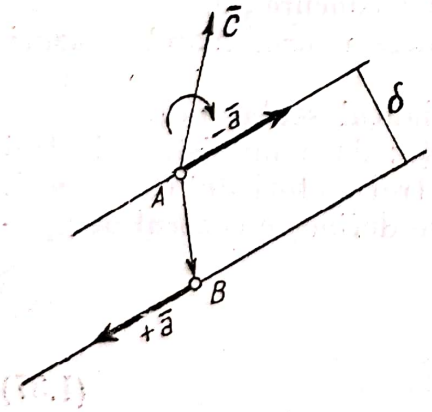

Fig. 91

6. Un sistem de vectori este nul, sau în echilibru, cînd nu conține nici un vector. Așadar, condiția necesară și suficientă ca un sistem să fie identic nul, este:

$$\bar{R} = 0; \quad \bar{M}_p = 0,$$

oricare ar fi P.

7. *Cuplu*, se numește sistemul format de doi vectori coplanari, egali în valoare absolută, paraleli dar de sensuri contrare, (fig. 91). Planul determinat de cei doi vectori este planul cuplului. Distanța dintre cele două drepte suport ale vectorilor se numește brațul cuplului.

Prin definiție, un cuplu este caracterizat, așadar, printr-o rezultantă nulă și un moment rezultant diferit de zero, invariabil cînd variază polul, deci un *vector liber*, numit axa cuplului.

Scanned with OKEN Scanner

25. **Reducerea unui sistem de vectori legaţi sau alunecători la un sistem echivalent, mai simplu.** Cu ajutorul operaţiilor elementare se poate reduce orice sistem de vectori (S) la unul dintre sistemele următoare.

a) *Orice sistem de vectori alunecători poate să fie descompus* într-o infinitate de moduri, într-un sistem echivalent format din trei vectori care au ca puncte de aplicaţie trei puncte date dinainte P_1, P_2, P_3, necoliniare (fig. 92).

În adevăr, fie A originea unuia din vectorii daţi $\bar{a}$ sau un punct aşezat pe dreapta lui suport, neaşezat în planul determinat de planul celor trei puncte P. Acest vector poate să fie descompus în trei vectori componenţi AB_1, AB_2 şi AB_3, pe dreptele AP_1, AP_2 şi AP_3. Printr-o alunecare pe aceste drepte, putem aduce aceşti trei vectori cu originile respective în cele trei puncte P_1, P_2, P_3; obţinem:

$$\bar{a}_1 = \overrightarrow{AB_1},\quad \bar{a}_2 = \overrightarrow{AB_2},\quad \bar{a}_3 = \overrightarrow{AB_3}.$$

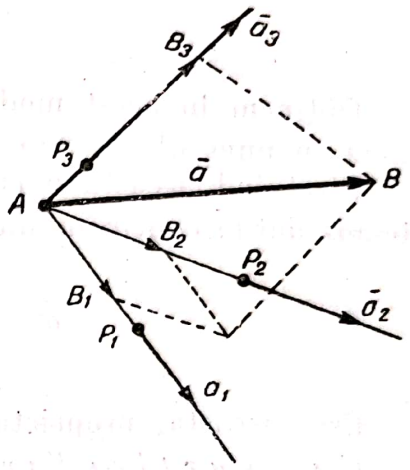

Fig. 92

Dacă însă se întîmplă ca unul dintre vectorii $\bar{a}$ să se găsească aşezat în planul determinat de cele trei puncte date, el va fi descompus în doi vectori componenţi, de exemplu, pe dreptele AP_1 şi AP_2 (dacă aceste drepte sînt distincte); apoi se va proceda ca mai sus.

Aplicînd această proprietate succesiv, fiecărui vector dintre vectorii care alcătuiesc sistemul de vectori dat (S) şi efectuînd rezultantele în fiecare din punctele P, am redus sistemul (S) la un sistem echivalent (S') alcătuit numai din trei vectori aplicaţi în punctele date la voie P_1, P_2, P_3.

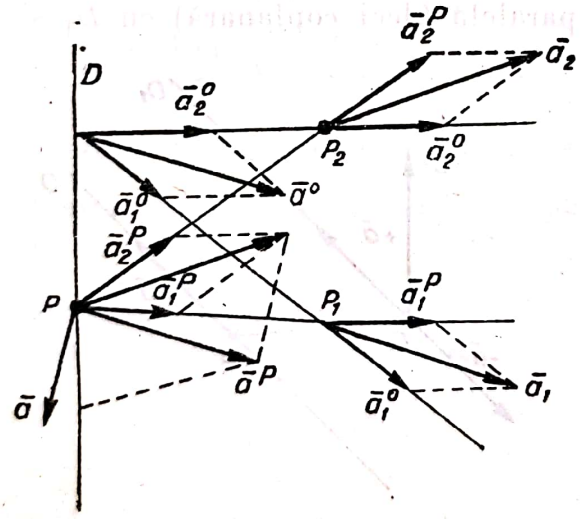

Fig. 93

b) *Orice sistem de vectori alunecători poate să fie descompus într-o infinitate de moduri, într-un sistem echivalent format din doi vectori necoplanari, dintre care unul să fie aplicat într-un punct arbitrar P, dat dinainte.*

În adevăr, fie P, P_1 şi P_2 trei puncte necoliniare luate arbitrar ca în fig. 93. Sistemul de vectori dat poate să fie descompus după observaţia precedentă, în trei vectori $\bar{a}$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ aplicaţi respectiv în P, P_1 şi P_2. Fie π_1, planul determinat de punctul P şi vectorul $\bar{a}_1$; fie π_2 planul determinat de P şi vectorul $\bar{a}_2$. Planurile π_1 şi π_2 se vor tăia în general după o dreaptă D care trece prin punctul P, dar nu conţine punctele P_1 şi P_2.

Alegem pe dreapta D un punct oarecare O, distinct de P. Vectorul $\bar{a}_1$ cu originea în P_1 poate să fie descompus, în planul său π_1, după două

direcții OP_1 și PP_1, în vectorii $\bar{a}_1^o$ și $\bar{a}_1^p$. De asemenea, vectorul $\bar{a}_2$ poate să fie descompus, în planul său π_2, după două direcții OP_2 și PP_2, în vectorii $\bar{a}_2^o$ și $\bar{a}_2^p$.

Transportăm vectorii $\bar{a}_1^o$ și $\bar{a}_2^o$ cu punctele de aplicație în O și construim vectorul rezultant: $\bar{a}^o = \bar{a}_1^o + \bar{a}_2^o$; transportăm vectorii $\bar{a}_1^p$ și $\bar{a}_2^p$ cu originea în P și construim rezultanta celor trei vectori aplicați în P; anume:

$$\bar{a}^p = \bar{a} + \bar{a}_1^p + \bar{a}_2^p.$$

Obținem în acest mod doi vectori: $\bar{a}^o$, aplicat în punctul O și $\bar{a}^p$, aplicat în punctul dat dinainte, P.

Efectuînd această operație cu fiecare dintre vectorii care formează sistemul dat $(\bar{a}_i)$ obținem un sistem echivalent alcătuit din doi vectori:

$$\bar{a}^o = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i^o; \quad \bar{a}^p = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i^p.$$

Prin aceasta, proprietatea enunțată este stabilită.

Caz particular. Dacă planele π_1 și π_2 coincid, putem duce în acest plan o dreaptă D prin P și printr-unul din punctele P_1 sau P_2. Pentru a fixa ideile, să presupunem că ducem dreapta D prin P și P_1. În aceste condiții, se poate proceda ca și în cazul general, observînd că rolul punctului O din construcția precedentă îl joacă acum punctul P_1.

c) *Reducerea unui sistem de doi vectori necoplanari la un vector rezultant $\bar{R}$ și un cuplu $\bar{C}$.* Fie $\bar{a}$ și $\bar{b}$ cei doi vectori ale căror drepte suport D_1 și D_2 nu sînt în același plan ca în fig. 94; fie P și Q punctele lor de aplicație. Ducem prin Q o dreaptă D_3 paralelă (deci coplanară) cu D_1 și

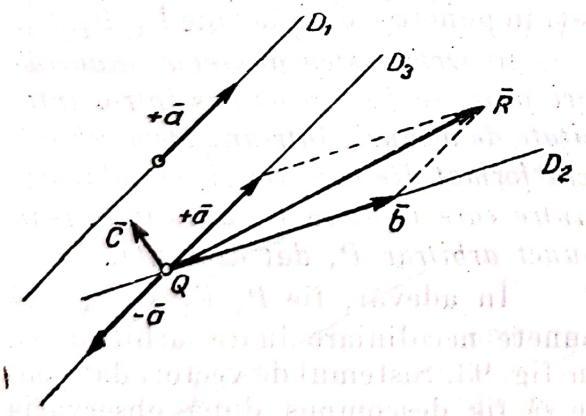

Fig. 94

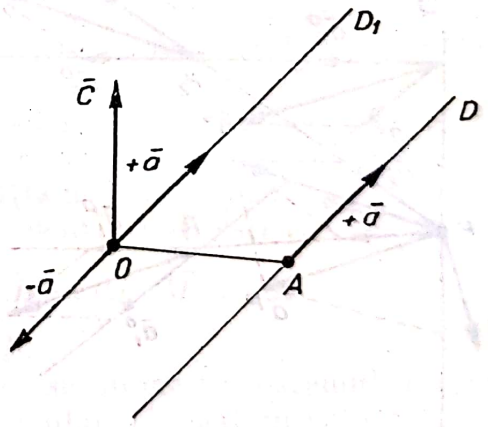

Fig. 95

formăm în Q un sistem identic nul din vectorii $+\bar{a}$ și $-\bar{a}$ egali, respectiv de sens contrar cu vectorul dat $\bar{a}$. Compunem pe $+\bar{a}$ din Q cu $\bar{b}$ și obținem rezultanta $\bar{R}$. Vectorii rămași $-\bar{a}$ (din Q) și $+\bar{a}$ (din P) sînt coplanari și formează cuplul $\bar{C}$ pe care-l putem localiza în punctul Q, fiind un vector liber.

Scanned with OKEN Scanner

d) *Deplasarea punctului de aplicație al unui vector localizat sau alunecător* $\bar{a}$ *pe dreapta suport* D, *într-un punct* O *exterior lui* D.

Ducem în O sistemul identic nul $(+\bar{a}, -\bar{a})$ pe dreapta D_1, paralelă cu D (fig. 95).

Vectorul $-\bar{a}$ (din O) și cu $+\bar{a}$ (din A) formează cuplul $\bar{C}$ localizat (dacă voim) în O. Mai rămîne în O vectorul $+\bar{a}$ egal cu vectorul dat localizat în A. Rezultă deci că putem deplasa punctul de aplicație din A în O, cu condiția de a adăuga un cuplu suplimentar $\bar{C}$.

Dacă O este undeva pe D, cuplul $\bar{C} = 0$, ceea ce caracterizează vectorul alunecător.

26. **Reprezentarea geometrică a derivatei.** Funcțiile vectoriale se definesc ca și funcțiile scalare. Avem funcție de punct $\varphi(x, y, z)$, scrisă și $\varphi(\bar{r})$; funcție de variabilă scalară $\varphi(t)$ etc. Derivarea și integrarea se deduce și în cazul funcțiilor scalare.

Să considerăm un vector (legat) cu originea în punctul fix O:

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

funcție de t finită, continuă și diferită de zero în intervalul t_0, t_1. Ecuația precedentă reprezintă o curbă numită *hodograful* vectorului $\bar{r}(t)$ (fig. 96). Două puncte pe curbă, infinitezimal vecine, ale căror poziții corespund valorilor t și $t + dt$ limitează un element de arc dat de:

$$ds^2 = dr^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2, \qquad \text{(I.41)}$$

într-un sistem de coordonate cartesian tridreptunghiular.

Funcția $\bar{r}(t)$ fiind derivabilă, avem:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{AA'}}{\Delta t} = \overrightarrow{AT}.$$

Dreapta $\overrightarrow{AT}$ de direcție $\frac{d\bar{r}}{dt}$ prin punctul A este tangenta geometrică în punctul A, la curbă.

Avînd în vedere ipotezele formulate, cum admitem că funcția $s(t)$ are derivată continuă, deducem:

$$\overrightarrow{AT} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\bar{t} \qquad \text{(I.42)}$$

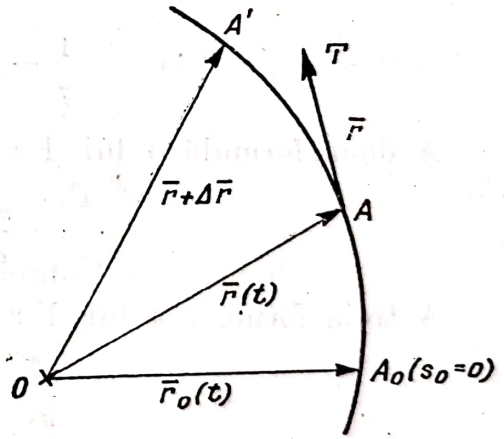

Fig. 96

unde vectorul:

$$\bar{t} = \frac{d\bar{r}}{ds} \qquad \text{(I.43)}$$

însemnează, precum se vede, vectorul unitar al tangentei la curbă, orientat ca și $\overrightarrow{AT}$, în sensul arcelor crescătoare. În adevăr, după (I.41 și I.43), avem $\bar{t}^2 = 1$; și din (I.41) rezultă $\dot{s} > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

27. **Proprietăţile curbelor.** Vom da cîteva proprietăţi ale curbelor formulate vectorial.

1) Vectorul unitar al tangentei la curba traiectorie este dat de relaţia

$$\bar{t} = \frac{d\bar{r}}{ds}, \tag{I.44}$$

unde $\bar{r} = \bar{r}(s)$ este ecuaţia parametrică a curbei.

2) Normala principală este definită prin expresia vectorul unitar:

$$\bar{n} = \frac{d\bar{t}}{ds_1}, \tag{I.45}$$

unde s_1 este arcul de curbă al indicatoarei sferice, care corespunde arcului s al curbei considerate.

3) Raza de curbură ρ este dată prin relaţia:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{ds^3}\sqrt{(d\bar{r} \times d^2\bar{r})^2}. \tag{I.46}$$

4) Prima formulă a lui F r e n e t este:

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\bar{n}. \tag{I.47}$$

5) Binormala la curbă este definită prin relaţia:

$$\bar{b} = \bar{t} \times \bar{n}. \tag{I.48}$$

6) Raza de torsiune τ este dată de formula:

$$\frac{1}{\tau} = -\frac{(d\bar{r}, d^2\bar{r}, d^3\bar{r})}{(d\bar{r} \times d^2\bar{r})^2} \tag{I.49}$$

A doua formulă a lui F r e n e t este:

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \frac{1}{\tau}\bar{n}. \tag{I.50}$$

A treia formulă a lui F r e n e t este:

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = \frac{1}{\rho}\bar{t} - \frac{1}{\tau}\bar{b}. \tag{I.51}$$

28. **Proprietăţile suprafeţelor.** Vom da şi cîteva proprietăţi ale suprafeţelor, formulate vectorial.

1) Coordonatele curbilinii pe suprafaţa dată de ecuaţia parametrică:

$$\bar{r} = \bar{r}(u_1, u_2) \tag{I.52}$$

sînt parametrii reali u_1 şi u_2; $\bar{r}$ fiind o funcţie analitică de argumentele respective. Vectorii:

$$\bar{r}_1' = \frac{\partial\bar{r}}{\partial u_1}; \quad \bar{r}_2' = \frac{\partial\bar{r}}{\partial u_2} \tag{I.53}$$

Scanned with OKEN Scanner

sînt paraleli cu tangentele la curbele parametrice:

$$\bar{r} = \bar{r}(u_1, u_2^0); \qquad \bar{r} = \bar{r}(u_1^0, u_2) \tag{I.54}$$

unde u_1^0 şi u_2^0 sînt constante.

Prin fiecare punct $P(u_1^0, u_2^0)$ de pe suprafaţă trece cîte o singură curbă (I.54). Direcţiile (I.53) sînt distincte dacă

$$\bar{r}_1' \times \bar{r}_2' \neq 0. \tag{I.55}$$

Condiţia de ortogonalitate a curbelor (I.54) este evident:

$$\bar{r}_1' \, \bar{r}_2' = 0. \tag{I.56}$$

Tangenta într-un punct P la o curbă oarecare $u_1(t)$, $u_2(t)$ este:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \left(\frac{du_1}{dt}\right)_p \bar{r}_1' + \left(\frac{du_2}{dt}\right)_p \bar{r}_2'. \tag{I.57}$$

2) Prima formă fundamentală, dă elementul de arc pe o curbă superficială:

$$\Phi_1 = ds^2 = E\,du_1^2 + 2F\,du_1\,du_2 + G\,du_2^2 \tag{I.58}$$

sau cu notaţiile lui R i e m a n n:

$$\Phi_1 = ds^2 = \sum_1^2 g_{ij}\,du_i\,du_j, \tag{I.59}$$

unde:

$$E = g_{11} = r_1'^2; \qquad F = g_{12} = g_{21} = \bar{r}_1' \bar{r}_2'; \qquad G = g_{22} = \bar{r}_2'^2 \tag{I.60}$$

determinantul cîtimilor g_{ij} fiind diferit de zero:

$$EG - F^2 = |g| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = (\bar{r}_1 \times \bar{r}_2)^2 \neq 0 \tag{I.61}$$

3) Vectorul unitar al normalei la suprafaţă este dat de:

$$\bar{p} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}(\bar{r}_1 \times \bar{r}_2). \tag{I.62}$$

4) A doua formulă fundamentală:

$$\Phi_2 = L\,du_1^2 + 2M\,du_1\,du_2 + N\,du_2^2 \tag{I.63}$$

sau:

$$\Phi_2 = \sum_1^2 G_{ij}\,du_i\,du_j \tag{I.64}$$

unde:

$$L = G_{11} = -\bar{r}_1' \bar{p}_1'; \qquad M = G_{12} = G_{21} = -\bar{r}_1' \bar{p}_2' = -\bar{r}_2' \bar{p}_1'; \tag{I.65}$$

$$N = G_{22} = -\bar{r}_2' \bar{p}_2'; \qquad \bar{p}_1' = \frac{\partial \bar{p}}{\partial u_i}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se demonstrează că:

$$G_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\bar{r}''_{ij}, \bar{r}'_1, \bar{r}'_2). \tag{I.66}$$

29. **Teorema lui Meusnier.** Această teoremă se exprimă prin relația:

$$\rho = R \cos \theta, \tag{I.67}$$

unde R este raza de curbură a secțiunii normale în punctul P, ρ este raza de curbură a unei secțiuni oarecare; θ este unghiul făcut de normala la suprafață cu normala principală la curbă în același punct. Teorema se enunță:

Raza de curbură a unei curbe superficiale care trece prin punctul P este egală cu proiecția pe planul său osculator a razei de curbură ce aparține curbei de secțiune normală în P, având aceeași tangentă în P ca și curba dată.

30. **Simbolii lui Christoffel.** Niște expresii diferențiale formate cu derivatele de primul ordin ale coeficienților g_{ij}, care figurează în prima formă fundamentală, sînt simbolii lui E. B. Christoffel. Ei servesc la exprimarea comodă și simetrică a derivatelor de ordin superior ale vectorului de poziție.

Christoffel introduce două feluri de notații, numind simbol *de speța întîi* expresia:

$$\begin{bmatrix} i & j \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right\} \tag{I.68}$$

și simbolul *de speța a doua*, expresia:

$$\begin{Bmatrix} i & j \\ l \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{2} g^{lk} \begin{bmatrix} i & j \\ k \end{bmatrix}, \tag{I.69}$$

unde se notează cu g^{lk} cîtimile definite precum urmează:

$$g^{11} = \frac{1}{g} g_{22}; \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{1}{g} g_{12}; \quad g^{22} = \frac{1}{g} g_{11}; \tag{I.70}$$

pe care le vom numi *coeficienții asociați* coeficienților g_{ij}. Ei sînt minorii determinantului $|g|$ împărțiți cu acest determinant. Se verifică ușor că mărimile (I.70) satisfac relației:

$$\sum_{j=1}^{2} g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k,$$

unde δ_i^k este simbolul lui Kronecker, și anume, egal cu $+1$ pentru $i = k$, și egal cu zero, pentru $i \neq k$.

Expresia (I.68) poate fi pusă sub o formă care arată imediat posibilitatea folosirii ei în exprimarea derivatelor de ordin superior. În adevăr, punînd în (I.68) pentru g_{ij} valorile (I.60) obținem:

$$\begin{Bmatrix} i & j \\ k \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_j} (\bar{r}'_i \bar{r}'_k) + \frac{\partial}{\partial u_i} (\bar{r}'_j \bar{r}'_k) - \frac{\partial}{\partial u_k} (\bar{r}'_i \bar{r}'_j) \right\}.$$

Dezvoltînd derivatele şi efectuînd reducerile evidente, rezultă imediat

$$\left\{ \begin{matrix} i & j \\ & k \end{matrix} \right\} = \bar{r}''_{ij}\,\bar{r}'_k . \tag{I.71}$$

31. **Formulele lui Gauss pentru derivatele de ordinul al doilea.** Sînt formule care exprimă derivatele de ordinul al doilea ale vectorului de poziţie al punctelor de pe suprafaţa $\bar{r} = \bar{r}(u_1, u_2)$ în raport cu parametrii variabili care figurează în argument, ca funcţii de derivatele de ordinul întîi ale aceluiaşi vector.

Să alegem în spaţiu (sîntem mereu în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni) trei direcţii distincte, de exemplu $\bar{r}'_1$, $\bar{r}'_2$ şi $\bar{\mathbf{p}}$, şi să exprimăm vectorul care ne dă derivatele de ordinul al doilea în funcţie liniară de aceste trei direcţii alese:

$$\bar{r}''_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \alpha_{ij,k}\,\bar{r}'_k + \beta_{ij}\,\bar{\mathbf{p}} . \tag{I.72}$$

Să exprimăm coeficienţii α şi β. În acest scop, observăm că derivînd identitatea:

$$\bar{r}'_1\,\bar{\mathbf{p}} = 0 \tag{I.73}$$

în raport cu u_j, avem:

$$\bar{r}''_{ij}\,\bar{\mathbf{p}} = -\,\bar{r}'_i\,\bar{p}'_j = G_{ij} . \tag{I.74}$$

Înmulţind în ecuaţia (I.72) scalar cu $\bar{\mathbf{p}}$ şi ţinînd seama de relaţiile (I.74), urmează:

$$\beta_{ij} = G_{ij} . \tag{I.75}$$

Pentru calcularea coeficienţilor α din (I.72) să înmulţim în această ecuaţie vectorial cu $\bar{\mathbf{p}}$, iar rezultatul să-l înmulţim scalar cu $\bar{\mathbf{p}}$. Observînd regulile produsului mixt, putem scrie:

$$(\bar{r}''_{ij}\,\bar{r}'\,\bar{\mathbf{p}}) = \alpha_{ij,k}\,(\bar{r}'_1\,\bar{r}'_k\,\bar{\mathbf{p}}) . \tag{I.76}$$

Coeficientul lui α din membrul al doilea este egal $= \pm\sqrt{|g|}$.
Înmulţind ambii membri ai relaţiei (I.76) cu coeficientul lui α obţinem.

$$(\bar{r}''_{ij}\,\bar{r}'\,\bar{\mathbf{p}})\,(\bar{r}'_1\,\bar{r}'_k\,\bar{\mathbf{p}}) = \alpha_{ij,k}\,|\,g\,| . \tag{I.77}$$

Efectuînd produsul din membrul întîi, după regula de înmulţire a determinanţilor, căpătăm:

$$\alpha_{ij,k} = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} \bar{r}''_{ij}\,\bar{r}'_k & \bar{r}''_{ij}\,\bar{r}'_l \\ g_{lk} & g_{ll} \end{vmatrix} .$$

Dar, după formulele (I.71), relaţia precedentă devine:

$$\alpha_{ij,k} = \frac{1}{g}\,g_{ll} \left[\begin{matrix} i & j \\ & k \end{matrix} \right] - \frac{1}{g}\,g_{lk} \left[\begin{matrix} i & j \\ & l \end{matrix} \right]$$

Scanned with OKEN Scanner

și după (I.70)

$$\alpha_{ij,h} = \sum_{l=1}^{2} g^{lh} \begin{bmatrix} i & j \\ l & \end{bmatrix};$$

de unde, după (I.69), rezultă valoarea căutată:

$$\alpha_{ij,h} = \begin{Bmatrix} i & j \\ k & \end{Bmatrix}.$$

Înlocuind această valoare precum și expresia lui din (I.75) în relația (I.72), obținem formulele lui G a u s s :

$$\bar{r}''_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \begin{Bmatrix} i & j \\ k & \end{Bmatrix} \bar{r}'_k + G_{ij}\,\bar{\mathbf{p}}. \tag{I.78}$$

Aceste formule își găsesc aplicare în diferite probleme de fizică.

32. **Linii geodezice pe suprafață.** Să considerăm pe suprafața dată o curbă rectificabilă (C) pe care să alegem două puncte P_1 și P_2. Să aplicăm, pe suprafață, o deplasare infinitezimală arbitrară porțiunii de curbă cuprinsă între punctele P_1 și P_2, care să rămînă fixe. Fie:

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} ds = \delta \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{g_{ij}\,du_i\,du_j},$$

variația lungimii curbei (C), datorită deplasării arbitrare δ pe suprafață. Dacă această variație este nulă, deci dacă:

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} ds = 0, \tag{I.79}$$

așadar, dacă integrala care figurează în (I.79) este staționară, curba (C) este o linie geodezică pe suprafața dată. Căutarea ecuației diferențiale la care trebuie să satisfacă curba (C) pentru ca relația de condiție (I.79) să fie împlinită, este o problemă fundamentală de calculul variațiilor.

Ecuațiile curbei (C) trasată pe suprafață fiind:

$$u_1 = u_1(s); \qquad u_2 = u_2(s) \tag{I.80}$$

unde s este arcul de curbă, putem să punem elementul diferențial de arc sub forma adecvată calculului variațional, anume:

$$\sqrt{f(s; u_1, u_2; u'_1, u'_2)}\,ds = \sqrt{\sum g_{ij} u'_i u'_j}\,ds, \tag{I.81}$$

unde $u'_i = \dfrac{du_i}{ds}$.

Problema variațională cere să determinăm curba de-a lungul căreia integrala:

$$\int_{P_1}^{P_2} \sqrt{f(s; u_1, u_2; u'_1, u'_2)}\,ds$$

este un extremum. Răspunsul la această problemă este: curba extremală trebuie să fie o curbă integrală a ecuațiilor lui E u l e r :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \sqrt{f}}{\partial u_i'}\right) - \frac{\partial \sqrt{f}}{\partial u_j} = 0, \qquad (i = 1, 2) \qquad \text{(I.82)}$$

unde funcția f este dată de expresia (I.81). Avem, succesiv:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} u_1'^2 + 2\frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} u_1' u_2' + \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} u_2'^2 ; \qquad \frac{\partial f}{\partial u_1'} = 2(g_{11} u_1' + g_{12} u_2') ;$$

$$\frac{d}{ds}(g_{11} u_1' + g_{12} u_2') = g_{11} u_1'' + g_{12} u_2'' + \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} u_1'^2 + 2\frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} u_1' u_2' + \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} u_2'^2 .$$

Înlocuind în (I.82), grupînd termenii și ținînd seamă de relațiile care definesc simbolii lui C h r i s t o f f e l (§ 31) putem scrie următoarele ecuații:

$$\sum_{\beta=1}^{2} g_{\alpha\beta} u_\beta'' + \sum_{\beta,\gamma=1}^{2} \begin{bmatrix} \beta & \gamma \\ & \alpha \end{bmatrix} u_\beta' u_\gamma' = 0 \qquad (\alpha = 1, 2). \qquad \text{(I.83)}$$

Aceste ecuații reprezintă curbele (I.79) care satisfac ecuației (I.78) și sînt, prin urmare, ecuațiile diferențiale ale curbelor geodezice pe suprafața considerată. Ecuațiile (I.83) se scriu sub o formă mai convenabilă prin rezolvarea lor prin raport cu fiecare derivată secundă în parte. În acest scop, introducem simbolii lui Christoffel de speța a doua.

Înmulțim ecuația (I.83) cu $g_{k\alpha}$ și sumăm pe α. Obținem, ținînd seamă de simbolul lui K r o n e c k e r (§ 49):

$$u_k'' + \sum_{\beta,\gamma=1}^{2} \begin{Bmatrix} \beta & \gamma \\ & \alpha \end{Bmatrix} u_\beta' u_j' = 0 \qquad (k = 1, 2). \qquad \text{(I.84)}$$

Anexa II

Noțiuni asupra teoriei cîmpurilor

33. **Mărimi de stare.** Să considerăm spațiul fizic al unor fenomene naturale, finit sau nu, constituind, din punct de vedere matematic, un domeniu continuu simplu-conex, definit prin condiția cunoscută: orice curbă închisă conținută în domeniu poate să fie redusă la un punct prin deformări continue fără ca să părăsească domeniul nici un moment (conexitate liniară). Un exemplu edificator de domeniu simplu-conex îl constituie spațiul cuprins între două sfere concentrice.

Este de observat că un astfel de spațiu poate să fie secționat în două părți distincte și independente, printr-o singură tăietură. Reamintim că se numește „tăietură" o secțiune limitată de frontierele domeniului. De exemplu, putem secționa spațiul dintre cele două sfere printr-un plan secant, despărțind domeniul dat în două domenii tot simplu-conexe.

Se pot prezenta şi cazuri în care să avem de a face cu domenii multiplu-conexe. Atunci, prin tăieturi adecvate, vom putea să reducem aceste domenii la domenii simplu-conexe după normele indicate de analiza matematică.

Reamintim că un domeniu se numeşte dublu-conex dacă printr-o singură tăietură poate să fie redus la un domeniu simplu-conex.

Un exemplu clasic de domeniu dublu-conex este *torul*.

Într-un astfel de spaţiu putem distinge două feluri de curbe închise: a) curbe satisfăcînd condiţiei de reductibilitate la un punct, fără a părăsi domeniul; b) curbe care nu satisfac acestei condiţii.

Un astfel de domeniu dublu-conex poate fi redus la un domeniu simplu-conex printr-o singură tăietură.

34. **Noţiunea de cîmp.** Fie un domeniu continuu, sau nu, simplu conex, în spaţiul fizic euclidian cu trei dimensiuni, în care definim o funcţie scalară regulată $\varphi(x, y, z)$ continuă, uniformă, diferenţiabilă de cîte ori este nevoie, cu derivate continue, în interiorul şi pe conturul domeniului, — exceptînd cel mult (cînd vom specifica acest lucru) un număr finit de puncte, linii sau suprafeţe izolate, unde poate să prezinte discontinuităţi funcţia sau derivatele ei.

Considerăm, în domeniul dat, variabilele x, y, z, drept coordonatele unui punct P, al cărui vector de poziţie faţă de un punct fix O este $\bar{r}$. Putem exprima funcţia $\varphi(x, y, z)$ prin una din formele echivalente $\varphi(P)$ sau $\varphi(\bar{r})$.

Mulţimea tuturor determinărilor unice pe care le ia funcţia $\varphi(P)$ în fiecare punct P al domeniului ei de existenţă se numeşte cîmpul funcţiei $\varphi(P)$. Avem, anume, un cîmp scalar.

Numim funcţia $\varphi(P)$, care determină cîmpul, funcţie de cîmp sau funcţia cîmpului.

Cum există, evident, fenomene fizice ale căror mărimi de stare au caracter vectorial, vom defini, în mod analog, o funcţie vectorială de stare $\bar{a}(x, y, z)$ sau $\bar{a}(P)$, sau $\bar{a}(\bar{r})$, luînd valori unice în fiecare punct P al domeniului, reprezentată printr-un vector legat de acest punct.

Întrucît o astfel de funcţie exprimă un fenomen fizic, presupunem că satisface condiţiilor de regularitate precizate mai sus.

În acest caz avem de a face cu un cîmp vectorial.

35. **Suprafeţe de nivel. Potenţial.** Să considerăm un sistem de coordonate rectangulare şi funcţia cîmpului (scalară), regulată, $\varphi(x, y, z)$. Toate punctele cîmpului, pentru care funcţia cîmpului are o valoare constantă determinată:

$$\varphi(x, y, z) = C \text{ (const)} \qquad \text{(II.1)}$$

sînt aşezate pe o suprafaţă, dată de ecuaţia (II.1), numită *suprafaţă de nivel*, iar funcţia de cîmp φ luată cu semn schimbat este numită şi *potenţial*. Această noţiune permite construirea unei imagini geometrice a cîmpului scalar, independentă de sistemul de coordonate ales.

Într-un domeniu cu două dimensiuni, ecuaţia:

$$\varphi(x, y) = C$$

reprezintă curbele de nivel.

36. **Derivata geometrică a funcţiei de cîmp scalar.** Să considerăm suprafaţa (II.1) care trece printr-un punct dat $P(x_0, y_0, z_0)$. Să ducem prin P

Scanned with OKEN Scanner

o curbă regulată și rectificabilă, care să nu întîlnească această suprafață decît în punctul P. Ecuația parametrică a acestei curbe este:

$$\bar{r} = \bar{r}(s), \tag{II.2}$$

unde parametrul s este arcul de curbă măsurat în sensul crescător pe curbă. Cînd punctul P este deplasat pe curba (II.2), funcția $\varphi(P)$ va lua o succesiune de valori — pe care le presupunem, pentru a fixa ideile, crescătoare, pentru s crescător — formînd un șir uniparametric crescător, reprezentat printr-o funcție continuă și derivabilă, de parametru s (fig. 97):

$$\varphi[P(s)] = C(s). \tag{II.3}$$

Fie $P_1(s_1)$ un alt punct de pe curba (II.3) vecin lui $P(s_0)$, corespunzător valorii $s_1 > s_0$ a parametrului.
Atunci:

$$\varphi(P_1) > \varphi(P).$$

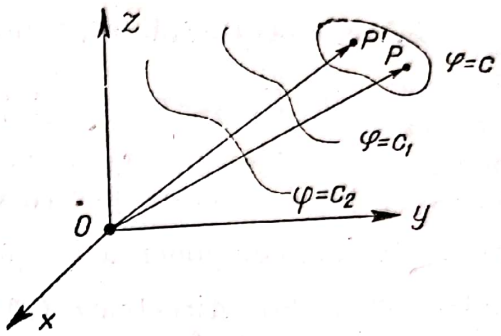

Fig. 97

Să considerăm diferența:

$$\frac{\varphi(P_1) - \varphi(P)}{\text{arc } PP_1} = \frac{\delta\varphi}{\delta s},$$

cînd P_1 tinde către P, pe curba (I.2) arcul PP_1 tinzînd către zero. Avînd în vedere condițiile de continuitate și derivabilitate ale funcției scalare (I.3), vom avea:

$$\lim_{\delta s \to 0} \frac{\delta\varphi}{\delta s} = \frac{d\varphi}{ds}. \tag{II.4}$$

Numim această mărime *derivata geometrică* sau *derivata de direcție a* lui $\varphi(P)$, pe direcția tangentei în P la curba (II.2).

Definiția aceasta este univocă: ea nu depinde de forma specială a curbei (II.3), ci numai de punctul P și de direcția $\bar{s}$ a tangentei în P. În adevăr, să dezvoltăm funcția $\varphi(x, y, z)$, după formula lui Taylor, în vecinătatea infinitezimală a lui $P(x_0, y_0, z_0)$ neglijînd termenii de ordinul al doilea și superior, se obține:

$$\delta\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_P \delta x + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_P \delta y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_P \delta z. \tag{II.5}$$

Făcînd raportul dintre creșterea funcției și creșterea arcului s;

$$\frac{\partial\varphi}{\delta s} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_P \frac{\delta x}{\delta s} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_P \frac{\partial y}{\delta s} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_P \frac{\delta z}{\delta s}$$

și trecînd la limită, cînd $\delta s \to 0$, obținem:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_P \frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_P \frac{dy}{ds} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_P \frac{dz}{ds}.$$

Dar:

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\bar{s}, \bar{i}); \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\bar{s}, \bar{j}); \quad \frac{dz}{ds} = \cos(\bar{s}, \bar{k}), \tag{II.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci:

$$\frac{\partial \varphi}{ds} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_P \cos(\bar{s}, \bar{i}) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_P \cos(\bar{s}, \bar{j}) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_P \cos(\bar{s}, \bar{k}). \qquad (II.7)$$

Ultima relație pune în evidență proprietatea enunțată, de univocitate a definiției (II.4): ea arată că derivata de direcție depinde numai de valorile derivatelor parțiale ale funcției luate în P și de cosinusurile directoare ale direcției $\bar{s}$, în P.

37. **Vectorul gradient. Cîmpuri vectoriale.** Observăm că mărimile $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, care figurează în relația (II.7) pot să fie considerate drept componentele unui vector, față de sistemul de coordonate $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. În adevăr, această relație definește, în formă identică regulii de recunoaștere a caracterului vectorial, componenta $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ pe direcția $\bar{s}$, care face cu axele de coordonate cosinusurile directoare (II.6). Numim acest vector: *gradientul lui* φ. El se exprimă, în fiecare punct al domeniului, prin relația:

$$\operatorname{grad}_P \varphi = \bar{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \qquad (II.8)$$

Scriind relația (II.5) sub formă diferențială și ținînd seamă de (II.8) avem:

$$d\varphi = \operatorname{grad} \varphi \, d\bar{r} \qquad II(.9)$$

iar pentru derivata lui φ după direcția $\bar{s}$:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \operatorname{grad} \varphi \frac{d\bar{r}}{ds}, \qquad (II.10)$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziție al punctului $P(x, y, z)$. Expresiile (I.9) și (I.10) formulează diferențiala totală și derivata funcției φ sub forma operatorială de produs scalar.

Proprietăți analitice. Se verifică imediat că :

$$\operatorname{grad} \alpha = 0; \quad \text{dacă } \alpha = \text{const};$$
$$\operatorname{grad} \alpha\varphi = \alpha \operatorname{grad} \varphi; \text{ dacă } \alpha = \text{const};$$
$$\operatorname{grad} (\varphi + \psi) = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \psi;$$
$$\operatorname{grad} (\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi;$$
$$\operatorname{grad} f(\varphi) = f'(\varphi) \operatorname{grad} \varphi;$$
$$f(\varphi) \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} \int f(\varphi) \, d\varphi;$$
$$\operatorname{grad} f(\varphi, \psi) = \frac{df}{d\varphi} \operatorname{grad} \varphi + \frac{df}{d\psi} \operatorname{grad} \psi.$$

Dacă se cunoaște valoarea funcției φ într-un punct P_0 și gradientul lui φ în același punct, atunci deducem valoarea funcției φ într-un punct oarecare P, la distanța $d\bar{r}$ de P_0, prin relația

$$\varphi_P = \varphi_{P_0} + (\operatorname{grad} P_0 \, d\bar{r}).$$

Apoi, $\bar{r}$ fiind vectorul de poziție al punctului P, avem:

$$\text{grad } \bar{r} = \frac{\bar{r}}{r}; \qquad \text{grad } f(\bar{r}) = \frac{\bar{r}}{r} f'(r);$$

$$\text{grad } (\bar{u}\,\bar{r}) = \bar{u}, \text{ dacă } \bar{u} \text{ este un vector constant.}$$

Proprietăți geometrice. a) *Cîmpul vectorial.* Din cele ce preced rezultă că gradientul este o funcție vectorială de poziție subordonată univoc fiecărui punct al domeniului de existență. El reprezintă un cîmp vectorial, subordonat cîmpului scalar figurat de suprafețele de nivel, într-un mod univoc și bine determinat. Să stabilim această proprietate.

În primul rînd se constată că vectorul gradient este, în fiecare punct al unei suprafețe de nivel, normal pe acea suprafață. În adevăr, dacă $d\bar{r}$ reprezintă o deplasare infinitezimală pe suprafața de nivel, membrul întîi al relației (II.9) este nul; produsul scalar din membrul al doilea trebuind să fie nul, fără ca unul dintre cei doi să fie nul, rezultă că gradientul luieste perpendicular pe $d\bar{r}$, vector așezat în planul tangent la suprafață, în punctul considerat.

Mai mult, pornind pe direcția normalei dintr-un punct al suprafeței de nivel, gradientul are ca sens pozitiv sensul crescător, spre suprafața vecină corespunzătoare unei valori mai mari a parametrului C.

Dacă însă, în locul funcției φ luăm suprafețele potențiale $U = -\varphi = \text{const}$, gradientul determină căderea de potențial; noțiune curentă în fizică.

Din aceste considerații rezultă încă o proprietate însemnată a gradientului: gradientul unei funcții $\varphi(P)$ este derivata geometrică a funcției φ în direcția normalei $\mathbf{n}$ la suprafața de nivel corespunzătoare:

$$\bar{D}_n = \bar{\mathbf{n}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \text{grad } \varphi. \qquad \text{(II.11)}$$

b) *Suprafețele potențiale nu se pot întretăia.* În adevăr, din $\varphi = C$; $\varphi + d\varphi = C + dC$, rezultă $d\varphi = dC$.

Așadar:

$$d\varphi = \text{grad } \varphi \, d\bar{\mathbf{n}} = dC$$

unde $d\bar{\mathbf{n}}$ este elementul de normală la $\varphi = C$ și punctul considerat. Cum grad φ nu poate să fie infinit, rezultă $d\bar{\mathbf{n}}$ nu poate să fie nul.

Operatorul „grad" desemnează operația diferențială corespunzătoare gradientului unei funcții scalare de poziție și se poate exprima simbolic, prin expresia:

$$\text{grad} = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

față de un sistem de coordonate carteziene. Se întrebuințează și semnul ∇ (numit *nabla*, după numele unei harfe asiriene de această formă).

Noțiunea de operator a gradientului ne permite să concepem și simbolul diferențialei totale d, ca și simbolul diferențelor finite δ, drept operatori, sub formă simbolică de produse scalare:

$$d = (d\bar{r}\,\text{grad}); \qquad \delta = (\delta\bar{r}\,\text{grad}).$$

38. **Derivata de direcție a unui vector.** În paragrafele precedente am definit noțiunea de cîmp vectorial prin totalitatea valorilor luate, în domeniul dat, de un vector, funcție regulată de poziție.

Fie acum, în general, $\bar{a}(P)$ o funcție regulată de poziție; putem să definim, și pentru o astfel de funcție, derivata geometrică, prin relația:

$$\frac{d\bar{a}}{ds} = \lim_{\delta s \to 0} \frac{\bar{a}(P') - \bar{a}(P)}{\delta s}$$

unde $\overrightarrow{PP'} = \delta\bar{r} = \bar{s}\,\delta s$. Însemnăm această derivată, prin analogie cu expresia întrebuințată pentru funcțiile scalare, prin relația:

$$\frac{d\bar{a}}{ds} = (\bar{s}\,\text{grad})\,\bar{a} \qquad \text{(II.12)}$$

de unde:

$$d\bar{a} = (d\bar{r}\,\text{grad})\,\bar{a}, \qquad \text{(II.13)}$$

ceea ce se justifică scriind cele trei relații scalare corespunzătoare componentelor a_x, a_y, a_z ale vectorului $\bar{a}$, pe axele de coordonate.

În general, considerînd un vector $\bar{b} = b\bar{s}$, putem defini cu ajutorul relației (II.12), operația diferențială:

$$(\bar{b}\,\text{grad})\,\bar{a} = b\frac{d\bar{a}}{ds} \qquad \text{(II.14)}$$

ca fiind derivata lui $\bar{a}$ pe direcția lui $\bar{b}$ înmulțită cu scalarul b.

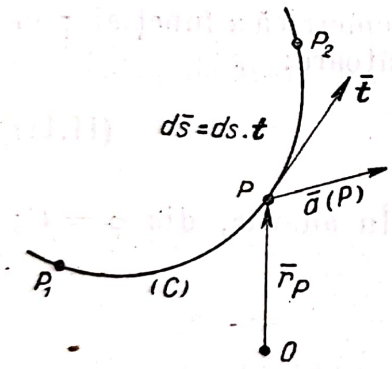

Fig. 98

39. **Proprietate importantă a cîmpului vectorial provenit din gradientul unui cîmp scalar. Cîmpuri irotaționale.** Dacă, într-un domeniu simplu-conex, avem un cîmp vectorial obținut dintr-un cîmp scalar, adică un cîmp vectorial de gradient, definit prin $\bar{a} = \text{grad}\,\varphi$, atunci integrala de linie a vectorului de-a lungul unei curbe (C) conținută în acest cîmp, integrală numită *circulația* vectorului $\bar{a}$, este (fig. 98):

$$(C)\int_{P_1}^{P_2} \bar{a}\,d\bar{s} = (C)\int_{P_1}^{P_2} \text{grad}\,\varphi\,d\bar{s} = (C)\int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial\varphi}{\partial s}\,ds = \varphi(P_2) - \varphi(P_1).$$

Deci, în acest caz, integrala de linie este independentă de drum; ea depinde numai de extremități. Reciproca este adevărată.

Dacă funcția $\varphi(P)$ este uniformă, atunci circulația de-a lungul curbei închise (C) este nulă:

$$\oint \text{grad}\,\varphi\,d\bar{s} = 0,$$

ceea ce înseamnă că expresia $\int_{P_1}^{P_2} \bar{a}\,d\bar{s}$ nu depinde de drum.

40. **Introducerea coordonatelor generale.** În multe probleme de fizică, prin însăşi natura problemei şi pentru dezvoltarea comodă a calculelor, se impune folosirea coordonatelor generale, numite impropriu „curbilinii". Noţiunile introduse pînă acum permit formularea metodei de calcul cu aceste coordonate.

Relaţia $\bar{r} = \bar{r}(u, v, w)$ exprimă o transformare de variabilă biunivocă $(x, y, z) \to (u, v, w)$ admiţînd că funcţiile care definesc transformarea sînt regulate în domeniul lor de existenţă (cu derivate de primul ordin finite) şi avînd determinantul funcţional diferit de zero.

Fie cele trei funcţii scalare de poziţie, regulate în domeniul lor de existenţă, $u(\bar{r})$, $v(\bar{r})$, $w(\bar{r})$, independente, care rezultă din rezolvarea ecuaţiilor precedente de transformare.

Ecuaţiile:

$$u(\bar{r}) = \text{const}; \quad v(\bar{r}) = \text{const}; \quad w(\bar{r}) = \text{const}, \tag{II.15}$$

determină trei familii uniparametrice de suprafeţe, ale căror normale sînt paralele în fiecare punct respectiv cu vectorii grad u, grad v, grad w. Vom numi, pentru uşurinţa scrisului, suprafeţele (II.15): suprafeţe u, v, w.

Condiţia necesară şi suficientă ca cele trei funcţii (II.15) să fie *independente* este ca determinantul:

$$D = (\text{grad } u, \text{grad } v, \text{grad } w)$$

să fie diferit de zero (teorema lui J a c o b i).

În adevăr, dacă $D = 0$, se ştie din proprietăţile determinanţilor funcţionali că una dintre funcţii trebuie să fie, la rîndul ei, funcţie de celelalte două. Reciproc, dacă una dintre funcţiile (II.15) este, la rîndul ei, funcţie de celelalte două:

$$u = f(v, w)$$

atunci, după regulile obişnuite de derivare, $\text{grad } u = \frac{\partial f}{\partial v} \text{grad } v + \frac{\partial f}{\partial w} \text{grad } w$. Înmulţind scalar cu produsul vectorial grad $v \times$ grad w, se obţine $D = 0$.

Numim *coordonate generale* ale unui punct $P(\bar{r})$, un sistem de valori u, v, w. În multe tratate acestea sînt numite, impropriu, coordonate curbilinii.

Observăm că dacă punctul P suferă o deplasare infinitesimală, coordonatele generale vor varia cu du, dv, dw, astfel încît:

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \bar{r}}{\partial w} dw, \tag{II.16}$$

au, în notaţii evidente:

$$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv + \bar{r}_w dw. \tag{II.17}$$

Termenii din membrul al doilea exprimă, succesiv, deplasările infinitesimale ale punctului P pe tangentele la curbele de intersecţie ale suprafeţelor $v = \text{const}$, $w = \text{const}$; respectiv, $w = \text{const}$, $u = \text{const}$, şi $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. Dar, tangentele în P la curbele de intersecţie ale suprafeţelor, luate două cîte două, sînt perpendiculare pe normalele acestor suprafeţe.

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, vectorii care apar în membrul al doilea al relaţiei (II.17) vor fi paraleli cu produsele vectoriale dintre gradienţii respectivi în punctul P:

$$\begin{aligned} \bar{r}_u &= \lambda\,(\text{grad } v \times \text{grad } w);\\ \bar{r}_v &= \mu\,(\text{grad } w \times \text{grad } u);\\ \bar{r}_w &= \nu\,(\text{grad } u \times \text{grad } v). \end{aligned} \tag{II.18}$$

Înmulţind relaţiile precedente pe rînd cu grad u, grad v, grad w, rezultă:

$$1:\lambda = 1:\mu = 1:\nu = (\text{grad } u,\ \text{grad } v,\ \text{grad } w) = D, \tag{II.19}$$

valoare diferită de zero, întrucît funcţiile (II.15) sînt independente, prin ipoteză.

Din (II.18) şi (II.19) tragem concluzia că vectorii $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_w$ sînt reciprocii vectorilor grad u, grad v, grad w (v. § 28).
Fie:

$$D' = (\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_w) \tag{II.20}$$

cîtime diferită de zero, după relaţia $DD' = 1$, dedusă pentru demonstraţiile vectorilor reciproci. Vom avea aşadar,

$$\begin{aligned} \bar{r}_u &= \frac{1}{D}\,(\text{grad } v \times \text{grad } w)\\ \bar{r}_v &= \frac{1}{D}\,(\text{grad } w \times \text{grad } u)\\ \bar{r}_w &= \frac{1}{D}\,(\text{grad } u \times \text{grad } v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{grad } u &= \frac{1}{D'}\,(\bar{r}_v \times \bar{r}_w)\\ \text{grad } v &= \frac{1}{D'}\,(\bar{r}_w \times \bar{r}_u)\\ \text{grad } w &= \frac{1}{D'}\,(\bar{r}_u \times \bar{r}_v), \end{aligned} \tag{II.21}$$

$$DD' = +1.$$

Cum vectorii $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_w$ sînt paraleli tangentelor la curbele de intersecţie, notăm vectorii unitari ai familiei cu $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$; vom avea:

$$\bar{r}_u = U(u,v,w)\,\bar{u};\quad \bar{r}_v = V(u,v,w)\,\bar{v};\quad \bar{r}_w = W(u,v,w)\,\bar{w}, \tag{II.22}$$

unde U, V, W, sînt funcţii de u, v, w.

Curbele care sînt, în fiecare punct al lor, tangente vectorilor grad u, grad v, grad w, vor fi numite curbe u, v, w. Ele formează trei familii de traiectorii ortogonale familiilor de suprafeţe u, v, w (II.15).

Trebuie observat că liniile de intersecţie a suprafeţelor (II.15) nu se confundă, în general, cu liniile u, v, w. În adevăr, linia u, de exemplu, este normală la suprafaţa $u = \text{const}$; aceasta nu însemnează, însă, că ea trebuie să fie aşezată, totodată, pe suprafeţele $v = \text{const}$ şi $w = \text{const}$ care nu sînt în general normale suprafeţei u.

Scanned with OKEN Scanner

Din (II.22) rezultă că elementul liniar se poate scrie (II.17) $ds^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2 + W^2 dw^2 + 2VW\, dv\, dw + 2W\, U\, dw\, du + 2UV\, du dv$.

Fie $\bar{u}; \bar{v}; \bar{w}$; sistemul de vectori reciproci vectorilor u, v, w. Din relaţiile (II.22) şi (II.21) rezultă:

$$\text{grad}\, u = \frac{1}{U}\bar{u}'; \quad \text{grad}\, v = \frac{1}{V}\bar{v}'; \quad \text{grad}\, w = \frac{1}{W}\bar{w}' \tag{II.23}$$

$u'\, v'\, w'$, sînt, aşadar, vectorii unitari pe direcţiile tangentelor la curbele u, v, w.

41. **Cazul suprafeţelor ortogonale.** Reamintim că două suprafeţe sînt ortogonale cînd normalele lor sînt perpendiculare între ele în fiecare punct al liniilor de intersecţie.

Dacă suprafeţele (II.23) alcătuiesc trei familii de suprafeţe ortogonale între ele, liniile u, v, w, se confundă cu liniile de intersecţie. În adevăr, suprafeţele $v = \text{const}$ şi $w = \text{const}$, fiind ortogonale suprafeţei $u = \text{const}$, linia de intersecţie a primelor două suprafeţe va fi perpendiculară pe suprafaţa a treia, aşadar, paralelă vectorului grad u, deci se confundă cu linia u.

Avem, în acest caz, un sistem de coordonate generale triortogonale. Alegem vectorii unitari u, v, w, astfel încît să formeze un triedru drept. Atunci,

$$\bar{u} \times \bar{v} = \bar{w}; \quad \bar{v} \times \bar{w} = \bar{u}; \quad \bar{w} \times \bar{u} = \bar{v};$$

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 1; \quad \bar{u}\bar{v} = \bar{v}\bar{w} = \bar{w}\bar{u} = 0.$$

Aceşti vectori sînt proprii lor reciproci. Avînd în vedere relaţiile (II. 22) şi cele precedente, condiţiile de ortogonalitate se pot scrie:

$$\bar{r}_v \bar{r}_w = 0; \quad \bar{r}_w \bar{r}_u = 0; \quad \bar{r}_u \bar{r}_v = 0. \tag{II.24}$$

Relaţiile (II.23) devin, în acest caz,

$$\text{grad}\, u = \frac{1}{U}\bar{u}; \quad \text{grad}\, v = \frac{1}{V}\bar{v}; \quad \text{grad}\, w = \frac{1}{W}\bar{w}. \tag{II.25}$$

Elementul liniar se scrie:

$$d\bar{r} = \bar{s}\, ds = \bar{u} U\, du + \bar{v} V\, dv + \bar{w} W\, dw \tag{II.26}$$

aşadar:

$$ds^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2 + W^2 dw^2, \tag{II.27}$$

pentru coordonate ortogonale. Observăm, că în expresia lui ds^2 figurează numai termeni pătratici în du, dv, dw; termenii dreptunghiulari fiind nuli, conform relaţiilor (II.23).

Din (II.27) rezultă că ds este lungimea diagonalei unui paralelipiped care are laturile:

$$\bar{u}\, ds_u = \bar{u} U\, du; \quad \bar{v}\, ds_v = \bar{v} V dv; \quad \bar{w}\, ds_w = \bar{w} W dw. \tag{II.28}$$

Elementul de volum este, în general, egal cu:

$$d\tau = (\bar{u}\, \bar{v}\, \bar{w})\, UVW\, du\, dv\, dw, \tag{II.29}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar în coordonatele rectangulare:

$$d\tau = UVW\, du\, dv\, dw. \tag{II.30}$$

Elementele de arie ale forțelor paralelipipedului elementar după (II.28) sînt:

$$ds_u\, ds_v = UV\, du\, dv;\ ds_v\, ds_w = VW\, dv\, dw;\ ds_w\, ds_u = WU\, dw\, du. \tag{II.31}$$

42. **Expresia gradientului în coordonate generale.** Dacă în expresia unei funcții de poziție $\varphi\,(P)$, facem să figureze coordonatele generale, obținem o funcție $\varphi\,(u,v,w)$. După regulele derivării, formăm expresia:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\operatorname{grad} u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\operatorname{grad} v + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\operatorname{grad} w \tag{II.32}$$

sau, după relațiile (II.31):

$$\operatorname{grad}\varphi = \bar{u}'\,\frac{1}{U}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \bar{v}'\,\frac{1}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \bar{w}'\,\frac{1}{W}\frac{\partial\varphi}{\partial w}, \tag{II.33}$$

U, V, W fiind funcții date prin relațiile de definiție (II.22).

În cazul coordonatelor *ortogonale*, expresia gradientului devine:

$$\operatorname{grad}\varphi = \bar{u}\,\frac{1}{U}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \bar{v}\,\frac{1}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \bar{w}\,\frac{1}{W}\frac{\partial\varphi}{\partial w}. \tag{II.34}$$

Pentru multe probleme sînt indicate coordonatele *polare sferice*:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi; \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi; \qquad z = r\cos\theta.$$

Așadar:

$$u = r;\ v = \theta = \operatorname{arc\,sin}\frac{\rho}{r};\quad w = \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x};$$

$$\rho = r\sin\theta = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Suprafețele $r = \text{const}$ sînt sfere concentrice; $\theta = \text{const}$ sînt conuri coaxiale de unghi 2θ; $\varphi = \text{const}$ sînt plane meridiane de azimut φ; așadar, un sistem triortogonal de suprafețe. Se calculează ușor că:

$$U = 1;\quad V = r;\quad W = r\sin\theta;$$

$\bar{u}$ este versorul lui $\bar{r}$; $\bar{v}$ este perpendicular pe $\bar{r}$ și așezat în planul meridian format de axa de z și vectorul de poziție $\bar{r}$, în sensul lui θ crescător și $\bar{w}$ este perpendicular pe planul meridian în sensul lui φ crescător.

Din (II.26) rezultă formula cunoscută:

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2. \tag{II.35}$$

Din (II.34) urmează, pentru expresia gradientului, însemnînd prin $\bar{\rho}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\varepsilon}$ vectorii unitari ai lui $\bar{r}$; θ crescător și φ crescător,

$$\operatorname{grad} = \bar{\rho}\,\frac{\partial}{\partial r} + \bar{\mu}\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \bar{\varepsilon}\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{II.36}$$

Scanned with OKEN Scanner

În coordonate *cilindrice*:

$$x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi;\ z,$$

elementul de arc se scrie:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2;$$

astfel încît: $U = 1,\ V = r,\ W = 1,$ și prin urmare:

$$\text{grad} = \bar{\rho}\frac{\partial}{\partial r} + \bar{\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

43. **Fluxul unui vector printr-o suprafață.** Fie o suprafață Σ închisă, care înconjoară un domeniu (D) și fie un element superficial $d\bar{\sigma} = \bar{n}\,d\sigma$ al acestei suprafețe, în vecinătatea punctului P. Fie $\bar{a}\,(P)$ funcția cîmpului, continuă și finită în interior și pe contur, posedînd derivate finite și continue în interiorul domeniului, funcție care să reprezinte viteza particulei din P. În aceste condiții, produsul scalar $\bar{n}\,d\sigma\,\bar{a}$ exprimă volumul cilindrului oblic cu baza $d\sigma$ și înălțimea $\bar{n}\,\bar{a}$. Așadar, această cîtime va măsura (presupunînd că densitatea fluidului este egală cu unitatea) cantitatea de fluid transportat prin elementul de suprafață de către vectorul $\bar{a}$, în unitatea de timp. Prin urmare, prin întreaga suprafață va trece cantitatea de fluid $\int_{\Sigma} \bar{a}\,d\bar{\sigma}$ pe care o numim *fluxul* vectorului de cîmp $\bar{a}\,(P)$ prin suprafața Σ.

44. **Formula Gauss-Ostrogradski.** Presupunem că avem o suprafață închisă Σ fără puncte singulare, avînd o arie, în interiorul unui domeniu simplu-conex regulat.

Să introducem un sistem de coordonate tridreptunghiular xyz. Un cilindru de baza dx, dy cu muchiile perpendiculare pe planul x, y va tăia în suprafața care închide volumul D (fig. 99) două elemente superficiale $d\sigma'$ și $d\sigma''$ astfel încît, elementul $d\sigma'$ să fie cu concavitatea spre axa z și normala $\bar{n}'$ la $d\sigma'$ să facă un unghi obtuz cu axa z; iar $d\sigma''$ cu convexitatea spre axa z, așa încît normala $\bar{n}''$ să facă un unghi ascuțit cu axa z. Avem atunci, alegînd pe $\bar{n}'$ și $\bar{n}''$ ca să fie normale exterioare, respectiv:

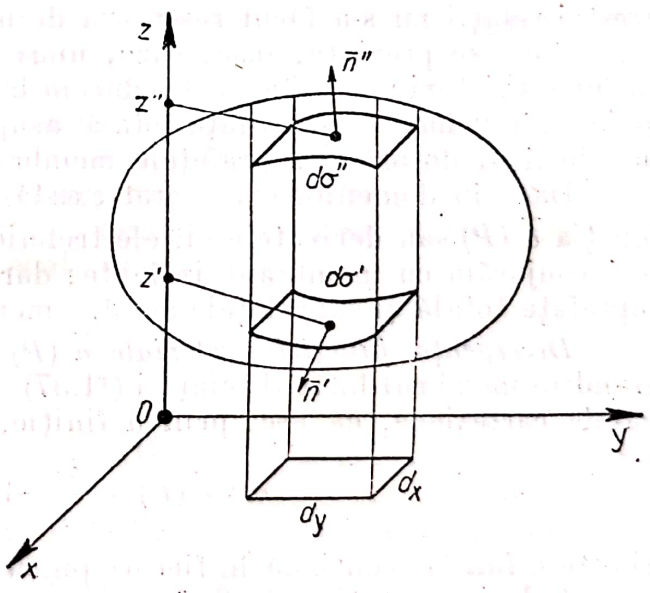

Fig. 99

$$dx\,dy = -\,d\sigma' \cos(\bar{n}', \bar{z}) = +\,d\sigma'' \cos(\bar{n}'', \bar{z}).$$

Fie $\bar{a}$ un vector, funcție de poziție, regulată în domeniul considerat, finită și continuă, cu derivate de primul ordin continue și finite în interiorul lui D, iar pe suprafața de frontieră funcția să fie finită și continuă cu derivate

finite. Fie z' și z'' coordonatele z ale punctelor de aplicație a normalelor $\bar{n}'$ și $\bar{n}''$, pe același (x, y). Să considerăm integrala:

$$dx\,dy\int_{z'}^{z''}\frac{\partial a_z}{\partial z}dz = dx\,dy\,|a_z|_{z'}^{z''} = (a_z'' - a_z')\,dx\,dy = a_z'\,d\sigma'\cos(\bar{n}', \bar{z}) +$$

$$+ a_z''\,d\sigma''\cos(\bar{n}'', \bar{z}).$$

Să sumăm pentru toți cilindrii de secțiune, adică pe întreaga suprafață cuprinzînd volumul D; avem:

$$\int_D \frac{\partial a_z}{\partial z}dx\,dy\,dz = \int_\Sigma a_z\cos(\bar{n}, \bar{z})\,d\sigma,$$

iar prin permutări circulare se obțin celelalte două formule analoge. În definitiv, prin adunare, rezultă, formula căutată:

$$\int_D\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)d\tau = \oint a_n\,d\sigma \qquad \text{(II.37)}$$

cunoscută sub numele de formula lui Gauss. Normala $\bar{n}$ la suprafața ce închide volumul este normala *exterioară*.

Trebuie reținut că în formula (II.37) am considerat normala *exterioară* suprafeței Σ; dacă se ia normala interioară, trebuie pus semnul minus în membrul al doilea al formulei.

Formula (II.37) este adevărată și pentru o funcție $\bar{a}(P)$ multiformă, cu condiția ca domeniul să fie simplu-conex. În adevăr, în demonstrarea acestei relații nu s-a făcut restricția de uniformitate a funcției $\bar{a}(P)$.

Dacă se prezintă, însă, cazul unui domeniu multiplu-conex, trebuie ca, prin tăieturi adecvate, să-l reducem la un domeniu simplu-conex, avînd grijă să înglobăm în suprafața totală asupra căreia se extinde integrala din membrul al doilea și suprafețele membranelor de secțiune.

Dacă în domeniul considerat există regiuni de discontinuitate pentru funcția $\bar{a}(P)$ sau derivatele ei, ele trebuie excluse prin izolare; de pildă, le înconjurăm cu membrane izolante; dar atunci va trebui să înglobăm în suprafața totală și suprafețele acestor membrane.

Divergența funcției vectoriale $\bar{a}(P)$. Expresia care figurează ca integrand în membrul întîi al relației (II.37) se numește divergență. În coordonatele carteziene, ea are, prin definiție, forma:

$$\operatorname{div}\bar{a}(P) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \qquad \text{(II.38)}$$

și este o funcție continuă în fiecare punct al domeniului.

Folosind notația (II.38) formula lui G a u s s (II. 37) se scrie:

$$\int_D \operatorname{div}\bar{a}\,d\tau = \oint \bar{a}\,d\bar{\sigma} \qquad \text{(II.37')}$$

normala $\bar{n}$ avînd sensul pozitiv spre exteriorul suprafeței închise Σ după cum am admis în paragraful precedent.

Relaţiile (II.37), respectiv (II.37′), exprimă că: integrala divergenţei unui cîmp vectorial, extinsă asupra unei regiuni regulate din spaţiu, este egală cu integrala proiecţiei vectorului de cîmp pe direcţia normalei exterioare la suprafaţa asupra căreia este extinsă integrala din membrul al doilea, anume, suprafaţa închisă care curpinde regiunea de volum considerată în membrul întîi.

45. **Divergenţa în coordonate generale.** Fie, în punctul O, un sistem de coordonate generale, ortogonale; vectorii unitari fiind $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ (fig. 100). Să apreciem fluxul vectorului de cîmp $\bar{a}\,(u, v, w)$ prin feţele paralelipipedului $OP_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$.

Faţa $OP_1P_2P_3$ este aşezată în planul tangent în O la suprafaţa $w = \text{const}$. Prin această faţă intră fluxul (v. formulele II.31):

$$\bar{a}\,(\bar{u} \times \bar{v})\; UV\,du\,dv = \bar{a}\,\bar{w}\; UV\,du\,dv = \\ = a_w\; UV\,du\,dv. \qquad \text{(II.39)}$$

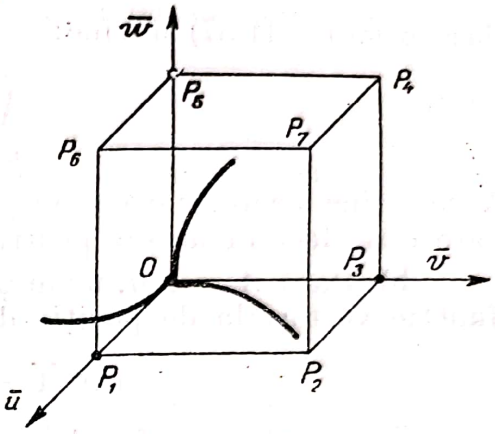

Fig. 100

Prin faţa opusă $P_4P_5P_6P_7$ iese fluxul:

$$\left[a_w\,UV + \frac{\partial}{\partial w}(a_w\,UV)\,dw\right]du\,dv. \qquad \text{(II.40)}$$

Expresiile corespunzătoare pentru celelalte feţe se pot scrie prin permutări circulare.

Diferenţa dintre cantitatea de flux total ieşit şi cel intrat reprezintă contribuţia izvoarelor care se găsesc în volumul închis al paralelipipedului considerat, la valoarea divergenţei în acest volum infinitezimal. Reducînd această valoare la unitatea de volum, se obţine expresia divergenţei în punctul O către care facem să tindă, la limită, volumul considerat.

Scădem aşadar, din relaţia (II.40) expresia (II.39) şi formăm expresiile analoge prin permutări circulare; împărţim apoi rezultatul prin volumul paralelipipedului, care este egal, după (II.30) cu:

$$UVW\,du\,dv\,dw\;;$$

se obţine astfel:

$$\operatorname{div}\bar{a}\,(u, v, w) = \frac{1}{UVW}\left[\frac{\partial}{\partial u}(VWa_u) + \frac{\partial}{\partial v}(WUa_v) + \frac{\partial}{\partial w}\left(UVa_w\right)\right]. \qquad \text{(II.41)}$$

În coordonate sferice, introducem valorile $U = 1$, $V = r$, $W = r\sin\theta$, după § 43. Se obţine:

$$\operatorname{div}\bar{a}\,(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2a_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\; a_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}. \qquad \text{(II.42)}$$

În coordonate *cilindrice*, se obţine:

$$\operatorname{div}\bar{a}\,(r, \varphi, z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Scanned with OKEN Scanner

46. **Formulele lui Green.** Redăm mai jos diferitele forme ale acestor formule folositoare în calculele ulterioare.

a) În cazul particular, cînd cîmpul vectorial este datorit unui scalar, $\bar{a} = \text{grad}\,\varphi$, obținem:

$$\text{div}\,\bar{a} = \text{div grad}\,\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi; \tag{II.43}$$

iar formula (II.37) devine:

$$\int_D \Delta\varphi\, d\tau = \int_s \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma. \tag{II.44}$$

Vom reține formula: div grad $\varphi = \Delta\varphi$, unde Δ este operatorul lui Laplace, care este deci invariant pentru transformările axelor de coordonate.

b) Dacă $\bar{A} = \psi\,\bar{a}$, unde ψ este o funcție scalară derivabilă, iar $\bar{a}$ o funcție vectorială de poziție derivabilă, avem:

$$\text{div}\,\bar{A} = \psi\,\text{div}\,\bar{a} + \text{grad}\,\psi\,\bar{a}. \tag{II.45}$$

Să admitem că funcțiile φ și ψ sînt continue, finite și diferențiabile de două ori într-un domeniu simplu-conex D închis, de suprafața S, iar pe suprafața de frontieră funcțiile și derivatele lor de primul ordin sînt finite, putînd prezența discontinuități.

În aceste condiții, formula lui Gauss (II.37′) devine:

$$\int_D \left[\psi\,\text{div}\,\bar{a} + (\text{grad}\,\psi\,\bar{a})\right] d\tau = \oint_s \psi\, a_n d\sigma. \tag{II.46}$$

c) Dacă facem și $\bar{a} = \text{grad}\,\varphi$ atunci relația (II.46) devine:

$$\int_D (\psi\,\Delta\varphi + \text{grad}\,\psi\,\text{grad}\,\varphi)\, d\tau = \int_s \psi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma \tag{II.47}$$

sau, dacă schimbăm φ cu ψ și scădem relațiile astfel obținute, deducem:

$$\int_D (\psi\,\Delta\varphi - \varphi\,\Delta\psi)\, d\tau = \oint_s \left(\psi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) d\sigma, \tag{II.48}$$

formule cunoscute sub numele de „formulele lui Green".

47. **Operatorul lui Laplace.** Am scris mai sus expresia operatorului lui Laplace în coordonate cartesiene. După dezvoltările din § 45 este ușor de scris acest operator în coordonate generale, servindu-ne de definiția divergenței. Se obține:

$$\text{div grad} = \Delta = \frac{1}{UVW}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{VW}{U}\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{WU}{V}\frac{\partial}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{UV}{W}\frac{\partial}{\partial w}\right)\right] \tag{II.49}$$

În coordonatele sferice (r, θ, φ) expresia laplacianului este:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{II.50}$$

Scanned with OKEN Scanner

În coordonatele cilindrice (r, φ, z) obținem:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{II.51}$$

48. **Derivata absolută.** Fie vectorul $\bar{a}\ (t)$, funcție continuă de timp. Să raportăm acest vector la un sistem de coordonate $O(x, y, z)$, mobil față de un sistem de coordonate $O'(x', y', z')$ fix în spațiu. Fie $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ vectorii fundamentali în O; rezultă:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}. \tag{II.52}$$

Să derivăm în raport cu timpul (notăm acest fel de derivate cu un punct $\frac{d\bar{a}}{dt} = \dot{\bar{a}}$); obținem:

$$\dot{\bar{a}} = \dot{a}_x\bar{i} + \dot{a}_y\bar{j} + \dot{a}_z\bar{k} + a_x\dot{\bar{i}} + a_y\dot{\bar{j}} + a_z\dot{\bar{k}} \tag{II.53}$$

Se obișnuește a se face notația:

$$\dot{a}_x\bar{i} + \dot{a}_y\bar{j} + \dot{a}_z\bar{k} = \frac{\partial\bar{a}}{\partial t}$$

pentru a arăta că $\bar{a}$ este derivat față de O, considerat ca fix. Să raportăm față de O și pe $\dot{\bar{i}}, \dot{\bar{j}}, \dot{\bar{k}}$; avem:

$$\dot{\bar{i}} = \alpha_1\bar{i} + \beta_1\bar{j} + \gamma_1\bar{k};\quad \dot{\bar{j}} = \alpha_2\bar{i} + \beta_2\bar{j} + \gamma_2\bar{k};\quad \dot{\bar{k}} = \alpha_3\bar{i} + \beta_3\bar{j} + \gamma_3\bar{k}$$

și să ținem seama de relațiile de condiție (O și O' fiind triortogonale):

$\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1$; deci $\bar{i}\dot{\bar{i}} = \bar{j}\dot{\bar{j}} = \bar{k}\dot{\bar{k}} = 0$; și $\bar{j}\dot{\bar{k}} = \bar{k}\dot{\bar{i}} = \bar{i}\dot{\bar{j}} = 0$; așadar, $\bar{j}\dot{\bar{k}} + \bar{k}\dot{\bar{j}} = 0$ etc. Introducînd vectorul $\bar{\omega}\ (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ cu componentele:

$$\omega_x = \dot{\bar{j}}\bar{k}, \qquad \omega_y = \dot{\bar{k}}\bar{i}, \qquad \omega_z = \dot{\bar{i}}\bar{j},$$

obținem:

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega}\,\bar{i}, \qquad \dot{\bar{j}} = \bar{\omega}\,\bar{j}, \qquad \dot{\bar{k}} = \bar{\omega}\,\bar{k}. \tag{II.54}$$

Relația (II.53) se scrie:

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{\partial\bar{a}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{a}, \tag{II.55}$$

expresie, care definește derivata absolută a vectorului $\bar{a}\ (t)$, derivată luată față de sistemul fix O', cînd se cunoaște derivata vectorului față de sistemul mobil O și variația lui O față de O'.

49. **Cîmpuri rotaționale.** Dacă într-un mediu care ocupă un domeniu infinit sau limitat, există *vîrtejuri*, care pot să fie mobile și de forme diverse, prezența lor definește un cîmp rațional sau cîmp de vîrtejuri.

Funcția de stare a vîrtejurilor este numită *rotorul* vectorului de cîmp, și este o funcție regulată de poziție. Ea se notează prin simbolul rot $\bar{a}(P)$. Această funcție este un vector în spațiul euclidian tridimensional.

Faptul că vectorul unui cîmp irotațional (pentru care deci funcția caracteristică prezenței vîrtejurilor este nulă) derivă din gradientul unei funcții scalare $\varphi(P)$, regulată și uniformă, ne conduce la concluzia că anularea rotorului vectorului de cîmp $\bar{a}(P)$ trebuie să fie o consecință a existenței gradientului funcției φ. Or, analitic, se poate forma funcția vectorului $\bar{c}(P)$, cu componentele (față de un sistem cartesian):

$$c_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}; \quad c_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}; \quad c_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}, \tag{II.56}$$

care este, în adevăr, identic nulă dacă vectorul $\bar{a}$ derivă dintr-un gradient al unei funcții scalare $\varphi(x, y, z)$.

$$a_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \; a_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \; a_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Aceste considerații ne îndreptățesc să considerăm vectorul $\bar{c}(P)$ drept funcție de stare a cîmpurilor rotaționale.

50. **Rotorul unui vector dat.** Fie $\bar{a}(P)$, funcție regulată de poziție. Raportul este, prin definiție, funcția vectorială $\bar{c}(P)$ ale cărei componente continue și finite sînt date de relațiile (II.56). Rotorul poate să fie scris simbolic, sub forma:

$$\bar{c} = \operatorname{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \operatorname{grad} \times \bar{a} \tag{II.57}$$

ultima expresie reprezentînd produsul vectorial dintre vectorul gradient (considerat ca operator) și vectorul $\bar{a}(P)$.

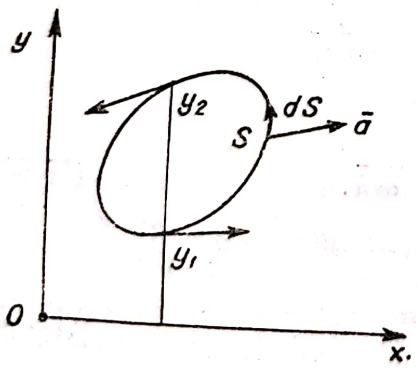

Fig. 101

51. **Relația dintre „rotor" și noțiunea fizică de „rotație".** Să considerăm o porțiune din mediu care execută o mișcare de rotație în jurul unei axe paralelă cu axa z, deci toate particulele se vor mișca în plane paralele planului x, y. Să luăm în acest plan o curbă închisă (C), care înconjoară regiunea rotațională (fig. 101) și să fixăm un sens pozitiv de circulație pe ea. Să considerăm un vector $\bar{a}$, care să fie o funcție continuă și finită de poziție cu derivatele parțiale în raport cu x și y continue și finite. Să luăm apoi integrala de linie a lui $\bar{a}$ de-a lungul curbei (C), adică circulația vectorului a de-a lungul curbei (C):

$$\oint_C \bar{a}\, d\bar{s} = \oint_C (a_x\, dx + a_y\, dy).$$

Considerăm, pentru moment, următoarea integrală

$$-dx\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial a_x}{\partial y}dy=-dx\,|\,a_x\,|_{y_1}^{y_2}=[a_x(y_1)-a_x(y_2)]\,dx$$

să integrăm pe toată curba (C); se obține:

$$-\int dx\,dy\frac{\partial a_x}{\partial y}=\int a_x\,dx,\ \text{și analog:}\ \int dx\,dy\frac{\partial a_y}{\partial x}=\int a_y\,dx.$$

Sumînd egalitățile precedente, rezultă

$$\int_S\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_C\bar{a}\,d\bar{s},\qquad(II.58)$$

(S) fiind suprafața de plan mărginită de curba închisă (C).

Observăm că integrandul din membrul întîi este componenta pe z, a vectorului definit prin relațiile (II. 57), deci a vectorului rot $\bar{a}$.

Am obținut, așadar, un rezultat interesant: circulația vectorului $\bar{a}$ de-a lungul unei curbe plane închise este egală cu fluxul vectorului $c=\text{rot}\,\bar{a}$, prin suprafața plană mărginită de curba închisă considerată.

52. **Formula lui Stokes.** Să considerăm o curbă închisă, strîmbă, regulată (C) (fig. 102) și o suprafață arbitrară regulată Σ care trece prin această curbă. Fie ecuația suprafeței Σ pusă sub forma:

$$\varphi(x,\ y,\ z)\equiv z-f(x,\ y)=0.\qquad(II.59)$$

Fie $\bar{n}$ normala exterioară într-un punct $P(x,\ y,\ z)$ al suprafeței Σ și un element de suprafață $d\sigma$ în jurul acestui punct. Proiectăm acest element de suprafață pe planul xy și obținem elementul plan:

$$dx\,dy=d\sigma\cos(\bar{n},\ \bar{k}).\qquad(II.60)$$

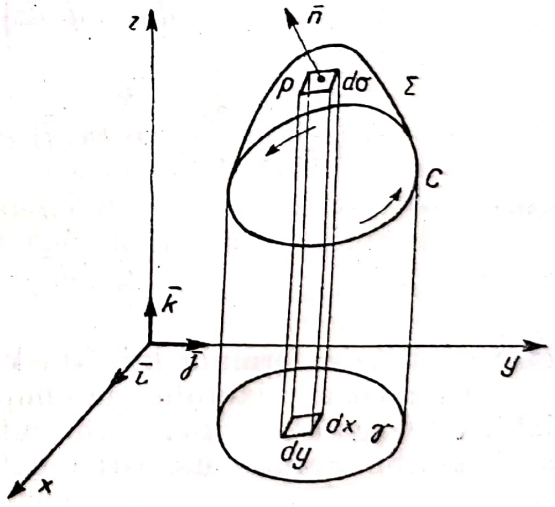

Fig. 102

Pe de altă parte, avem, după proprietățile gradientului unei funcții de poziție:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x}=|\,\text{grad}\,\varphi\,|\cos(\bar{n},\ \bar{i});$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y}=|\,\text{grad}\,\varphi\,|\cos(\bar{n},\ \bar{j});$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=1=|\,\text{grad}\,\varphi\,|\cos(\bar{n},\ \bar{k})$$

Așadar:

$$\cos(\bar{n},\ \bar{k})=\frac{1}{|\,\text{grad}\,\varphi\,|};\ \text{grad}\,\varphi=\bar{n}\frac{\partial\varphi}{\partial n}.$$

Din aceste relații deducem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\bar{n},\ \bar{k})=-\cos(\bar{n},\ \bar{i});\ \frac{\partial f}{\partial y}\cos(\bar{n},\ \bar{k})=-\cos(\bar{n},\ \bar{j}).\qquad(II.61)$$

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm funcția regulată $a_x(x, y, z)$ pe curba (C) și luăm integrala:

$$\int_C a_x(x, y, z)\, dx = \int_\gamma a_x\,(x, y; f\,(x, y))\, dx, \tag{II.62}$$

deoarece putem reduce expresia de sub integrală la o funcție numai de (x, y) cu ajutorul ecuației suprafeței (II.59), integrala din membrul al doilea extinzîndu-se la curba plană γ, proiecția curbei (C) pe planul (xy). Acestei integrale îi putem aplica atunci formula stabilită anterior pentru plan (II.58):

$$\int_\gamma a_x \left(x, y; f\,(x, y)\right) dx = -\int_{\sigma_{x,y}} \left[\frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_x}{\partial z}\,\frac{\partial f\,(x, y)}{\partial y}\right] dx\, dy. \tag{II.63}$$

Formula (II.63), avînd în vedere relațiile (II.61) și (II.62), se poate scrie:

$$\int_C a_x \left(x, y, z\right) dx = -\int_\Sigma \left(\frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_x}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cos\,(\bar{n}, \bar{k})\, d\sigma$$

sau:

$$\int_C a_x \left(x, y, z\right) dx = \int_\Sigma \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} \cos\,(\bar{n}, \bar{j}) - \frac{\partial a_x}{\partial y} \cos\,(\bar{n}, \bar{k})\right) d\sigma.$$

Repetînd raționamentul pentru funcțiile $a_y(x, y, z)$ și $a_z(x, y, z)$, care împreună cu $a_x(x, y, z)$ formează componentele vectorului $\bar{a}(x, y, z)$, se obține, adunînd formulele similare, relația:

$$\int\left(a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz\right) = \int_\Sigma \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) \cos\,(\bar{n}, \bar{i}) +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) \cos\,(\bar{n}, \bar{j}) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) \cos\,(\bar{n}, \bar{k})\right] d\sigma$$

sau:

$$\oint_C \bar{a}\, d\bar{r} = \int_\Sigma \operatorname{rot} \bar{a}\, d\bar{\sigma}, \tag{II.64}$$

care constituie formula lui Stokes.

Circulația vectorului de cîmp de-a lungul unei curbe închise, regulată, este egală cu fluxul rotorului aceluiași vector, printr-o suprafață arbitrară, mărginită de curba dată.

53. **Relații importante.**

1) $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \bar{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \bar{a} - \Delta\, \bar{a}.$

Avem:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \bar{a} = \operatorname{grad} \times (\operatorname{grad} \times \bar{a})$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \bar{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \bar{a} - \Delta\, \bar{a}.$$

2) $\operatorname{div}\operatorname{rot} \bar{a} = 0.$

Scanned with OKEN Scanner

Un cîmp de vîrtejuri, $\bar{c} = \text{rot}\ \bar{a}$, are totdeauna $\text{div}\ \bar{c} = 0$; el este fără izvoare.

3) $\text{rot grad}\ \varphi = 0$. Un cîmp de izvoare nu are vîrtejuri.

4) $\text{div}\ (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{b}\ \text{rot}\ \bar{a} - \bar{a}\ \text{rot}\ \bar{b}$.

5) $\text{rot}\ (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a}\ \text{div}\ \bar{b} - \bar{b}\ \text{div}\ \bar{a} + (\bar{b}\ \text{grad})\ \bar{a} - (\bar{a}\ \text{grad})\ \bar{b}$.

6) $\text{grad}\ (\bar{a}\ \bar{b}) = (\bar{a}\ \text{grad})\ \bar{b} + (\bar{b}\ \text{grad})\ \bar{a} + \bar{a} \times \text{rot}\ \bar{b} + \bar{b} \times \text{rot}\ \bar{a}$.

7) $\text{rot}\ (\varphi \bar{a}) = \varphi\ \text{rot}\ \bar{a} - \bar{a} \times \text{grad}\ \varphi$.

Anexa III

Elemente de calcul tensorial

54. **Considerații generale.** Tratarea vectorială acoperă complet cîmpul de probleme puse de mecanica newtoniană în spațiul euclidian cu trei dimensiuni. În spațiile mai generale, ale mecanicii analitice, relativității etc., metoda vectorială propriu-zisă s-a arătat insuficientă și prin urmare s-a impus necesitatea dezvoltării calculului tensorial, care înglobează drept cazuri particulare calculul cu scalarii și cu vectorii.

Caracterul specific al calculului tensorial constă în faptul că tensorii pot fi definiți numai local; deci, necesită considerarea unor sisteme de referință (sisteme de coordonate, baze) pentru a se stabili legile de transformare a componentelor tensoriale față de transformările axelor de coordonate. În calculul tensorial nu se poate face abstracție — ca în calculul vectorial — de sistemele de referință. Se constată că tensorii sînt niște obiecte matematice definite prin anumite legi de transformare a componentelor lor față de bază, legi care definesc caracterul tensorial al unei mărimi fizice.

Pentru scrierea legilor fenomenelor naturii — care au un caracter intrinsec, independent de reprezentarea noastră — trebuie găsită pentru aceste legi o formulare independentă de alegerea sistemului de referință. Aceasta necesită însă studiul și construirea tuturor invarianților spațiului în care sînt reprezentate fenomenele fizice considerate. Acești invarianți se pot formula cu ajutorul tensorilor; de aici, importanța studiului calculului tensorial pentru formularea expresiilor matematice ale legilor fizice.

55. **Scalarul și vectorul, cei mai simpli tensori.** Întrucît tensorul se caracterizează prin însăși legea de transformare a componentelor sale, ne propunem să examinăm, în această lumină, mai întîi comportarea scalarilor și vectorilor, pentru a trece apoi la studiul propriu-zis al tensorilor.

Prin definiție, o mărime *scalară* rămîne invariantă la orice transformare a axelor de coordonate, dacă se păstrează o scară (unitate de măsură) invariabilă. În consecință, dacă $\varphi\ (x, y, z)$ este o funcție scalară de poziție definită într-un anumit sistem de coordonate (x, y, z) și dacă $\varphi'\ (x', y', z')$ este ceea ce devine φ în alt sistem de coordonate (x', y', z'), condiția de scalaritate cere ca $\varphi \equiv \varphi'$, oricare ar fi legea de transformare a sistemelor de coordonate unul în celălalt.

În cazul unei mărimi *pseudoscalare*, legea de transformare capătă forma $\varphi = k\varphi'$, unde k este un factor independent de axe, avîndu-se în vedere numai transformările liniare ale sistemelor de coordonate. Acest caz se prezintă cînd avem de-a face, de exemplu, cu o densitate sau o capacitate.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece legea de transformare a scalarilor nu conține în ea coeficienții transformării bazei (adică, acești coeficienți intră în expresia legii la exponentul zero), se spune, în calculul tensorial, că scalarii sînt tensori de ordinul zero, fiind astfel înglobați în calculul tensional.

În cazul *vectorilor* situația este mai complicată. O examinăm în cele ce urmează, considerînd cazul mai general al axelor de coordonate oblice în spațiul euclidian. În acest caz, se disting două feluri de componente, după cum vom constata. În calculul tensorial, vectorii (localizați) sînt considerați ca tensori de ordinul întîi, prin faptul că în legile de transformare a componentelor vectoriale intră — după cum vom vedea — coeficienții transformării bazei la exponentul unu și fiindcă tensorii sînt definiți numai local.

56. **Componentele contravariante și covariante ale unui vector.** Introducem un sistem oblic de referință (o bază), determinat prin sistemul de vectori fundamentali $\bar{e}_r$ ($r = 1, 2, 3$), necoplanari (adică independenți între ei), avînd, în general, modulii neegali cu unitatea, mărginindu-ne deocamdată la spațiul euclidian cu trei dimensiuni.

Vectorul fiind o mărime extensivă, el poate fi exprimat liniar, cu ajutorul componentelor sale obținute prin proiecție paralelă la axele de coordonate, sub forma:

$$\bar{a} = a^r \bar{e}_r, \tag{III.1}$$

unde pentru ușurința scrisului am folosit notația curentă, introdusă de Einstein în calculul tensorial, de a nu se mai scrie semnul sumă $(\sum_r)$ asupra indicelui curent care figurează de două ori în același monom. Componentele a^r astfel definite se numesc *contravariante*; ceea ce se specifică prin așezarea indicelui sus.

În § 17 am examinat introducerea vectorilor reciproci, ceea ce permite considerarea unei baze reciproce față de baza inițială (fundamentală) definită prin relațiile:

$$\bar{e}^k = \frac{1}{D}(\bar{e}_r \times \bar{e}_s), \tag{III.2}$$

unde $D = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3) \neq 0$ (vectorii bazei sînt independenți între ei).

Același vector $\bar{a}$ poate fi exprimat ca mărime extensivă și față de baza reciprocă celei fundamentale, prin componentele sale *covariante* a_k (indicele jos):

$$\bar{a} = a_k \bar{e}^k. \tag{III.3}$$

În § 17 am arătat că:

$$\bar{e}_k = \frac{1}{D'}(\bar{e}^r \times \bar{e}^s);\ D' = (\bar{e}^1\ \bar{e}^2\ \bar{e}^3) \neq 0;\ DD' = 1,$$

și că

$$a_k = \bar{a}\,\bar{e}_k;\ a^r = \bar{a}\,\bar{e}^r. \tag{III.4}$$

Prin urmare, componentele contravariante se obțin proiectînd vectorul paralel cu axele bazei fundamentale sau perpendicular pe axele bazei

Scanned with OKEN Scanner

reciproce; componentele covariante se obțin proiectînd vectorul paralel cu axele bazei reciproce sau perpendicular pe axele bazei fundamentale.

Aceste proprietăți se extind, într-o formă variată, și la sisteme de referință mai generale (în dimensiuni, sau curbilinii).

57. Reprezentarea grafică a componentelor unui vector. Pentru ușurință, considerăm cazul reprezentării în plan (fig. 103); considerăm axele oblice făcînd între ele unghiul $\theta \neq 90°$; admitem că unitățile de măsură sînt variabile de-a lungul unei direcții (cazul coordonatelor curbilinii), putînd diferi însă de la o direcție la alta (cazul spațiului afin).

Fie $\sqrt{g_{11}}$ unitatea de lungime pe axa Ox și $\sqrt{g_{22}}$ unitatea de lungime pe axa Oy. Să considerăm vectorul $\bar{a} = \overrightarrow{OC}$ localizat în originea axelor de coordonate O. Avem componentele contravariante:

$$a^1 \sqrt{g_{11}} = \overline{OD}; \quad a^2 \sqrt{g_{22}} = \overline{OE};$$

și componentele covariante:

$$\frac{a_1}{\sqrt{g_{11}}} = \overline{OA}; \quad \frac{a_2}{\sqrt{g_{22}}} = \overline{OB}.$$

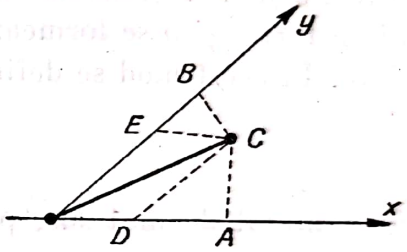

Fig. 103

Din fig. 103 se deduce imediat că:

$$\overline{OA} = \overline{OD} + \overline{DC} \cos \theta,$$

adică:

$$\frac{a_1}{\sqrt{g_{11}}} = a^1 \sqrt{g_{11}} + a^2 \sqrt{g_{22}} \cos \theta$$

sau:

$$a_1 = g_{11} a^1 + (\sqrt{g_{11} g_{22}} \cos \theta)\, a^2,$$

și punînd:

$$g_{12} = g_{21} = \sqrt{g_{11} g_{22}} \cos \theta,$$

rezultă:

$$a_r = g_{rk} a^k \qquad (r, k = 1, 2), \qquad \text{(III.5)}$$

care dă legătura dintre cele două feluri de coordonate cu ajutorul mărimilor g_{rk}, pe care le-am introdus spre a caracteriza metrica (unitatea de măsură), caracter pe care-l păstrează mărimile g_{rk} în spațiile metrice generalizate (euclidian cu mai multe dimensiuni, coordonate curbilinii, spațiu riemannian).

Însemnînd prin $g = |g_{rk}|$ determinantul coeficienților transformării (III.5), obținem formula generală cunoscută din calculul cu determinanții:

$$g^{rk} = (-1)^{r+k} \frac{G_{rk}}{g} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial g} (\ln |g_{rk}|), \qquad \text{(III.6)}$$

unde am însemnat prin $(-1)^{r+k} G_{rk}$ minorul lui g_{rk} din determinantul $|g_{rk}|$, adică complementul algebric al elementului respectiv. Din (III.5) și (III.6) rezultă:

$$g^{rs} g_{rk} = \delta^s_k = \begin{cases} 1 & \text{pentru } s = k, \\ 0 & \text{pentru } s \neq k, \end{cases}$$

δ^s_k fiind simbolul lui K r o n e c k e r.

Înmulțind în (III.5) prin g_{rs} și ținînd seama de relația precedentă, se obține:

$$a^r = g^{rk} a_k \quad (r,\ k = 1,\ 2). \tag{III.7}$$

În relațiile (III.5) și (III.7) apar operații caracteristice pentru calculul tensorial, și anume *operațiile de coborîre și ridicare* a unui indice: în (III.5) indicele k a fost coborît și a devenit r, în (III. 7) indicele k a fost ridicat și a devenit r, prin intervenția cîtimilor metrice g_{rk}. Mai mult, din multiplicarea lui (III.5) cu (III.7) se obține invariantul

$$a_r a^r = a^2.$$

care dă pătratul lungimii vectorului.

În modul acesta se pune în evidență o nouă operație tensorială: *contracția*, care constă în egalarea a doi indici de varianțe deosebite (de exemplu, în forma biliniară $a_r b^k$ se face $r = k$) și se sumează pe indicele comun devenit indice curent și se obține $a_r b^r$, care este produsul scalar al celor doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$. Trebuie observat că în calculul tensorial produsul scalar dintre doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ se formează înmulțindu-se componentele de varianțe deosebite. În acest mod se definește unghiul dintre vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ prin relația:

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{a_k b^k}{ab}.$$

În exemplul de mai sus, pentru elementul diferențial de arc ds se obține expresia:

$$(ds)^2 = (\sqrt{g_{11}}\, dx^1)^2 + (\sqrt{g_{11}}\, dx^1 \cdot \sqrt{g_{22}}\, dx^2) \cos\theta + (\sqrt{g_{22}}\, dx^2)^2$$

sau

$$(ds)^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{12}\, dx^1 dx^2 + g_{22}(dx^2)^2.$$

Această formulă apare sub formă generalizată pentru spațiile generale cu n dimensiuni și se scrie:

$$ds^2 = g_{rk}\, dx^r dx^k, \qquad (r, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{III.8}$$

unde $g_{rk} = g_{kr}$ sînt în general funcții de coordonate. Dacă g_{rk} sînt constanți, avem spațiul euclidian cu n dimensiuni. Asupra acestei chestiuni revenim în cele ce urmează:

58. **Transformarea componentelor unui vector.** Vom considera aceste transformări pentru o transformare liniară a vectorilor bazei. Presupunem că ne aflăm într-un spațiu euclidian cu n dimensiuni.

a) *Componentele contravariante.* Fie vectorul $\bar{a}(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ raportat la un sistem de vectori fundamentali $\bar{e}_r$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ independenți între ei:

$$\bar{a} = a^r \bar{e}_r. \tag{III.9}$$

Fie un alt sistem de coordonate cu vectorii fundamentali $\bar{e}^*_k$ independenți între ei, dar dependenți de primii prin relațiile:

$$\bar{e}^*_r = \alpha^k_r \bar{e}_k; \quad \bar{e}_r = \alpha^{*k}_r \bar{e}^*_k, \tag{III.10}$$

unde coeficienții α ai transformării sînt constanți și avem:

$$\alpha_r^{*k}\,\alpha_k^p = \delta_r^p \text{ (simbolul lui Kronecker).}$$

Din însăși proprietatea de mărime extensivă a vectorului $\bar{a}$ trebuie să avem pentru ambele sisteme de coordonate:

$$\bar{a} = a^{*r}\,\bar{e}_r^* = a^h\,\bar{e}_h.$$

Din ultima egalitate și relațiile (III.10) rezultă imediat regulile de transformare a componentelor contravariante:

$$a^{*r} = \alpha_k^{*r} a^k; \qquad a^h = \alpha_r^h a^{*r}. \tag{III.11}$$

Prin urmare, componentele contravariante se transformă contragredient față de transformările vectorilor fundamentali ai bazei; sau cu alte cuvinte, transformarea directă a componentelor contravariante se efectuează cu ajutorul coeficienților transformării inverse a bazei.

b) *Componentele covariante.* Fie vectorul $\bar{a}$ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ raportat la baza reciprocă bazei fundamentale, definite prin vectorii $\bar{e}^k$, astfel încît:

$$\bar{a} = a_k\,\bar{e}^k. \tag{III.12}$$

Facem notațiile:

$$\bar{e}_r\,\bar{e}^k = g_r^k = \delta_r^k; \quad \bar{e}_r\,\bar{e}^k = g_{rk}; \quad \bar{e}^r\,\bar{e}^r = g^{rk}, \tag{III.13}$$

ceea ce caracterizează reciprocitatea bazelor.

Înmulțind scalar în (III.9) cu $\bar{e}^k$ și în (III.12) cu $\bar{e}_k$; obținem generalizarea formulelor (III.4). Pe de altă parte, din

$$a_k = \bar{a}\,\bar{e}_k$$

și ținînd seama de (III.12), (III.13) și (III.11) se obține:

$$a_r^* = a_k\,\bar{e}^k\,\bar{e}_r = a_k\,\alpha_r^s\,\bar{e}^k\,\bar{e}_s = a_k\,\alpha_r^s\,\delta_s^k$$

și, prin urmare:

$$a_r^* = \alpha_r^k\,a_k; \quad a_r = \alpha_r^{*k}\,a_k. \tag{III.14}$$

Prin urmare, componentele covariante se transformă cogredient față de transformările vectorilor fundamentali ai bazei; sau, cu alte cuvinte, transformarea directă a componentelor covariante se efectuează cu ajutorul coeficienților transformării directe a bazei. Observăm că în formulele de transformare (III.11) și (III.14) coeficienții α de transformare a bazei figurează liniar, ceea ce ne-a făcut să numim vectorul tensor de ordinul întîi.

În spațiul euclidian, față de un sistem cartezian ortogonal, distincția dintre cele două categorii de componente dispare.

Observație. În spațiul euclidian cu trei dimensiuni, a treia formulă (III.13) devine:

$$g^{rk} = \bar{e}^r\,\bar{e}^k = \frac{1}{D^2}\,(\bar{e}_\alpha \times \bar{e}_\beta)\,(\bar{e}_\gamma \times \bar{e}_\delta) = \frac{1}{D^2}\,[(\bar{e}_\alpha\,\bar{e}_\gamma)\,(\bar{e}_\beta\,\bar{e}_\delta) - (\bar{e}_\alpha\,\bar{e}_\delta)\,(\bar{e}_\beta\,\bar{e}_\gamma)]$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, după (III.13):

$$g^{rk} = \frac{1}{D^2}(g_{\alpha\gamma}\, g_{r\delta} - g_{\alpha\delta}\, g_{\beta\gamma}) = \frac{1}{D^2}\, G_{rk}\,. \qquad \text{(III.15)}$$

Comparînd formula (III.15) cu formula (III.6) deducem:

$$D = \sqrt{g}; \qquad D' = \frac{1}{\sqrt{g}}\,. \qquad \text{(III.16)}$$

Semnul lui $\sqrt{g}$ se alege astfel încît să corespundă semnului lui D sau D'; el se ia de obicei pozitiv.

59. **Tensorul metric fundamental.** Din analiza precedentă a comportării componentelor unui vector, a apărut o cantitate matematică nouă, g_{rs}, care caracterizează metrica spaţiului. Arătăm că această mărime are caracterul unui tensor de ordinul al doilea, pe care îl numim tensorul metric fundamental şi care joacă un mare rol în teoria relativităţii generale.

În adevăr, din forma invariantă biliniară în $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ (produsul scalar):

$$\bar{a}\bar{b} = a_k\, b^k = g_{rk}\, a^r\, b^k = g^{rk} a_r\, b_k = g^k_r a^r b_k = \delta^k_r a^r b_k \qquad \text{(III.17)}$$

se pot trage cîteva concluzii importante.

În primul rînd, observăm că membrul întîi $\bar{a}\,\bar{b} = I$ este un invariant scalar propriu-zis. Apoi, observăm că al doilea membru din (III.17) constituie produsul componentelor contravariante (b^k) prin componentele covariante (a_k). Din ceilalţi termeni deducem că, dacă prin înmulţirea componentelor vectoriale de aceeaşi varianţă cu nişte funcţii de variabile (g_{rk}, g^{rk}, g^k_r), astfel încît să obţinem ca rezultat un scalar, atunci mărimile multiplicative reprezintă componentele covariante, contravariante sau mixte ale unui tensor de ordinul al doilea.

Dacă în expresia (III.17) facem $\bar{b} = \bar{a}$ şi luăm ca vector $\bar{a}$ elementul vectorial al unei distanţe infinitezimale $\bar{a} = \overline{ds}$, cu originea în originea axelor de coordonate, deci $\overline{ds}$ avînd componentele dx^1, dx^2,...,dx^n, formula (III.17) se scrie:

$$ds^2 = g_{rk}(x^1, x^2, \ldots, x^n)\, dx^r\, dx^k = g^{rk}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_r\, dx_k, \qquad \text{(III.18)}$$

ceea ce constituie metrica unui spaţiu riemannian (sau euclidian faţă de un sistem de axe curbilinii).

Am constatat că mărimile $g_{rk} = g_{kr}$ formează, prin definiţie, componentele unui tensor simetric de ordinul al doilea, ceea ce se confirmă prin legea de transformare faţă de transformarea axelor; de exemplu:

$$g'_{rk} = \bar{e}'_r \bar{e}'_k = \alpha^p_r\, \alpha^s_k\, \bar{e}_p\, \bar{e}_s = \alpha^p_r\, \alpha^s_k\, g_{ps} \qquad \text{(III.19)}$$

şi în mod analog pentru g^{rk} şi g^k_r.

În spaţiul euclidian, forma (III. 18) scrisă pentru un sistem de coordonate curbilinii se poate aduce la forma pitagoriană, sau canonică, prin-

Scanned with OKEN Scanner

tr-o transformare liniară a axelor curbilinii în carteziene rectangulare; se obține printr-o astfel de transformare:

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{n} (d_x x)^2,$$

deci cu coeficienți egali cu unitatea (constanți). În spațiul riemannian o astfel de transformare nu se poate găsi pentru tot spațiul.

Trebuie reținută legea de transformare (III.14) a componentelor de două ori covariante ale tensorului simetric de ordinul al doilea, pe care l-am definit ca tensor metric fundamental.

60. **Tensori de ordinul al doilea, simetrici și antisimetrici.** Atît din legea de definiție a tensorului de ordinul al doilea t_{rk}, prin proprietatea ca forma biliniară $t_{rk}\, a^r\, b^k$ (unde $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt vectori) să fie un scalar invariant, cît și din legea de transformare (III.19):

$$t_{rk} = \alpha_r^p\, \alpha_k^s\, t_{ps}, \tag{III.20}$$

rezultă proprietățile caracteristice ale tensorului de ordinul al doilea.

Legea de transformare (III.20) se deduce precum urmează. Este evident că trebuie să avem pentru două sisteme diferite:

$$t^*_{rk}\, a^{*r}\, b^{*k} = t_{ps}\, a^p\, b^s.$$

Dar din formulele de transformare (III.11) deducem:

$$(t_{rk} - \alpha_r^p\, \alpha_k^s\, t_{ps})\, a^{*r}\, b^{*k} = 0,$$

de unde rezultă formula (III.20).

În mod analog se obține formula de transformare pentru componentele de două ori contravariante:

$$t^{*rk} = \alpha_p^{*r}\, \alpha_s^{*k}\, t^{ps} \tag{III.21}$$

și pentru componentele mixte:

$$t_k^{*r} = \alpha_p^{*r}\, \alpha_k^s\, t_p^s. \tag{III.22}$$

Tensorul este simetric sau antisimetric în raport cu o pereche de indici de aceeași varianță, dacă:

$$t_{rk} = +\, t_{kr}, \text{ respectiv, } t_{rk} = -\, t_{kr}.$$

Această proprietate se menține la transformarea axelor; de exemplu:

$$t^*_{rk} = \alpha_r^p\, \alpha_k^s\, t_{ps} = \pm\, \alpha_k^s\, \alpha_r^p\, t_{sp} = \pm\, t^*_{kr}.$$

61. **Operații elementare cu tensorii de ordinul al doilea.**

a) Orice tensor de ordinul al doilea se poate descompune într-un tensor simetric și unul antisimetric, prin formula:

$$t_{rk} = \frac{1}{2}(t_{rk} + t_{kr}) + \frac{1}{2}(t_{rk} - t_{kr}),$$

operația numită simetrizare și alternare.

Scanned with OKEN Scanner

b) Fie doi tensori (t_{rk}) și (τ_{rk}) de același ordin și varianțe. Putem defini operațiile invariante de adunare și scădere, ținînd seama că din:

$$t^*_{rk} = \alpha^p_r \alpha^s_k t_{ps} \quad \text{și} \quad \tau^*_{rk} = \alpha^p_r \alpha^s_k \tau_{ps}$$

deducem:

$$t^*_{rk} \pm \tau^*_{rk} = \alpha^p_r \alpha^s_k (t_{ps} \pm \tau_{ps}).$$

c) *Multiplicarea interioară* a tensorului t_{rk} cu un vector $\bar{a}$ (a_1, a_2, a_3) se definește prin operațiile:

$$A_r = t_{rk} a_k \qquad (r, k = 1, 2, 3), \quad \text{(III.23)}$$

ceea ce ne dă un vector $\bar{A}$ (A_1, A_2, A_3). În adevăr, dacă avem:

$$A^*_r = t^*_{rk} a_k,$$

atunci folosind transformarea (III.20) deducem, ținînd seama de (III.23):

$$A^*_r = \alpha^p_r \alpha^s_k t_{ps} a_k = \alpha^p_r (t_{pk} a_k) = \alpha^p_r A_p,$$

ceea ce constituie regula de transformare a componentelor vectoriale covariante A_r.

d) *Multiplicarea exterioară* a unui vector $\bar{a}$ printr-un tensor t_{rk} definește un nou vector $\bar{B}$ (B_1, B_2, B_3) prin relațiile:

$$B_r = a_k t_{kr} \qquad (r, k = 1, 2, 3), \quad \text{(III.24)}$$

ceea ce se demonstrează la fel ca la multiplicarea interioară.

e) *Produsul scalar a doi tensori* (t_{rk}) și (τ_{rk}) constă din suma produselor, două cîte două, a coordonatelor de aceiași indici ai celor doi tensori, adică cantitatea scalară invariantă $(t_{rk}\ \tau_{rk})$ $(r, k = 1, 2, 3)$. În adevăr:

$$t^*_{rk} \tau^*_{rk} = \alpha^p_r \alpha^s_k t_{ps} \alpha^m_r \alpha^n_k \tau_{mn} = t_{ps} \tau_{mn} (\alpha^p_r \alpha^m_r) (\alpha^s_k \alpha^n_k) = t_{ps} \tau_{mn}.$$

62. **Conexiune între studiul formelor biliniare, pătratice și liniare cu studiul tensorului de ordinul al doilea.** Am specificat că un tensor oarecare de ordinul al doilea t_{rk} este definit prin proprietatea de invarianță a formei biliniare $t_{rk} a^r b^k$, iar în cazul simetriei formei pătratice $(\bar{a} = \bar{b})$: $t_{rk}\ a^r a^k$ (§ 59). În schimb, am constatat că studiul unui vector de coordonate a_1, a_2, a_3 se identifică cu studiul unei forme liniare, prin înmulțire scalară $(a_r b^r)$, mărime care este invariantă.

63. **Formule pentru multiplicarea scalară interioară și exterioară a unui tensor simetric strîmb, cu un vector.** După relațiile (III.23) și (III.24), ținînd seamă că $t_{32} = t_1$; $t_{13} = t_2$; $t_{21} = t_3$ avem:

$$(\mathcal{S}\bar{A})_1 = t_2 a_3 - t_3 a_2; \ (\mathcal{S}\bar{A})_2 = t_3 a_1 - t_1 a_3; \ (\mathcal{S}\bar{A})_3 = t_1 a_2 - t_2 a_1$$

sau folosind vectorul $\bar{T}$ (t_1, t_2, t_3), putem scrie cu ajutorul produsului vectorial:

$$\mathcal{S}\bar{A} = \bar{T} \times \bar{a}; \quad \text{(III.25)}$$

și în mod analog:

$$\overline{A}\mathfrak{T} = \overline{a} \times \overline{T}, \qquad \text{(III.26)}$$

ceea ce arată, după aliniatele 3 și 4 că produsul vectorial este un vector în spațiul euclidian tridimensional, pe cînd în spațiul euclidian, față de un sistem cartezian oblic de coordonate, se arată că este un tensor de ordinul al doilea antisimetric, adică un pseudovector, precum urmează.

64. **Produsul vectorial față de un sistem oblic de coordonate.** Considerăm produsul vectorial dintre doi vectori $\overline{a}$ și $\overline{b}$ față de un sistem oblic de vectori fundamentali $\overline{e}_k$, în spațiul cu trei dimensiuni. Avem:

$$\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} = \overline{e}_r \times \overline{e}_k \; a^r b^k = (a^r b^k - a^k b^r)(\overline{e}_r \times \overline{e}_k),$$

dacă fixăm ordinea indicilor (r, k). După § 70 și 72 rezultă:

$$c_s = \sqrt{g}\,(a^r b^k - a^k b^r); \qquad c^s = \frac{1}{\sqrt{g}}(a_r b_k - a_k b_r),$$

ceea ce definește componentele covariante și contravariante ale produsului vectorial. Să arătăm că acest produs este un pseudovector, — adică este anticomutativ la schimbarea ordinei factorilor, ceea ce revine la înlocuirea sistemului cartezian rectangular drept prin cel stîng. În adevăr, într-un astfel de sistem, $|\overline{e}_r| = 1$ $(r = 1, 2, 3)$ și $\sqrt{g} = \pm 1$. Luăm semnul $(+)$. Facem transformarea de la sistemul drept la cel stîng:

$$\overline{e}'_1 = \overline{e}_2, \; \overline{e}'_2 = \overline{e}_1; \quad \overline{e}'_3 = \overline{e}_3.$$

Ținînd seamă că:

$$\alpha_1^2 = \beta_1^2 = 1; \; \alpha_2^1 = \beta_1^2 = 1; \; \alpha_3^3 = \beta_3^3 = 1,$$

ceilalți coeficienți fiind nuli, avem conform § 58:

$$a'^1 = a^2; \; a'^2 = a^1; \; a'^3 = a^3; \; b'^1 = b^2; \; b'^2 = b^1; \; b'^3 = b^3.$$

În aceste condiții, se găsește:

$$c'_1 = -c_2; \; c'_2 = -c_1; \; c'_3 = -c_3,$$

deci produsul vectorial este antisimetric.

65. **Reprezentarea geometrică a unui tensor de ordinul al doilea.** Să considerăm un tensor oarecare de ordinul al doilea t_{rk} și un vector unitar $\overline{u}$ $(u_1 = \alpha, \; u_2 = \beta, \; u_3 = \gamma$ fiind consinusurile directoare). Din produsul interior:

$$t_{rk}u_k = t_{r1}\alpha + t_{r2}\beta + t_{r3}\gamma, \qquad (r = 1, 2, 3) \quad \text{(III.27)}$$

se formează invariantul:

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = t_{11}\alpha^2 + t_{22}\beta^2 + t_{33}\gamma^2 + (t_{23} + t_{32})\beta\gamma + (t_{31} + t_{13})\gamma\alpha + (t_{12} + t_{21})\alpha\beta, \qquad \text{(III.28)}$$

care se obține prin înmulțire în (III.27) succesiv cu α, β, γ și adunarea rezultatelor. În cazul tensorului simetric $t_{rk} = t_{kr}$, expresia (III.28) devine:

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = t_{11}\alpha^2 + t_{22}\beta^2 + t_{33}\gamma^2 + 2t_{23}\beta\gamma + 2t_{31}\gamma\alpha + 2t_{12}\alpha\beta. \qquad \text{(III.29)}$$

Examinăm mai amănunțit formula (III.29).

Scanned with OKEN Scanner

Să ducem din originea O a axelor de coordonate, pe direcția lui $\bar{u}$, lungimea $\frac{1}{\sqrt{|\Phi|}}$; se obține punctul P avînd ca vector de poziție pe $\bar{r}\,(x, y, z)$; adică punem $\overline{OP} = \bar{r}$. Așadar:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{|\Phi|}},$$

iar locul geometric al punctului P este, după (III.29),:

$$t_{11}x^2 + t_{22}y^2 + t_{33}z^2 + 2t_{23}yz + 2t_{31}zx + 2t_{12}xy \pm 1 = 0, \quad \text{(III.30)}$$

semnul $(\pm)$ figurînd pentru Φ pozitiv, respectiv negativ.

Ecuația (III.30) reprezintă o cuadrică cu centrul în originea O; și anume, un elipsoid dacă Φ este o formă pătratică definită, sau doi hiperboloizi conjugați dacă Φ este o formă nedefinită. Acestea sînt cuadricele reprezentative ale tensorului t_{rk} simetric de ordinul al doilea. Este evident că, în mod analog, se obțin din (III.28) cuadricele reprezentative ale tensorului oarecare t_{rk}. Tipul geometric al cuadricei pune în evidență caracterul fizic al tensorului respectiv, cum este cazul cu tensorul moment de inerție, tensorul tensiunilor și deformărilor etc.

66. **Proprietăți.** a) În punctul $P\,(\bar{r})$, unde semidreapta D cu originea în centrul O și direcția $\bar{u}\,(\alpha,\beta,\gamma)$ întîlnește cuadrica (III.30), planul tangent la cuadrică este perpendicular pe vectorul $\bar{a}$ de componente $a_r = t_{rk}u_k$ $(r,\ k = 1,\ 2,\ 3)$.

În adevăr, se deduce imediat că $\bar{r}\,\bar{a} = \sqrt{|\Phi|}$, ceea ce nu este altceva decît ecuația planului tangent în $P\,(r)$ la cuadrica (III.30).

b) Distanța δ a centrului cuadricei O la planul tangent în P este egală cu $\sqrt{|\Phi|}\,/a$. În adevăr, $\delta = \sqrt{|\Phi|}\,/\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

c) Din aceste proprietăți geometrice se trag unele concluzii cu privire la construcția vectorului $\bar{a}$, care este perpendicular pe planul tangent în P, la cuadrica (III.30). În adevăr, însemnînd cu h distanța de la O la planul tangent în P, avem $a = 1/hr$, ceea ce determină modulul vectorului $\bar{a}$ (vezi aplicarea la momentele de inerție, § 142).

d) Printr-o transformare de coordonate liniare ortogonale, cuadrica (III.30) se reduce la axele principale, precum urmează. O axă principală se bucură de proprietatea că este perpendiculară pe planul tangent la cuadrică în extremitatea axei; pe de altă parte, am arătat că vectorul $\bar{a}$ este perpendicular pe planul tangent la extremitatea axei, deci va fi paralel cu însăși axa principală. Această condiție conduce la relațiile:

$$t_{rk}a_k = \lambda a_r,$$

care constituie un sistem de trei ecuații liniare și omogene în raport cu a_r. Acest sistem omogen de ecuații admite o soluție nebanală numai dacă determinantul său este egal cu zero:

$$\begin{vmatrix} t_{11} - \lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} - \lambda & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{(III.31)}$$

ecuație de gradul al treilea în λ, cunoscută sub numele de *ecuația seculară*. Se demonstrează că această ecuație are trei rădăcini reale nenule λ_1, λ_2, λ_3, care corespund la cele trei direcții principale ale cuadricei (III.30), a cărei ecuație devine astfel:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 - 1 = 0, \qquad \text{(III.32)}$$

în care figurează drept coeficienți componentele principale ale tensorului t_{rk} (corespunzătoare axelor principale).

67. **Cei trei invarianți ai tensorului de ordinul al doilea.** La o transformare liniară ortogonală a axelor de coordonate, se obțin trei invarianți ai tensorului de ordinul al doilea t_{rk}, observînd că rădăcinile ecuației (III.31) sînt independente de alegerea axelor de coordonate. [Observăm că ecuația seculară (III.31) este valabilă și pentru cuadrica mai generală (III.29)]. Scriind relațiile dintre coeficienții și rădăcinile ecuației de gradul al treilea (III.31), deducem cei trei invarianți independenți:

a) invariantul liniar:

$\mathcal{J}_1 = t_{11} + t_{22} + t_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$; numit urma tensorului;

b) invariantul pătratic:

$$\mathcal{J}_2 = \begin{vmatrix} t_{22} & t_{23} \\ t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{31} \\ t_{13} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3;$$

c) invariantul cubic:

$$\mathcal{J}_3 = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3,$$

care este determinantul tensorului de ordinul al doilea.

În cazul tensorului simetric, invariantul $\mathcal{J}_2$ se scrie:

$$\mathcal{J}_2 = t_{33}t_{22} + t_{11}t_{33} + t_{22}t_{11} - t_{23}^2 - t_{13}^2 - t_{21}^2,$$

iar în cazul tensorului antisimetric $t_{rk} = -t_{kr}$, singurul invariant rămîne:

$$\mathcal{J}_2 = t_{23}^2 + t_{13}^2 + t_{21}^2.$$

Cu acești invarianți independenți se poate forma o infinitate de alți invarianți.

68. **Exemple de formare a tensorilor de ordin inferior și superior.** În afară de tensorul moment de inerție, a cărui teorie a fost dezvoltată în text, și tensorii teoriei elasticității, care nu intră în expunerea de față, dăm cîteva exemple de formare a tensorilor.

a) *Tensorul sferic* se deduce din t_{rk} punînd $t_{11} = t_{22} = t_{33}$ și $t_{rk} = 0$ pentru $r \neq k$, astfel încît o transformare ortogonală îl transformă în $t'_{11} = t'_{22} = t'_{33}$ și $t'_{rk} = 0$ pentru $r \neq k$. De exemplu, luăm:

$$t_{11} = t_{22} = t_{33} = x^2 + y^2 + z^2,$$

unde x, y, z sînt coordonatele unui punct $P(r)$. Rezultă că dacă $\bar{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ este un vector, expresia $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(x^2 + y^2 + z^2)$ este invariantă la o transformare ortogonală.

Scanned with OKEN Scanner

b) *Tensorul gradient al unui vector* $\bar{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, ale cărui componente sînt funcții derivabile de punct (x_1, x_2, x_3). Definim mărimea:

$$t_{rk} = \frac{\partial a_r}{\partial x_k}$$

și afirmăm că aceasta dă componentele unui tensor de ordinul al doilea. În adevăr:

$$t^*_{rk} = \frac{\partial a^*_r}{\partial x^*_k} = \alpha^h_p \frac{\partial a^*_r}{\partial x_p},$$

deoarece:

$$x_p = \alpha^h_p x^*_h \quad \text{și} \quad a_r = \alpha^s_r a_s.$$

Deci:

$$t^*_{rk} = \alpha^p_r \alpha^s_k \frac{\partial a_p}{\partial x_s} = \alpha^p_r \alpha^s_k t_{ps},$$

ceea ce trebuia demonstrat. Se poate scrie:

$$\mathcal{T} = \operatorname{div} \bar{a}.$$

c) *Vectorul divergență a unui tensor de ordinul al doilea*, ale cărui componente t_{rk} $(r, k = 1, 2, 3)$ sînt funcții derivabile de punct (x_1, x_2, x_3). Formăm expresiile:

$$a_r = \frac{\partial t_{rk}}{\partial x_k}$$

și afirmăm că ele sînt componentele unui vector $\bar{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, pe care-l numim $\bar{a} = \operatorname{div} \mathcal{T}$, divergența tensorului $\mathcal{T}\,(t_{rk})$ prin analogie cu divergența unui scalar. În adevăr:

$$a^*_r = \frac{\partial t^*_{rk}}{\partial x_k} = \alpha^k_p \frac{\partial t^*_{rk}}{\partial x_p},$$

deoarece:

$$x_p = \alpha^k_p x^*_k$$

și

$$\frac{\partial t^*_{rk}}{\partial x_p} = \alpha^m_r \alpha^n_k \frac{\partial t_{mn}}{\partial x_p};$$

rezultă:

$$a^*_r = \alpha^m_r \left(\alpha^k_p \alpha^n_k\right) \frac{\partial t_{mn}}{\partial x_p},$$

sau:

$$a^*_r = \alpha^m_r \frac{\partial t_{mn}}{\partial x_n} = \alpha^m_r a_m,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

d) Modul de formare a tensorilor de ordin superior este similar celor de ordinul al doilea, de exemplu: scalar $= t^s_{rh} a^r b^h c_s$ definește tensorul de ordinul al treilea t^s_{rh} de două ori covariant și o dată contravariant, cu ajutorul vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Recunoașterea calității de tensor rezultă din legea de transformare care se deduce imediat, folosind formulele (III.11) și (III.14):

$$t^{*p}_{mn} = \alpha^r_m \alpha^h_r \alpha^p_s t^s_{rh}$$

și așa mai departe pentru tensori de ordin superior, asupra cărora nu insistăm, ei neavînd aplicație în mecanica newtoniană.

69. **Tensori în spațiul euclidian față de axe curbilinii.** În multe probleme de mecanică sîntem nevoiți să introducem coordonate generale (curbilinii). Transformările care efectuează o trecere de la un sistem de coordonate curbilinii la alt sistem curbiliniu sînt transformări liniare, ai căror coeficienți sînt funcții de coordonate, nu ca în cazul axelor rectilinii unde coeficienții transformării sînt constanți, așa cum am admis în cele ce preced. O transformare generală de axe curbilinii se poate exprima prin relații de forma:

$$x^{*s} = f_s(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad (s = 1, 3, \ldots, n), \qquad \text{(III.33)}$$

unde funcțiile f_s sînt regulate, cu determinantul funcțional diferit de zero, variabilele x^s fiind definite în domeniul dat, iar x^{*s} în domeniul transformat corespunzător.

Este evident că transformările (III.33) pot să nu fie liniare, în general. Totuși, cum tensorii și operațiile lor sînt definiți numai într-o regiune infinit mică din vecinătatea punctului $P(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, transformările (III.33) pot fi oprite la formă liniară, coeficienții acestei transformări nemaifiind însă constanți sau independenți de variabilele x^s, ci dimpotrivă, sînt funcții de aceste variabile, pe care le presupunem regulate.

Așadar, în aproximația convenită avem transformarea locală:

$$x^{*s} = x^{*s}_k x^k, \text{ unde } x^{*s}_k = \frac{\partial x^{*s}}{\partial x^k}, \qquad \text{(III.34)}$$

care sînt funcții de variabilele x^k pe care le presupunem finite, uniforme, continue și derivabile de cîte ori este nevoie, în domeniul de existență. Am admis că determinantul funcțional este diferit de zero:

$$\frac{D(x^s)}{D(x^{*s})} \neq 0.$$

În aceste condiții, putem defini operația inversă:

$$x^h = x^h_{*s} x^s; \text{ unde } x^t_{*s} = \frac{\partial x^h}{\partial x^{*s}}. \qquad \text{(III.35)}$$

Din relațiile (III.34) și (III.35) rezultă imediat că:

$$x^{*s}_k x^{t\,k}_{*r} = \delta^s_r \qquad \text{(III.36)}$$

(simbolul lui Kronecker).

70. **Componente contravariante şi covariante.** a) Din (III.33) şi (III.34), cu condiţiile de derivabilitate, avem pentru diferenţiala totală

$$dx^{*s} = x^{*s}_{\ k}\, dx^k, \tag{III.37}$$

relaţie care exprimă legea de transformare a diferenţialelor totale ale variabilelor.

Comparînd formula (III.37) cu formula (III.11), constatăm că componentele unui vector contravariant se transformă ca şi (cogredient cu) diferenţialele totale ale variabilelor, la o transformare ortogonală a axelor.

b) Fie dată o funcţie regulată $\varphi_s\,(x^1,\ x^2,\ldots,x^n)$, care derivă dintr-un potenţial scalar prin operaţia de gradient:

$$\varphi_s = \operatorname{grad}_s \varphi.$$

Cum scalarul φ rămîne invariant la transformarea axelor de coordonate, avem:

$$\varphi^*_s = \operatorname{grad}^*_s \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial x^{*s}} = x^{\ r}_{*s}\varphi_r, \tag{III.38}$$

care exprimă legea de transformare a gradientului unui scalar. Comparînd formula (III.38) cu formula (III.14) constatăm că componentele covariante ale unui vector se transformă ca şi (cogredient cu) componentele unui gradient de scalar.

71. **Simbolii lui Christoffel.** La § 30 au fost definiţi simbolii lui Christoffel privind elementele de teoria suprafeţelor. Această definiţie se extinde şi într-un spaţiu oarecare în care se cunoaşte tensorul metric fundamental (deci, metrica), raportîndu-ne la un sistem de axe curbilinii. Avem simbolul de prima speţă:

$$\begin{bmatrix} m\ n \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k}\right), \tag{III.39}$$

din care deducem *simbolul de speţa a doua* prin operaţia:

$$\begin{Bmatrix} m\ n \\ l \end{Bmatrix} = g^{kl}\begin{bmatrix} m\ n \\ k \end{bmatrix} \tag{III.40}$$

La fel cum s-a procedat în elementele de teoria suprafeţelor (§ 28), se pot deduce ecuaţiile geodezicelor într-un spaţiu general, printr-un principiu variaţional, obţinîndu-se:

$$\frac{d^2x^l}{ds^2} + \begin{Bmatrix} m\ n \\ l \end{Bmatrix}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds} = 0, \tag{III.41}$$

variantă faţă de transformarea liniară ortogonală a axelor, adică:

$$\frac{d^2x^{*\gamma}}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \alpha\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}^*\frac{dx^{*\alpha}}{ds}\frac{dx^{*n}}{ds} = 0. \tag{III.42}$$

După formula (III.37) putem scrie:

$$\frac{dx^l}{ds} = x^{\ l}_{*\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds}$$

și deci:

$$\frac{d^2x^l}{ds^2} = x^l_{*\alpha}\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + x^l_{*\alpha\beta}\frac{dx^{*\alpha}}{ds}\cdot\frac{dx^{*\beta}}{ds},$$

unde am pus:

$$x^l_{*\alpha\beta} = \frac{\partial x^l}{\partial x^{*\alpha}\,\partial x^{*\beta}}.$$

Înlocuind aceste valori în ecuația (III.47), deducem:

$$x^l_{*\alpha}\frac{d^2x^{*\alpha}}{ds^2} + \left(x^l_{*\alpha\beta} + \left\{\begin{matrix} m\ n \\ l \end{matrix}\right\} x^m_{*\alpha}\ x^n_{*\beta}\right)\frac{dx^{*\alpha}}{ds}\frac{dx^{*\beta}}{ds} = 0$$

sau înmulțind cu $x^{*\gamma}_l$ și sumînd pe l;

$$\frac{d^2x^{*\gamma}}{ds^2} + \left[x^{*\gamma}_l\, x^l_{*\alpha\beta} + x^{*\gamma}_l\, x^m_{*\alpha}x^n_{*\beta}\left\{\begin{matrix} m\ n \\ l \end{matrix}\right\}\right]\frac{dx^{*\alpha}}{ds}\frac{dx^{*\beta}}{ds} = 0.$$

Comparînd această ecuație cu (III.42), deducem legea de transformare a simbolilor lui Christoffel:

$$\left\{\begin{matrix} \alpha\ \beta \\ \gamma \end{matrix}\right\}^* = x^{*\gamma}_l\, x^m_{*\alpha}\, x^n_{*\beta}\left\{\begin{matrix} m\ n \\ l \end{matrix}\right\} + x^{*\gamma}_l\, x^l_{*\alpha\beta}; \qquad \text{(III.43)}$$

sau inversînd rolul variabilelor x^h și x^{*h}:

$$\left\{\begin{matrix} \alpha\ \beta \\ \gamma \end{matrix}\right\} = x^\gamma_{*l}\, x^{*m}_\alpha\, x^{*n}_\beta\left\{\begin{matrix} m\ n \\ l \end{matrix}\right\}^* + x^\gamma_{*l}\, x^{*l}_{\alpha\beta}. \qquad \text{(III.44)}$$

Aceste legi de transformare arată că simbolii lui Christoffel nu sînt în general componente tensoriale. În adevăr, formula (III.43) ne arată că transformarea simbolilor lui Christoffel coincide cu transformarea componentelor unui tensor de două ori contravariant și o dată covariant, numai dacă $x^l_{*\alpha\beta} = 0$, deci numai pentru grupul de transformări liniare.

Caracterul netensorial al simbolilor lui Christoffel rezultă și din faptul că este posibil ca simbolii să fie nuli într-un sistem de coordonate, fără a rămîne nuli pentru oricare alt sistem de coordonate. În adevăr, dacă simbolii stelați sînt nuli în (III.44), rezultă pentru simbolii nestelați:

$$\left\{\begin{matrix} \alpha\ \beta \\ \gamma \end{matrix}\right\} = x^{*l}_{\alpha\beta}\, x^\gamma_{*l}. \qquad \text{(III.45)}$$

72. Derivata covariantă și contravariantă a unui tensor. Derivata unui tensor este o operație tensorială corespunzătoare derivatei comune a funcțiilor scalare și constituie o extindere a acesteia.

Fie t_s componentele covariante ale unui tensor de ordinul întîi (un vector localizat). După legea de transformare:

$$t^*_s = x^k_{*s}\, t_k$$

se obține prin derivare în raport cu x^{*p}:

$$\frac{\partial t^*_s}{\partial x^{*p}} = x^k_{*s}\, x^r_{*p}\, \frac{\partial t_k}{\partial x^r} + x^k_{*sp}\, t_k.$$

Înlocuind în această formulă derivatele de ordinul al doilea din relația (III.43) se constată că apare expresia:

$$t_{k;r} = t_{k,r} - \left\{ \begin{matrix} k & r \\ s & \end{matrix} \right\} t_s. \qquad \text{(III.46)}$$

cu notația:

$$t_{k,r} = \frac{\partial t_k}{\partial x^r}.$$

Expresia (III.46) se numește *derivata covariantă* a componentelor covariante ale unui vector.

Substituția indicată mai sus ne conduce la legea de transformare a derivatei covariante:

$$t^*_{k;r} = \left(x^k_{*s}\, x^r_{*p}\right) t_{k;r}, \qquad \text{(III.47)}$$

care este un tensor de ordinul al doilea, după cum se constată prin legea de transformare (III.47).

Formarea derivatei covariante permite deci formarea de noi tensori, de ordin superior.

În cazul componentelor contravariante, din relația $t_k = g_{ks} t^s$ și din (III.46), deducem:

$$t^m_{;r} = t^m_{,r} + \left\{ \begin{matrix} p & r \\ m & \end{matrix} \right\} t^p, \qquad \text{(III.48)}$$

care este derivata covariantă a componentelor contravariante. Această metodă ne conduce la derivata covariantă a unui tensor de ordin oarecare; de exemplu:

$$t_{sr;m} = t_{sr,m} - \left\{ \begin{matrix} s & m \\ k & \end{matrix} \right\} t_{kr} - \left\{ \begin{matrix} r & m \\ k & \end{matrix} \right\} t_{sk} \quad \text{etc.}$$

În mod analog, prin operația de ridicare a indicelui se obține:

$$t^s_{;k} = g^{sk}\, t_{p;k} \qquad \text{(III.49)}$$

care definește *derivata contravariantă*.

Trebuie de reținut că deosebirea importantă dintre derivarea obișnuită și cea tensorială constă în faptul că în cazul derivării tensoriale repetate trebuie ținut seamă de ordinea de succesiune a derivării.

73. **Deplasarea paralelă a unui vector.** Este clar că în cazul unui sistem de coordonate curbilinii diferențiale, un tensor trebuie să conțină nu numai termeni care provin din variația valorii absolute a componentelor tensorului, ci și termeni datorați caracterului curbiliniu al coordonatelor gene-

Scanned with OKEN Scanner

rale. În aceste condiții, pentru ca diferențiala unui vector să aibă tot caracter de vector, sîntem conduși să o formăm cu derivata covariantă:

$$t_{k;s}\,\delta x^s = t_{k,s} - \left\{ \begin{matrix} s & k \\ & l \end{matrix} \right\} \delta x^s.$$

Dacă derivata covariantă este nulă, vectorul suferă o deplasare paralelă, rămînînd echipolent cu el însuși. Prin urmare, în infinit mic, condiția de paralelism este:

$$dt_k - \left\{ \begin{matrix} s & k \\ & l \end{matrix} \right\} t_l\, dx^s = 0, \qquad \text{(III.50)}$$

al doilea termen provenind din curbura sistemului general de coordonate curbilinii. Pentru g_{sk} constanți (coordonate carteziene), al doilea termen dispare și revenim la diferențiala comună. Justificarea considerațiilor precedente, valabile și într-un spațiu afin, rezultă precum urmează.

Să admitem că egalitatea componentelor vectoriale $\bar{a}(P)$ și $\bar{a}(P')$ are loc într-un sistem de coordonate (x^s):

$$a_k^* \left(x^{*s} + \delta x^{*s} \right) = a_k^* \left(x^{*s} \right),$$

deci:

$$\delta a_k^* = 0,$$

și să efectuăm o transformare de coordonate. După formulele (III.11) și (III.14) avem:

$$a_k = x_k^{*m} a_m^*.$$

Variația componentelor nestelate este dată de relația:

$$\delta a_k = \delta a_k^{*m} a_m^* = x_{kn}^{*m}\, \delta x^n a_m^*.$$

Prin substituția:

$$a_m^* = x_{*m}^p a_p$$

rezultă:

$$\delta a_k = x_{kn}^{*m}\, x_{*m}^p a_p\, \delta x^n.$$

Introducem notația:

$$\Gamma_{sn}^p = x_{sn}^{*m}\, x_m^p. \qquad \text{(III.51)}$$

Printr-un calcul elementar se poate stabili o expresie mai comodă pentru coeficientul (III.51). În acest scop derivăm relația:

$$x_s^{*r} x_{*r}^m = \delta_s^m;$$

rezultă:

$$\Gamma_{sk}^m = - x_{*rp}^m x_s^{*r} x_k^{*p} \qquad \text{(III.52)}$$

Scanned with OKEN Scanner

pe care-l presupunem simetric în indicii inferiori $\Gamma^s_{pr} = \Gamma^s_{rp}$. Aceasta nu este o mărime tensorială deoarece în expresia sa sînt implicate simultan ambele sisteme de coordonate. El exprimă diferența dintre coordonatele raportate la vechiul și cele raportate la noul sistem.

Într-un spațiu metric se verifică ușor că mărimile Γ se exprimă cu ajutorul simbolilor lui Christoffel de speța a doua, presupunînd simbolul raportat la vechile axe ca fiind nul, căci am admis egalitatea componentelor relative la aceste axe. În adevăr, în aceste condiții expresia (III.51) coincide cu (III.45).

Prin urmare, în adevăr, variația $\Gamma^s_{pr}\,\delta k^s$, provenită din transportarea axelor din P în P', se datorește curburii sistemului de coordonate manifestată în spațiul metric prin tensorul fundamental g_{sh}, ale cărui derivate prime figurează în expresiile lui Christoffel.

74. **Ecuațiile geodezicelor.** Într-un spațiu euclidian n-dimensional se deduc ușor ecuațiile geodezicelor. Observăm că mișcarea rectilinie și uniformă a unui punct, raportată la un sistem cartezian de coordonate, se efectuează pe o dreaptă, astfel încît vectorul viteză rămîne mereu paralel cu el însuși. Aplicînd această definiție la mișcarea raportată la un sistem de coordonate generale, condiția ca vectorul viteză — de componente contravariante $a^k = \dot{x}^k$ — să se propage prin deplasare paralelă este, după (III.48):

$$\ddot{x}^k + \left\{ \begin{matrix} r & s \\ & k \end{matrix} \right\} \dot{x}^r \dot{x}^s = 0, \tag{III.53}$$

care sînt ecuațiile geodezicelor în spațiul cu n dimensiuni.

75. **Derivata absolută a unui vector.** Această derivată este dată de expresia

$$\frac{Da^s}{Dt} = \frac{\partial a^s}{\partial t} + \left\{ \begin{matrix} m & n \\ & s \end{matrix} \right\} a^m \frac{dx^m}{dt}, \tag{III.54}$$

admițînd că vectorul $\bar{a}$ este legat de punctul $x^n(t)$, funcție de t. Dacă $\bar{a} = \dot{\bar{r}}$ $(a^r = \dot{x}^r)$ este viteza unui punct mobil, condiția ca mișcarea să se efectueze cu accelerația absolută nulă este dată de ecuația (III.53).

76. **Tensori în spațiul riemannian.** În unele probleme de mecanică analitică reprezentarea formelor mecanice se face în spații mai generale decît spațiul euclidian; de exemplu, într-un spațiu riemannian cu n dimensiuni.

Considerațiile anterioare asupra tensorilor sînt, în general, valabile și într-un astfel de spațiu, caracterizat printr-o metrică de forma:

$$ds^2 = g_{rk}(x^1, x^2, \ldots, x^n)\, dx^r\, dx^k \quad (r, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{III.55}$$

cu $g_{rk} = g_{kr}$ funcții derivabile de coordonate, cu proprietatea că forma pătratică (III.55) este pozitiv definită și că nu poate fi adusă la o formă cu coeficienți constanți printr-o transformare de variabile, cum este cazul într-un spațiu euclidian.

Tensorul g_{rk} definește metrica spațiului și servește, ca și în spațiul euclidian, drept operator în diferitele operații diferențiale și algebrice cu tensorii.

Într-un astfel de spațiu se definesc tensorii în mod analog ca și în spațiul euclidian față de coordonate curbilinii. Într-un astfel de spațiu,

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOTECA CENTRALĂ REGIONALĂ IAȘI

vectorii, ca și tensorii, se definesc algebric prin componentele lor față de un sistem de referință — deci local — și sînt valabile numai în vecinătatea punctului origine a sistemului de referință. Ca și în cazul coordonatelor curbilinii, coeficienții transformărilor sistemelor de referință, unul în celălalt, sînt funcții de coordonate dați prin derivatele parțiale (v. § 79).

Cum în mecanica newtoniană predomină reprezentarea în spațiul euclidian, ne oprim cu dezvoltările asupra calculului tensorial într-un spațiu riemannian la scrierea tensorului lui Riemann-Christoffel, care conduce la tensorul de curbură al lui Ricci-Einstein, specific spațiului riemannian de curbură pozitivă.

77. Tensorul Riemann-Christoffel. Am afirmat și acum vom constata că dacă aplicăm succesiv derivarea covariantă, ordinea în care se efectuează derivarea nu este indiferentă. Această împrejurare permite să se construiască, prin derivare succesivă și în ordine inversă, un tensor de ordinul patru ca funcție de g_{rk} și ca funcție liniară de derivatele lui g_{rk}, tensor care joacă un rol deosebit în aplicațiile la teoria relativității.

Observăm că pentru un scalar avem:

$$\varphi_{;\,r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^r} = \varphi_{,\,r}$$

și

$$(\varphi_{;\,r})_{;s} = (\varphi_{,r})_{,s} - \left\{ \begin{matrix} r & s \\ & n \end{matrix} \right\} \varphi_{,n}.$$

Cum al doilea termen este simetric în indicii r, s, rezultă că derivatele secunde ale unui scalar sînt independente de ordinea în care se efectuează derivarea. Pentru un tensor oarecare de ordin superior lui zero, această proprietate nu mai este adevărată. Să formăm derivata secundă a componentelor tensoriale de ordinul întîi t_r (vector). Avem, după § 72,

$$t_{r;\,s} = t_{r,s} - \left\{ \begin{matrix} r & s \\ & n \end{matrix} \right\} t_n.$$

Derivînd încă o dată în raport cu x^k, se deduce:

$$(t_{r;\,s})_k = (t_{r,\,s})_{,k} - \left\{ \begin{matrix} r & s \\ & n \end{matrix} \right\} t_{n,k} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} r & s \\ & n \end{matrix} \right\} t_n - \left\{ \begin{matrix} k & s \\ & m \end{matrix} \right\} t_{r,m} + \left\{ \begin{matrix} s & k \\ & m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r & m \\ & n \end{matrix} \right\} t_n -$$

$$- \left\{ \begin{matrix} r & k \\ & m \end{matrix} \right\} t_{m,s} + \left\{ \begin{matrix} r & k \\ & m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m & s \\ & n \end{matrix} \right\} t_n.$$

Permutînd indicii s și k între ei, rezultă:

$$(t_{r;k})_s = (t_{r,k})_{,\,s} - \left\{ \begin{matrix} r & k \\ & n \end{matrix} \right\} t_{n,s} - \frac{\partial}{\partial x^s} \left\{ \begin{matrix} r & k \\ & n \end{matrix} \right\} t_n - \left\{ \begin{matrix} s & k \\ & m \end{matrix} \right\} t_{r,m} + \left\{ \begin{matrix} k & s \\ & m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r & m \\ & n \end{matrix} \right\} t_n -$$

$$- \left\{ \begin{matrix} r & s \\ & m \end{matrix} \right\} t_{m,k} + \left\{ \begin{matrix} r & s \\ & m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m & k \\ & n \end{matrix} \right\} t_n.$$

Formînd diferența expresiilor precedente, unii termeni dispar iar ceea ce rămîne este, general, diferit de zero și se scrie:

$$(t_{r;\,s})_{;\,k} - (t_{r;\,k})_{;\,s} = t_n R^n_{rsk}, \qquad \text{(III.56)}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde am pus:

$$R^n_{rsk} = \frac{\partial}{\partial x^s}\left\{\begin{matrix} r & k \\ & n \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} r & k \\ & l \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} l & r \\ & n \end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\begin{matrix} r & s \\ & n \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} r & s \\ & l \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} l & k \\ & n \end{matrix}\right\}, \quad \text{(III.57)}$$

numit tensorul lui Riemann-Christoffel, construit cu derivatele succesive ale tensorului metric g_{rk} (prime și secunde) și este indicat să definească starea de curbură a spațiului, fiind singurul tensor de curbură care se poate construi din g_{rk}. Prin coborîrea indicelui n se construiește tensorul complet covariant:

$$R_{nrsk} = g_{nl}\, R^l_{rsk}.$$

Prin contractare, făcînd în (III.57) pe $n = k$, se obține tensorul contractat al lui Ricci-Einstein:

$$R_{rk} = R^n_{rkn}, \quad \text{(III.58)}$$

care se scrie explicit:

$$R_{rk} = \frac{\partial^2}{\partial x^r\, \partial x^k}(\ln \sqrt{|g|}) - \left\{\begin{matrix} r & k \\ & l \end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x^l}(\ln \sqrt{|g|}) - \frac{\partial}{\partial x^m}\left\{\begin{matrix} r & k \\ & m \end{matrix}\right\} + \\ + \left\{\begin{matrix} r & m \\ & l \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} l & k \\ & m \end{matrix}\right\}. \quad \text{(III.59)}$$

78. **Invariantul de curbură.** Prin ridicarea unui indice și contractare se obține *invariantul de curbură*:

$$R = g^{rk} R_{ck}$$

sau:

$$R = \sum_{rsk}\left[\frac{\partial}{\partial x^s}\left\{\begin{matrix} r & k \\ & k \end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\begin{matrix} r & s \\ & k \end{matrix}\right\}\right] + \sum_{m}\left(\left\{\begin{matrix} k & s \\ & m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} m & s \\ & k \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} r & s \\ & m \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} m & k \\ & k \end{matrix}\right\}\right), \quad \text{(III.60)}$$

care joacă un rol important în mecanica relativității generale, pentru scrierea ecuațiilor de cîmp.

Proprietățile tensorului lui Riemann-Christoffel, al lui Ricci-Einstein și dezvoltarea calculului tensorial așa cum este necesar în fizica și mecanica modernă, peste mecanica newtoniană, se găsește în tratatele de specialitate [v. I. Plăcinteanu, „Vectori Potențiali. Tensori", 1948 [34]; N. E. Kocin, „Calculul vectorial și introducere în calculul tensorial", (traducere din limba rusă), București, Editura Tehnică, 1954].

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. *Isaac Newton*, „Philosophie Naturalis Principia Mathematica" London, 1687. Tradus „Principiile matematice ale filosofiei naturale" Edit. Acad. R.P.R., 1956.
2. *J. L. Lagrange*, „Mécanique Analytique", Paris, 1788.
3. *P. Appell*, „Traité de Mécanique rationnelle" (5v. Gauthier-Villars, Paris 1923—1933.
4. *T. Levi-Civita e U. Amaldi*, „Lezioni di Meccanica razionale", 3 vol. N. Zanichelli, Bologna, 1923.
5. *G. Hamel*, „Elementare Mechanik", Teubner, Berlin, 1912.
6. *E. T. Whittaker*, „A Treatise on the Analitical Dynamics", University Press, Cambridge, 1927.
7. *A. G. Webster*, „The Dynamics" Teuber, 1925.
8. *Max Planck*, „Einführung in die allgemeine Mechanik", S. Hirzel, Leipzig, 1919.
9. *Ed. J. Routh*, „Dinamics of Particles", Cambridge, 1898. „Dynamics of a sistem of Rigid Bodies, I. The Elementary Part, II. The Advanced Part", Mac Millan, London 1930.
10. *G. D. Birkhoff*, „Dynamical Systems", Amer. Math. Soc. New-York, 1927.
11. *R. Marcolongo*. „Meccanica razionale", I, II 21. Hoepli, Milano, 1923.
12. *Cl. Schaefer*, „Einführung in die theoretische Physik", Verein wiss. Verläger, Berlin, 1922.
13. *L. Nordheim*, „Die Prinzipien der Mechanik". Handbuch der Physik, vol. V. Springer, Berlin 1927
14. *E. Mach*, „La Mécanique", A. Hermann, Paris, 1904.
15. *Mechanik*. Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, vol. IV, Teubner, Leipzig, 1921.
16. *George Prange*, „Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik, Encyclopädie", vol. IV—4, p. 507, Teubner, Leipzig, 1921.
17. *C. L. Charlier*, „Mechanik des Himmels", 2 vol. V. Veit, Leipzig, 1902.
18. *L. Nordheim und E. Fues*, „Die Hamilton-Jacobische Theorie der Dynamik", Handbuch der Physik, vol. V. Springer, Berlin, 1927.
19. *G. Bruhat*, „Mécanique", Masson, Paris, 1940.
20. *Max von Laue*, „Die Relativitätstheorie", 2 vol. Vieweg, Braunschweig, 1921.
21. *Max Born*, „Vorlesungen über Atommechanik", J. Springer, Berlin, 1925.
22. *E. Cartan*, „Leçons sur les invariants intégraux" Hermann, Paris, 1922.
23. *Leon Brillouin*, „Les tenseurs en Mécanique et en Elasticité", Masson, Paris, 1938.
24. *T. Levi-Civita*, „The absolute differential Calculus", Blackie, London, 1927.

Scanned with OKEN Scanner

25. *A. Ioachimescu*, „Mecanica raţională", Imprimeria Naţională, Bucureşti, 1947.
26. *A. Sommerfeld* „Atombau und Spektrallinien", Vieweg, V-te Auflage, Braunschweig, 1935.
27. *D. Hilbert und R. Courant*, „Methoden der mathematischen, Physik", I, II, Springer, Berlin, 1937.
28. *H. Poincaré*. „Méthodes nouvelles de la mécanique céleste". Gauthier-Villars Paris, 1905.
29. *J. Chazy*. „Cours de mécanique rationnelle", Gauthier-Villars, Paris, 1933.
30. *P. Painlevé*. „Cours de mécanique", Gauthier-Villars, Paris, 1930. „Leçons sur l'intégration des équations de la mécanique", Paris, 1895.
31. *F. Tisserand*, „Traité de mécanique céleste", Ganthier-Villars, Paris, 1896.
32. *S. Sanielevici*, „Curs de Mecanică raţională". 2 vol. Casa Şcoalelor Bucureşti, 1929, 1931.
33. *N. Ciorănescu*, „Ecuaţiile Mecanicii analitice", Academia Romînă, Bucureşti, 1938.
34. *I. Plăcinţeanu*, „Elemente de Calcul vectorial şi tensorial", Editura Laboratorul de Mecanică, Iaşi, 1941.
„Electromagnetismul, Teoria lui Maxwell", Monografii, Academia Romînă, Bucureşti, 1941.
„Mecanica raţională şi analitică", Ed. Ath. Gheorghiu, Iaşi, 1942.
„Vectori Potenţiali. Tensori", Ed. Ath. Gheorghiu, Iaşi, 1948.
35. *V. Vâlcovici*, „Curs de mecanică", Litografiat, Bucureşti 1952.
36. *И. В. Мещерский*, „Работы по механике тел переменной массы", Госиэтехтеолит, Москва 1949.
37. *J. C. Slater* and *N. H. Frank*, „Mechanics". Mc. Graw-Hill, New-York, 1947.
38. *G. Hamel*, „Theoretische Mechanik", Springer Leipzig, 1949.
39. *G. K. Suslov*, „Mecanica raţională" I, II Traducere din limba rusă, 1950.
40. *R. R. Edwards*, „Analytic and Vector Mechanics", Mc. Graw-Hill, London.
41. *Franz Krbek*, „Grundzüge der Mechanik", Gerst u. Portig, Leipzig, 1954.
42. *A. I. Nekrasov*, „Curs de mecanică teoretică", I, II Traducere din limba rusă, Ed. Tehnică, Bucureşti 1955.
43. *A. Sommerfeld*, „Mechanik", Akad. Verlaggesellschaft Gerst u. Portig K—G.
44. *А. А. Космодемьянский*, „Курс теоретической механики", Госуцедиз, Москва 1955.
45. *Istvan Szabo*, „Höhere technische Mechanik", J. Springer Berlin, 1956.
46. *M. Simonici*, „Dinamica construcţiilor", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1958.
Celelalte lucrări folosite sînt citate în text.

BIBLIOTECA CENTRALĂ REGIONALĂ IAŞI

Scanned with OKEN Scanner

INDEX DE AUTORI

Agostinelli C. 520
Appel P. 46, 217, 223, 373 ş.u.
Arhimede din Siracuza (287—212 î. e. n) 17
Aristotel din Stagia, Macedonia (384—322, î.e.n.) 18, 53
Armelini G. 46, 427
Atwood G. 214, 252

Balmer J.J. 103
Bernoulli Daniel 472
Bessel F. W. 210, 212
Binet J. 92, 100, 107, 547 ş.u.
Birkhoff G.D. 719
Bobîlev D. 241
Boek, Van den ~ 106
Bogoliubov N. 83, 554
Bohr Niels 64, 99, 438, 439, 463, 469
Boltzmann L. 317
Bogen P. 77
Born Max 270, 426, 456, 463, 464
Brilloin L. 710
Brillouin M. 269
Broglie, Louis de ~ 314, 359, 360, 383, 388, 400
Bruhat G. 719
Bruns H. 462
Bucherer A.H. 546
Burgers J.M. 422 ş.u.

Carathedory C. 318, 392, 393
Carnot L. 282, 283
Caro E. de ~ 485
Cartan E. 404
Cauchy A.L. 47, 332, 443
Cayley A. 498
Chadwick J. 106
Chapin E.K. 516
Charlier C. 456, 463, 464
Chasles J. 187, 189
Chazy J. 107
Christoffel E. B. 114, 331, 332, 377, 380, 381, 678, 681, 712, 713, 716, ş.u
Ciorănescu N. 720
Compton A. 441
Copernic N. 19
Coriolis G.G. 32, 147, 148, 199, 516
Coulomb. C. A. 99, 105, 136, 137, 264, 269
Courant R. 472

D'Alembert Jean 18, 45, 294, 330, 364, 365, 372 ş.u.
Darboux G. 118
Dirac P.A.M. 439 ş.u. 533, 534
Dirichlet-Lejeune P.G. 51, 52

Edwards R.R. 720
Ehrenfest P. 421 ş.u.
Eichénwald A. 536
Einstein Albert 148, 159, 161, 438, 535, 536, 537, 544, 717, 718
Eötvös R. v. ~ 21, 148, 159, 161
Esclangon E. 107
Euler Leonard 18, 196, ş.u. 205, 219, ş.u. 227, 229, 231, 232, 234, 235, 240, 245, 247, ş.u. 258, 259, 261, 303, 304, 314, 324, 326, 330, 334, 335, 345, 351, 354, 355, 357, 358, 375, ş.u. 385, 457, 507. 509, 510, 513, 518, 681

Faraday M. 22, 535
Fermat Pierre 314, 359, 360, 363
Fitzgerald G. 541
Fizeau H. 536
Foucault Léon 146, 148, 155, ş.u.
Fourier G.B.G. 85, 425, 462, 468, 474, 555
Fowler J. F. 103
Frank N.H. 720
Frenet J.F. 30, 83, 303, 363, 676
Frobenius C. 368
Fues E. 719

Galilei Galileo 18, 34, 53
Gamov G. 41, 533
Gauss C.F. 45, 114, 314, 361 ş.u. 362, ş.u., 679, 680, 692, 694
Geiger H. 106
Genty Robert 493
Gheorghiță Ștefan 554

Scanned with OKEN Scanner

Gibbs J.W. 422 ş.u., 426
Giorgi G. 47
Goddard R. 502, 503, 512
Goursat 642
Green J. 694
Grioli G. 241
Guldin H.P. 184

Hadamard J. 242
Hamel G. 319, 512
Hamilton W.R. 19, 314, 354, ş.u. 359, 371, 373, 374, 383 ş.u. 388, 392, 397, 398, 406, 408, 431, 438, 442, 445, 446, 448, 450, 453 ş.u. 457 460, 464, 466, 469, 526, 527, 533, 534
Harres Fr. 536
Hartog J.P. 478
Heissenberg W. 383, 438, ş.u.
Helmert G. 152
Helmholtz H. v. 336, 377
Hertz H. 63, 64, 314, 317, 320, 337, 363, 422 ş. u. 426, 535
Hess K 241
Hesse 395, 447, 452
Heun K. 369, 370
Hilbert D. 472
Holtsmark J. 77
Hooke 19
Hôpital, 139
Huygens Chr. 18, 146, 209, 210, 213, 266, 388

Ioachimescu A. 720
Iacob Caius 87, 107

Jacobi C.G.J. 383, 388, 391, 411, 416, 417, 433, 436, 442, 445, 446, 448, 450, 453 ş. u. 460, 464, 466, 469, 533, 534, 687
Joule J. P. 41

Kater H 210 ş. u.
Kaufmaun W. 546
Kepler Jean 95 ş. u. 428
Kirchhoff G. R. 323
Klein Felix 51, 267, 478
Kocin N. E. 718
Kosmodemianski A. A. 13, 504, 505, 509, 510, 524, 526
Kowalevski Sofia 18, 235, 239 ş. u.
König S. 171, 178, 217, 259, 523
Krbek Franz 720
Krîlov N. 83, 84, 554
Kronecker L. 378, 414, 431, 460, 678, 701, 703, 711

Lagrange J. L 18, 19, 235, 248, 263, 294, 313, 325, 327, 328, ş. u. 342 ş.u. 353 ş. u. 362, 364, ş. u. 370, 371, 373, 376, 382 ş. u. 392, 394, 395, 427, 430, 431, 433, 434, 457 ş.u. 472, 473, 477, 506, 524, 526, 527, 530, 533.

Lampariello G. 653
Langevin P. 45, 87
Lapin A. I 495
Laplace P. S. 171, 457, 694
Laue, Max von 719
Lecornu L 46
Legendre A. M. 120
Leibnitz 42
Lejay R. P. Pierre 212
Leverrier U. J. J. 456
Levi-Civita Tullio 19, 36, 52, 265, 289, 299, 377, ş. u. 399, 422, 427, 449, 450, 477, 482, 483, 486, 510, 524, 524, 529, 530
Liapunov A. M. 19, 52
Liouville J. 340, 342, 417, 421, 448, 453, 454
Lie Sophus 389, 423
Lipschitz R. 363
Lissajous P. 67, 466, 469
Lorentz H. A. 77, 535, 536, 537, 539, 540, 541, 542, 544
Lyman Th. 103

Mac Millan 497
Mach E. 505
Manacorda I 242
Marcolongo R. 719
Marsden E. 106
Mathieu E. 394
Maupertuis, P.L.N. de ~ 314, 356, ş.u.
Maxwell J. Cl. 61, 535
Mendeleev D. I. 106
Mescerski I. V. 19, 40, 482, 509
Meusnier C. 117, 678
Michelson A.A. 536
Minkowski H. 538, 540
Morin M. 136, 137, 264, 269

Nekrasov A. I. 720
Newton Isaac 18 ş. u. 33 ş.u. 45, 53, 92, 96, 103, 147, 281, 349, 456, 457, 535, 544
Noble H. R. 536
Nordheim L. 719

Obert H. 504, 505, 508, 512
Onicescu Octav 185, 557
Ostrogradski M. V. 691

Painlevé P. 265 ş.u.
Peaucellier 623
Penfield R. 551
Pfaff J. L. 320, 364, 367 ş. u. 378, 380, 391 ş. u. 405
Pickering G. 103
Pitagora (569—500 î.e.n.) 19, 664
Plăcinţeanu I. I. 284, 397, 430, 442, 462, 529, 532, 560, 718
Planck Max 64, 77, 100, 323, 349, 388, 418, 438, 439, 533
Pohl R. W. 21, 55
Poincaré Henry 19, 383, 401, 403, 406, 457, 462, 528, 530

Scanned with OKEN Scanner

Poinsot L. 224, 225, 234, 248
Poisson S. D. 84, 235, 248, 263, 394, 423, 430, 432, 433, 436 ş. u. 457 ş.u.
Prandtl L. 183
Prange G. 393

Rayleigh, Lord ~ 470, 474
Reich F. 148
Reynolds 505, 546
Ricci Gr. 378, 380, 381, 717, 718
Riemann B. 677, 717, 718
Ritz W. 102
Roberval 623
Rogers M.M. 546
Rogers F. T. 546
Routh Ed. 336, 350, 370, 475 ş. u.
Röntgen W. C. 536
Rutherford E. 99, 105, ş. u.
Rydberg J. R. 102, 551

Sagnak J. 536
Sanielevici S. 720
Saint Germain A. de ~ 373
Sawtchenko K. 495
Schaefer Cl. 719
Schrödinger Ervin 383, 388, 440, ş.u. 532, 533
Siacci 566, 567
Signorini A. 241, 242
Silvester T. T. 472
Simonici M. 720
Slatter J. C. 720
Sommerfeld A. 255, 324, 405, 418, 422, 423, 438, 439, 456, 463, 478, 550, 551
Stäckel P. 422, 448, 450, 451, 453, 454, 456, 466
Steiner K. 178, 217
Steklov D. 241
Stoenescu Al. 619
Stokes G. G. 404, 405, 409, 697, 698
Storchi E. 355
Sundman K. 457
Suslov G. K. 241
Szabo I. 720

Taylor G. J. 67, 554
Teleman C. 382
Thomson J. J. 336
Thomson W. 336
Timoshenko S. 83, 478
Tisserand T. 46
Trouton Fr. T. 536
Tycho Brache 96

Ţiolkovski K. E. 19, 486, 487

Varignon P. 297, 298
Vâlcovici V. 514
Vinci, Leonardo dă ~ 18
Voltera V. 591
Vrănceanu Gh. 320, 378, 381, 382, 528, 529
Vrkljan S. 454

Watt James 41, 476, 477
Wattson G. 377
Weber 45, 46
Webster 719
Weierstrass K 129, 223, 476
Whittaker E. 377, 419, 476
Wilson H. A. 105, 106, 536
Wintner Aurel 81

Zatzkis H 551
Zeeman P. 159, 536

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
IAŞI

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

INDEX DE CUVINTE

Acceleraţia greutăţii 53, 151
— în mişcare relativă 31
Acceleraţie 29
— centrală 32
— centripetă 32, 199
— circulară 32
— de transport 32
— relativă 32
— tangenţială 199
— unghiulară 32, 199
Aderenţă (frecare statică) 136, 264
Afeliu 94
d'Alembert, principiul ~ 294, 364
Alunecare 135
Amortizare prin frecare 71
Amplitudinea oscilaţiei 58
Analogie electro-mecanică 74, 78
Anomalie adevărată 93, 97
— excentrică 97
An platonic 249
Anvergură 487
Aparate înregistratoare 76
Aplicaţie cuantică 547
Appel, ecuaţiile şi funcţia ~ 373
Armonică 473
Atom, modelul clasic ~ 64
Atracţia universală 92
Atwood, maşina ~ 214, 252
Autoblocare, fenomenul ~ 265
Avionul cu motor aeroreactiv 500
Ax de suspensie a pendulului fizic 207
Axă centrală 670
— oscilantă a pendulului fizic 207
Axe legate de corp 219
— permanente de rotaţie 206
— principale de inerţie 177, 179
— spontane de rotaţie 206, 207
Axiomă dimensională 665, 666
Axoidă fixă 192
— mobilă 192

Bază 193
— în cîmp vectorial 666
Bătăi 60, 63
Bessel, pendulului ~ 210
Bilanţul energiei 282
Binet, ecuaţia (formula) ~ 92, 100, 547, 548
—, problema ~ 585
Bobîlev - Steklov, cazul ~ 241
Bohr, atomul ~ 99
—, legea frecvenţelor ~ 551
Bohr-Sommerfeld, condiţiile cuantice clasice ~ 439
Bucherer, experienţele 546
Burgers, teorema ~ ş.u 422, 424

Calcul tensorial, elemente ~ 699
~ vectorial, elemente ~ 663
Cantitate de mişcare 37
Caracteristice cinetice 366
Carnot, teorema ~ 282
Catastrofă atomică 99
Cauchy, condiţiile ~ 443
— , teorema de existenţă ~ 332
Cazuri particulare de integrabilitate 241
Căderea corpurilor grele în aer 56, 154
Centru de greutate, (de masă) 164, 183
— impulsie 274
— momentan de rotaţie 191
Centrul acceleraţiilor 191
Cerc eliptic 250
— geoedzic (Darboux) 118
Chasles, teorema ~ 187, 189
—, vectorul ~ 189
Christoffel, principiul ~ 377
—, simbolii ~ 114, 332, 380, 381, 678, 681, 712, 713, 716
Ciocanul şi cuiul, exemplu: ~ 282
Cinematica 22
— punctului material 22
— relativistă 535
— rigidului 187
Ciocnire elastică 283
— neelastică 282
Ciocnire perfect elastică 281
— neelastică (moale, plastică) 281
— directă a două sfere 280
Ciocniri de corpuri rigide 272
— mecanice 280
Circulaţia unui vector 686
Cîmp 682

Cîmp de vîrtejuri 695
— gravitaţional 20
— scalar 682
Cîmpul gravităţii pămînteşti 44
Cîmpuri irotaţionale 686
— rotaţionale 695
— vectoriale 685
Coeficient de frecare dinamică 137, 264
— — — statică 136, 264
— — restituire 281
Coeficienţi asociaţi 678
Componenta covariantă a acceleraţiei 327
— — — forţei generalizate 327
Componente contravariante 700, 702, 712
— covariante 700, 703, 712
Compresiuni 295,
Con de frecare 264
Condiţia de hermiticitate 439
— — staţionaritate 353
Condiţii de echilibru 284
— dinamice pentru o mişcare plană 215
— necesare şi suficiente de echilibru a rigidului 287
Condiţiile de echilibru al unui punct material liber 50
Conexitate liniară 681
Congruenţă 399
Congruenţe, calculul 378
— ortogonale 378
Constanta de radiaţie 64
— fazei 58, 61
— structurii fine 550
Constante arbitrare esenţiale 443
— canonice 459
Consum de combustibil pe secundă 484
— specific 484
Contracţie 702
Contracţia lungimilor 541
Contravariantă 700, 702, 712
Coordonate cilindrice 691
— conjugate 384
— curbilinii 687
— generale 687
— generalizate 314, 315
— lagrangiene 315
— normale 472
— ortogonale 690
— polare sferice 690
Copernic, sistem ~ 19
Corespondenţă biunivocă 406
Coriolis, acceleraţia ~ 32, 199
— , forţa ~ 147, 148, 516
Corp material 20
— omogen de rotaţie 181
— rigid 20, 536
Coulomb, legea ~ 99, 105
Coulomb-Morin, experienţe ~ 269
—, legea ~ 137, 264
Covariantă 700, 703, 712
Cuantizarea impulsului 323
Cuasicoordonate 366
Cuasiergodic 422, 469
Cuasiperioadă 60
Cuplu, 672
— , axa ~ 672
Curbă caracteristică 443
— extremală 353
— de siguranţă 90
— orară 333
Curbe autoparalele 382, 676
— tautocrone 145

Decrement logaritmic 70
Densitate 672
Deplasare paralelă a unui vector 714
— spontană 318
Deplasări 317
— de frontieră 322
— posibile reale 317
— reversibile 322
— virtuale 290
— virtuale, compatibile cu legăturile 318
Derivare cuantică spaţială 440
— — temporară 440
Derivată absolută a unui vector 695, 716
— cotravariantă 713, 714
— covariantă 713, 714
— de direcţie 683, 686
— geometrică 683, 686
— , reprezentarea geometrică ~ 675
Descreşterea logaritmică 70
Determinări relative gravimetrice 213.
Devierea proiectilelor din planul vertical (meridian) 155
Deviaţia verticalei din cauza rotirii pămîntului 150
Dilatarea timpului 541
Dinamica punctului material 47
— relativistă 543
Dipol 63
Dirac, ecuaţia ~ 533, 534
Direcţie 664, 667
Dirichlet-Lejeune, teorema ~ 51
Dispersia energiei 268
Distribuţia acceleraţiilor în corpul rigid 199
— vitezelor 187
Distribuţia continuă de puncte materiale 181
Divergenţă 413, 693
— în coordonate generale 693
— , vectorul ~ 710
Domeniu continuu simplu conex 681
Dungi de interferenţă 62
Dyna 36

Echilibru cu frecare 285
— indiferent 52
— instabil 52

Scanned with OKEN Scanner

Echilibru pe o suprafaţă sau o curbă fixă 115
— relativ 148
— — la suprafaţa pământului 149
Echilibrul scării 267
— unui fir greu 305
Echinoxul de primăvară 249
Ecuaţia cu derivate parţiale a mecanicii 444
— energiei 218
— — totale 168
— fundamentală a mecanicii relativiste 543
— momentului cinetic 218
— secular 709
Ecuaţii de mişcare 370, 472
— — — a punctului material 544
— — — — trei corpuri cu masă variabilă 529
— — transformare 394, 395
Ecuaţiile intrinseci ale mişcării (ecuaţii normale) 112, 117, 303
— mecanicii ondulatorii pentru un punct cu masă variabilă 532
— mişcării 146, 162, 215
— variaţiilor 401
Efect de amortizare 64
Efecte giroscopice 244
Electrodinamica 535
Electronul legat 73
Element de stare 386
Elemente racordate 390
Elice dextrorum 190
— sinistrorum 190
Elipsoid de inerţie 175
— — — central 178
Elongaţie 58
Emisiune prin antenă 64
Energia cinetică a rigidului 200
— proprie a punctului material 546
Energie 536
— cinetică 42, 166, 546
— — , definiţia ~ 523
— — , teorema ~ 524
— de acceleraţie 373
— internă 168
— potenţială 43
— — a sistemului 168
— totală 59
Eötvös-Zeeman, experienţa ~ 21, 159
Erg 41
Eter 60, 536
Euler, ciclul ~ 249
—, ecuaţiile 219, 220, 222, 227, 229, 232, 245, 259, 314, 315, 354, 355, 358, 376, 509, 511, 513, 681
—, metoda ~ 518
Euler-Poinsot, cazul ~ 234, 235
Euler, relaţiile ~ 213, 234, 259, 261
— , studiul mişcării în cazul 222
— , teorema, 326, 335
Euler , unghiurile ~ 196, 221, 223, 231, 232, 235, 247, 250, 259, 324, 345, 357
Experienţa firului 56

Faza 58
Fermat, principiul ~ 359 ş. u.
— — optic ~ 314
Fir aşezat pe o suprafaţă, cu frecare 308
— omogen greu 307
— pe suprafaţă 307
Fire flexibile şi inextensibile 299.
Fitzgerald şi Lorentz, ipoteza contracţiei ~ 541
Fixări subite 278
Fluxul unui vector 691
Forme normale 471
Forţă centrifugă 148
— — compusă 148
— de transport 147
— elastică 57
— fictivă 294
— reactivă 482
— reală 294
— vie 42
Forţe 21, 295
— active 110
— aparente 147
— conservative 44, 167, 327
— de acţiune 110
— — legătură 110
— — — exterioare 163
— — inerţie 147
— — reacţiune 163
— instantanee 34
— interne 162
— localizate 162
— paralele, cazul ~ 298
— reale 147
Foucault, experienţa 158
— , pendulul ~ 146, 155
Fourier, serii ~ 468, 474
Frecare de alunecare 135, 263, 264
— — mişcare (dinamică) 135, 136
— — pivotare 263, 269
— — repaus (statică) 135
— — rostogolire 263, 268
— — sfredelire 263
— dinamică 264
— statică (aderenţă) 264
Frecvenţă 26
Frenet, a doua formulă ~ 676
— , a treia formulă ~ 676
— , formulele ~ 30, 303
— , prima formulă ~ 676
— , relaţiile ~ 363
Frobenius, teorema ~ 368
Funcţia caracteristică 357
— de acţiune 357
— de forţă 42
— de q - bornată 465
— generatoare a transformării 391 394
— potenţială 42

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia principală 386
Funcţii perturbatoare 458

Gal 49, 53
Galilei, grupul ~ 539
Gamov, ecuaţia ~ 41
Gauss, formulele ~ 678, 689, 692, 694
Gauss-Ostrogradski, formula ~ 691
Gauss, principiul ~ 361 ş. u.
Geodezice, ecuaţiile ~ 716
Giroscopul adormit 243, 477
— fixat într-un punct 242
— liber 259
Goddard, metoda ~ 502
Gradient 684
Gravitaţia universală 96
Green, formulele 694
Greutate 151
Grup funcţional 438
— galileian 535
— liniar general 390
Guldin P., teoremele ~ 184

Hamilton, ecuaţiile ~ 383
— — canonice ~ 384
— — pentru corpul cu masă variabilă ~ 527
Hamilton-Jacobi, ecuaţia ~ 460, 464, 466, 469, 533, 534
— , — cu derivate parţiale ~ 383, 442, 446 448, 450
— , — liniară ~ 445, 446, 448, 453, 455
— , metoda 385 ş. u.
Hamilton, principiul ~ 354, ş. u. 359, 377, 392
— , funcţia ~ 384, 385, 421, 527, 533
Helmholtz, teorema ~ 336
Herpolodie 225, 226
Hertz, oscilatorul ~ 63
Hess, cazul ~ 241
Hesse, determinantul ~ 447, 452
Hodograf 675
Holtsmark, teoria ~ 77
Huygens, teoremele ~ 209, 210

Impuls 37, 201, 328, 546
— , noţiunea generalizată ~ 201
Impulsie, o singură ~ 274
— generalizată 343
Impulsii 39, 172, 272
— aplicate unui rigid complet liber 277
Impulsuri generalizate 317, 327
Indice de refracţie 359
Inerţia energiei 547
Integrala ariilor 49
— energiei 48, 54, 234, 333
— primă a energiei 166
Integrale conjugate 437
Integralele impulsurilor 336
Integrarea ecuaţiei mişcării 112

Interferenţa oscilaţiilor armonice 60, 61
Invariant adiabatic 421
— absolut 404
— complet 404
— cubic 709
— de curbură 718
— integral 405, 408, 409
— — absolut, complet 404
— liniar 709
— pătratic 709
— relativ 404
Invarianţa elementului de ipervolum 542
Invarianţii integrali 403
— — ai sistemelor hamiltoniene 398
— scalari 670
Involuţie 437

Încărcare atomică 107

Jacobi, , identitatea ~ 433, 436
— multiplicatorul ~ 411
— , teorema ~ 687

Kater, pendulul ~ 210, ş.u.
Kaufmann A., experienţele ~ 546
Kepler, ecuaţia (legile) ~ 95, ş.u.
Kirchhoff, legea ~ 323
Kowalevski, S, cazul ~ 235, 239, 241
König S., teorema ~ 171, 178, 217, 259
— , teorema generalizată ~ 523
Krîlov-Bogoliubov, metoda ~ 554
Kronecker, simbolul ~ 378, 414, 460, 678, 701, 703, 711

Lagrange, ecuaţia centrală ~ 329
— , ecuaţiile ~ 325 ş.u. 327, ş.u. 335 ş.u. 346, 348, 355, 357, 358, 366, 370, 371, 382, 384, 427, 459, 472, 473, 477, 526
— — în cuasicoordonate 371,
— , ecuaţiile pentru corpul cu masă variabilă ~ 524
— , funcţia ~ 327, 328, 334, 335, 354
— , metoda multiplicatorilor ~ 294
— , multiplicatorii 356, 362, 365, 371, 376, 395, 506,
Lagrange, operatorul ~ 533
Lagrange-Poisson, cazul ~ 235, 248, 263
— , parametrii ~ 376
— , parantezele ~ 394, 430, 433, 459
Laplace, operatorul ~ 694
Lănţişorul 305
Legături 39, 317
— de interacţiune 162
— fără frecare 317
— neolonome 317, 319
— olonome 317, 318
— reonome 163, 317, 318
— scleronome 163, 317

Scanned with OKEN Scanner

Legea căderii corpurilor în vid 53
— conservării impulsului 481
— de adunare a vitezelor 542
— — mișcare a punctului cu masă variabilă 40
— fundamentală a mecanicii 37
— independenței acțiunii forțelor 481
— paralelogramului 36
Legendre, integralele ~ 120
Legile de transformare a accelerațiilor 544
— — — — forțelor mecanice 544
Lema fundamentală a calculului variațional 353
Levi-Civita, cazurile ~ 510, 524, 528, 529
— —, condițiile ~ 449
Librație îngrădită 446
— pură 466
—, fenomenul ~ 463, 467
Linia nodurilor 99
Linie a universului relativist 540
Linii de curent 384
— geodezice 115, 307
— — pe suprafață 680
— spectrale, lărgirea ~ 77
— staționare în spațiu 384
Liouville, metoda ~ 453
—, teorema ~ 417, 448, 454
—, sisteme de tipul ~ 340, 342.
Lissajous, figurile ~ 67
—, mișcarea ~ 466, 469
Lorentz, formulele (transformările) ~ 540, 542
—, forțele generalizate ~ 544
—, grupul ~ 536
—, grupul de transformări ~ 537, 539
Lorentz-Planck, teoria ~ 77
Lucru mecanic elementar 41
— mecanic motor 41
— mecanic rezistent 41
Lucrul mecanic total 42

Maree, fenomenul ~ 149
Masă 20, 536
— de inerție 174
— — repaus 481
— — mișcare 481, 545
— — — variabilă cu viteză 535
— energetică 547
— gravifică 20
— inertă 20
— longitudinală 545
— redusă 455
— transversală 545
— variabilă cu timpul 481
Matrici hermitice 439
Maupertuis, principiul ~ 356 ș.u.
—, — mecanic 314
Maxwell, teoria ~ 535
Mărimi aritmetice 663
— complexe 663
— de stare 60, 681
— direct observabile 439
— fizice 663
— matematice 663
— operatori 440
— principial observabile 439
— scalare 663.
— tensoriale 663
— vectoriale 663
Mecanica analitică 311
— —, ecuațiile ~ 311
— atomică 457, 464
— cerească 251, 457, 463, 464, 471
— corpului cu masă variabilă 479
— cuantică 383
— newtoniană 19, 355
— ondulatorie 314, 355, 359, 383, 385, 388, 440
— operatorie 440
— relativistă 355
— statistică 315
— vectorială 15
Mecanisme de orologerie 279
Mersul omenesc 165
Mescerski, ecuațiile ~ 482, 509
—, legea ~ 497
Metoda aproximațiilor succesive 460
— coincidențelor 212.
— funcțională 185
— înregistrărilor 212
— reducerii la sistem olonom 370
Metode variaționale în problemele dinamicii punctului cu masă variabilă 502
Meusnier, teorema ~ 117, 678
Minim efectiv 360
Mișcare armonică 58
— asimptotică 122
— centrală 33
— circulară 26, 32, 123
— — continuă 120
— cu frecare 135
— cuasiperiodică 463
— de librație 342
— — pivotare 225
— — rostogolire 193, 225
— — sfredelire 269
— degenerată 103
— elicoidală 189
— — momentană 189
— eliptică 97
— hiperbolică 104
— impulsivă 267
— isocronă 70
— nevariată 475
— parabolică 103, 104
— pendulară 121

Scanned with OKEN Scanner

Mişcare rectilinie 26
— — uniform accelerată 32
— stabilă 472, 475
— staţionară 474
— strict periodică 342
— variată 475
Mişcarea absolută 19, 484
— cometelor 103
— cu frecare pe o curbă fixă 142
— de pornire a trenului 270
— inerţială a unui punct material 558
— — — — sistem de două puncte materiale 558
— medie 97, 430
— în jurul unui punct fix 192
— pământului 248
— paralelă cu un plan fix 190
— pe o curbă dată 111
— — — suprafaţă dată 113
— plană 26, 215
— punctului legat fără frecare 110
— relativă 19, 27, 34, 146
— — a unui punct greu la suprafaţa pământului 152
— — în jurul centrului de greutate 169
— rigidelor cu frecare 263
— rigidului, cazuri particulare ~ 190
— — „greu" în jurul unui punct fix 234
— — în jurul unei axe fixe 201, 518
— — — — unui punct fix 219
— — liber 247
— tautocronă 59
— unui rigid în contact cu un plan fix 258
— — — paralelă cu un plan fix 215
— verticală ascendentă 54
Mişcări condiţionat-periodice 463, 466, 469
— periodice 58, 463
— — liniare 464
— perturbate 430, 458, 459
— vibratorii 470
Modul (valoare absolută) 664
Moment cinetic 201
Momente centrifugale 175
— de deviaţie 175
— — inerţie 173, 174
— principale de inerţie 177
Mulţime de puncte materiale 162
Multiplicare interioară a tensorului cu un vector 706
— exterioară a unui vector printr-un tensor 706

Newton, coeficientul ~ 281
— , mecanică ~ 535
Noduri 295
Notă fundamentală 473
Număr atomic 107
— cuantic principal 103
Numere 663
Numere-q 440

Obert, metoda ~ 505
Omografie inerţială 174
Optica geometrică 314, 388
— ondulatorie 388
Orientare 663
Oscilatorul 57, 323
— liniar armonic 57
— — relativist 551
Oscilaţii amortizate 67
— — aperiodice 68
— — periodice 69
— armonice suprapuse bidimensionale 65
— auto-întreţinute 78
— cu caracteristici variabile 78
— eliptice şi circulare 65
— în jurul unei poziţii de echilibru 66
— întreţinute 75
— neliniare 81
— pendulare 123

Painlevé, obiecţiile ~ 265
Particulă captată 481, 482
— emisă 481, 482
Peaucellier, inversorul ~ 623
Pendul acordat 255
— balistic 275
— de torsiune 210, 212
— dezacordat 255
— dublu 252, 254
— fizic 207
— matematic 118
— reversibil 210
— sferic 127
— simplu 119
— sincron 207
Pendule simpatice 255
Periheliu 94
Perimetru de sprijin 288
Perioadă 26, 58
Perpetuum mobile 168
Perturbaţiilor, calculul ~ 456
Pfaff, forma ~ 364, 367, ş.u., 378 392, ş.u., 405
— , sistem de forme, ~ 320, 367
Pitagora, teorema ~ 19, 664
Pivotare 135
Plan invariabil 171
Planck, constanta ~ 100, 323, 533
— , principiul ~ 323
Planul eclipticei 99
— arilor maxime 166
— înclinat 138
Plane principale de inerţie 177
Podul suspendat 309
Pohl, experienţele 21, 55

Scanned with OKEN Scanner

Poincaré, transformarea (canonică) 528, 530
Poinsot, mişcarea 248
Poisson, ecuaţiile pentru mişcarea perturbată ~ 459
— , parantezele ~ 394, 423, 430, 432, 433, 439, 440, 459
—, teorema ~ 436, 437
Polarizarea luminii 66
Poligon funicular 296
— — plan 298
Poligonul forţelor 298
Polodie 225, 228
Postulatul static 300
Potenţial 682
— cinetic 327
— neuniform 42
Prandtl, scaunul 183
Precesia echinocţiilor 249
Precesie regulată 249
Presiune dinamică 138
Principiul acţiunii forţelor 35
— celei mai mici acţiuni 358
— — — — constrîngeri 361
— — — — curburi 363
— conservării energiei 44
— constantei vitezei luminii 537
— corespondenţei 439
— de cauzalitate 538
— deplasărilor virtuale 19, 290, 318, 322
— echivalenţei 148
— euristic 439
— independenţei acţiunii forţelor 36
— inerţiei 34, 285
— reacţiunii 37, 162
— relativităţii 37
— reversibilităţii 22
— suprapunerii vibraţiilor 472
— unei mecanici a sistemelor dinamice inerţiale 557
— universal de cauzalitate 22
Principiile analitice universale ale mecanicii 349
— mecanice diferenţiale 361
— mecanicei newtoniene 33
— relativităţii restrînse 537
— variaţionale, integrale, ale mecanicei 354
Problema a două corpuri cu masă variabilă 528
— — *n*-corpuri 457
Problema balistică clasică 87
— cercului 375
— clopotului 252
— evaziunii din atracţia terestră 493
— celor două centre 453
— — — corpuri 98, 454
— — trei corpuri 456, 529
— firului continuu 300
— generală variaţională 505
Problema metronomului 589
— statică 291
Produs scalar 666
— — a doi tensori 706
— vectorial 667
Produse mixte de mai mulţi vectori 668
Pseudovector 667
Punct cu masă variabilă 481
— „greu" pe suprafaţă sau curbă fixă 116, 291
— material 17, 20
— — izolat 37
— — liber 284, 291
— mobil, fără frecare, pe o curbă fixă 285
— — , — — , pe o suprafaţă fixă 285
Punctul vernal γ 249
Putere 41

Radiaţia unui oscilator liniar 63
Rayleigh, teorema ~ 474
Rază de acţiune 281
— de curbură geodezică 118
— — giraţie 181
Reacţiunea punctului fix 221
Reducerea unui sistem de vectori 671
Relaţii de comutativitate 439
— — mobilitate 319
— — permutabilitate 321
— — transitivitate 369, 370
Relativitatea timpului 541
Rezistenţa inerţială 294
Rezonanţă 76, 474
Rezultantă 664
Ricci-Einstein, tensor de curbură ~ 717, 718
Riemann-Christoffel, tensorul ~ 717, 718
Rigid 187
— avînd o axă fixă 288
— — un punct fix 287
— mobil în contact cu un plan fix 293
— — — jurul unei axe fixe 293
— — — — unui punct fix 293
— — paralel cu un plau fix 293
— sprijinindu-se pe un plan fix 288
— supus la legături 287
Rigiditate 163
Ritz, legea ~ 102
Roberval, balanţa ~ 623
Röntgen-Eichenwald, experienţele ~ 536
Rostogolire 135
Rostogolitoare 193
Rotator 57, 323
Rotaţie stabilă 231
Rotorul vectorului de cîmp 696

Scanned with OKEN Scanner

Routh, funcţia ~ 336, 476, 478
— , teorema ~ 336
— , transformarea ~ 336
Rutherford, formula ~ 105, 106
Rydberg, constanta ~ 102

Satelit pămîntesc artificial 107
Schrödinger, ecuaţia ~ 388, 532, 533
— , trepidaţia ~ 441
Scrînciobul 125
Segment activ 486, 506
— de antrenare (anvergură) 487
— orientat 664
— pasiv 506
Seismograf 344
Sens 663, 664, 667
— retrograd 157
Seria ipergeometrică 377
Sforăit magnetic 63
Simbol de speţa a doua 678, 712
— — — întîi 678
— al transformării infinitesimale 396
Simultaneitate 536, 540
Sistem absolut de referinţă 19
— articulat în cîmpul gravitaţional 298
— astronomic 19
— de forţe pur nodale 295
— — referinţă neinerţial 39
Sistem fizic 46
— izolat 163
— multiplu conex 295, 299
— simplu conex 295
— tehnic 46
Sisteme articulate 295
— de coordonate 666
— — corpuri rigide 252
— — — solide 293
— — forţe neconservative 355
— — puncte materiale 162, 286
— — referinţă 666
— — unităţi 46
— galileiene 35
— în „involuţie“ 437
— inerţiale 35
— materiale cu un număr finit de puncte materiale 315
— neolonome 319, 366
— olonome 313, 318
— particulare de vectori 671
— primitive 423
— scleronome 355
— unidimensionale 57
Soluţie infinitesimal vecină 401
Solid nedeformabil 187
Sommerfeld, constanta ~ 550
— , criteriile de cuantificare ~ 418
— , integralele prime ciclice ~ 422, 423
— , teorema generalizată ~ 323
Spaţiile mecanicii newtoniene 663

Spaţiu 536
— absolut 19, 540
— afin 663
— celular 418
— figurativ R_{3N} 315
— liniar afin 666
— metric 666
— pseudoeuclidian 563
— relativ 19, 540
— riemannian 316, 663
Spaţiu-timp fictiv, neriemannian, afin 315
Spaţiul euclidian 663
— fazelor 315, 316, 322, 663
Spaţiul-timp al lumii relativiste 315
Spectre de linie 102
Stabilitatea echilibrului 286
— — unui rigid 289
Statica 284
— grafică 299
— sistemelor articulate, elemente din ~ 295
Staţionaritate 360
Stäckel, funcţiile ~ 453
— , metoda ~ 453, 466
— , sistemul canonic ~ 422
— , teorema ~ 450, 454
Steiner, teorema ~ 178
Stockes, formula ~ 697, 698
— , teorema ~ 409
Succesiunea evenimentelor 543
Suprafaţă absolut aspră 136
— — lucioasă 136
Suprafeţe aspre 264
— complet aspre 264
— de nivel 682
— ortogonale 689
— perfect netede 264
— potenţiale 685
— , proprietăţile ~ 676
Suprapunerea mai multor mişcări 194

Tautocrone 122
Taylor, formula ~ 683
— , seria ~ 67
Tăietură 681
Telegrafie fără fir 64
Tendinţa spre paralelism a axelor 246
Tensiunea firului 303
Tensiuni 295
Tensor 663
— de inerţie 176
— gradient 710
— în spaţiul euclidian 711
— — — riemannian 716
— metric fundamental 704
— simetric 709
— sferic 709
Teorema ariilor 165, 170, 484
— centrului de greutate 164, 516
— conservării energiei 330
— de existenţă 47
— energiei 43, 171, 330

Scanned with OKEN Scanner

Teorema energiei cinetice 485
— impulsului 48, 336, 481, 515, 545
— impulsului generalizat 544
— — total 163
— momentului cinetic 48, 217, 339, 484, 517
— — — faţă de axele fixe 519
— — — — — — mobile 520
— — — relativ 169
— — — total 165
— reciprocităţii 397
— „ultimului" multiplicator 416
Teoria cîmpurilor 681
— corpusculară a luminei 359
— cuantelor 64, 323
— cuantică clasică 439, 463
— electromagnetică a luminii 60
— electronică 535
— relativităţii generalizată 148
— — restrînse 33, 349, 535, 536
— sistemelor hamiltoniene 383
Termenul de interferenţă 62
Termodinamică 168
Timp 536
— absolut 19
— propriu 541
— relativ 19
Tracţiune 295
Traiectorie 22
Transformare de alunecare 393
— omografică vectorială 173
Transformare punctuală extinsă 389, 390, 395
— — şi biunivocă 538
Transformări canonice 389, 393
— complet canonice 394
— de contact 389
— infinitezimale 389, 395
— omogene 394
— punctuale 389

Ţiolkovski, numărul ~ 486
— , prima problemă ~ 486
— , problema a doua 487

Undă plană 60, 61
Universul spaţiu-timp minkowskian 540
Urma tensorului 709

Valoare absolută (modul) 664, 667
Valoarea medie 62
Variabile ascunse 336
Variabile canonic conjugate 393
— canonice 393
— ciclice 336, 447
— de acţiune 424, 469, 470
— ignorabile 336
— kinostenice 336
— unghiulare 424, 469
Variaţia constantelor, metoda ~ 458
— discretă a energiei 325
Variaţie seculară 249
Varignon, poligonul ~ 297
— , teorema ~ 670
Vector 663
— alunecător 669
— axial 667
— euclidian 634
— , împărţirea ~ 665
— legat 664, 669
— localizat 664
— rezultant 664
— unitar 664
Vectori, adunarea ~ 664
— , descompunerea ~ 665
— liberi 664, 692
— reciproci 669
— , scăderea ~ 664
Vectorul gradient 684
Versor 664
Vibraţie în jurul unei mişcări staţionare 474
— proprie 473
Vibraţii întreţinute 474
— normale 472
— principale 472
Vibraţiile sistemelor supuse la legături 473
Viteză absolută 29, 481
— areolară 26
— areolară vectorială 27
— critică 56
— de alunecare 194
— — grup 360
— — translaţie 29
— — transport 28
— pe traiectoare 23
— medie 23
— relativă 28, 482
— rezultantă 543
— unghiulară 26
Viteze generalizate 315
Voltera, cazul ~ 591
Vrănceanu, teoremele ~ 381, 382

Watt, regulatorul ~ 476, 477
Wilson, camera ~ 105, 106.

531
BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
IAŞI

Scanned with OKEN Scanner

ERATĂ

Pag.	Rînd	În loc de	Se va citi	Din vina
51	9	$= \lim_{\to P_2P_0} \frac{-\varphi(P_0)\varphi(P_0)}{P_2P_0}$	$= \lim_{P_2\to P_0} \frac{\varphi(P_2)-\varphi(P_0)}{P_2P_0}$	Edit.
90	2	$= -\frac{v_0^2 \cos^2\theta}{g}(\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\theta_0)$	$= -\frac{v_0^2 \cos^2\theta_0}{g}(\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\theta_0)$	„
188	3 j	$+\frac{(\bar\omega \times \bar v_0)}{\omega^2}\bar\omega -$	$+\frac{(\bar\omega \cdot \bar v_0)}{\omega^2}\bar\omega -$	Autor
200	14 j	(§ 161, relația 133)	(§ 140, relația 11.4)	„
347	6	$\mathfrak{L} =$	$L =$	Tip.
498	16	$v = \dots \frac{1 - c_1 e^{-2\sqrt{qx}v_2 t}}{1 + c_1 e^{-2\sqrt{qx}v_2 t}}$	$v = \dots \frac{1 - c_1 e^{-2\sqrt{qx}v_2 t}}{1 + c_1 e^{-2\sqrt{qx}v_1 t}}$	Edit.
501	3 j	$1 - \sigma t_1$	$1 - \alpha t_1$	„
504	20	$v = \frac{dv}{ds}v,$	$\dot v = \frac{dv}{ds}v,$	„
509	1 j	$\frac{\dots - gv - \sin\theta(f + wf')}{(fg\sin\theta + Q)^2} = 0$	$\frac{\dots - gv\sin\theta(f + wf')}{(fg\sin\theta + Q)^2} = 0$	„
515	8 j	$\bar P = m\bar v_c - q_c \cdot$	$\bar P = m\bar v_c - m\bar q_c$	„
527	2	$= p^h \dot q^h - T,$	$p_k \dot q^k - T,$	„
527	9	$\delta H = \dot{}^h \delta p_h - \dots$	$\delta H = \dot q^k \delta p_k - \dots$	Tip.
548	6	$= -\frac{Ze^2}{r^3}\dot{\bar r};$	$= -\frac{Ze^2}{r^3}\dot{\bar r}\,\bar r;$	Edit.
549	5 j	$= \frac{\eta_r^2\gamma^2}{(\eta_r + \eta_\varphi\gamma)^2}.$	$= \frac{\eta_\varphi^2\gamma^2}{(\eta_r + \eta_\varphi\gamma)^2}.$	Autor
552	3 j	$\tau = \frac{1}{c}\int_{w=0}^{w=z} \frac{\omega^2 a^2}{\sqrt{\dots\dots}}\,dw.$	$\tau = \frac{1}{c}\int_{w=0}^{w=z} \frac{\omega_0^2 a^2}{\sqrt{\dots\dots}}\,dw.$	Edit.

Scanned with OKEN Scanner

Pag.	Rînd	În loc de	Se va citi	Din vina
589	11 j	$\ddot{\theta}^2 =$	$J\dot{\theta}^2 =$	Autor
605	2 j	$= \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\frac{r}{2}b.$	$= \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\frac{r}{2}b^2.$	Edit.
621	10 j	$\varepsilon P = Q$	$2P = Q$	Autor
642	14	$\frac{1}{\sin^2\theta}\left[1 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{d\theta^2}{d\lambda}\right)\right] =$	$\frac{1}{\sin^2\theta}\left[1 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2\right] =$	Tip.
655	7 j	$\cdots \left[\quad\right]\frac{gf_s}{k}(t - t_1)$	$\cdots \left[\quad\right] - \frac{gf_s}{k}(t - t_1)$	Edit.
666	3	$\bar{a} = \sum \bar{\alpha}_i s_i.$	$\bar{a} = \sum a_i \bar{s}_i.$	Tip.
696	17	Raportul	Rotorul	„

Mecanica vectorială

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
IAȘI

Scanned with OKEN Scanner